

# **Schwingungen und ihre Filterung unter Verwendung von Ergebnissen aus FEM-Rechnungen**

AG Qualität im Fachbereich Mathematik  
Universität Hannover, Welfengarten 1, D - 30167 Hannover  
Telephon: +49-511-762-3336 oder -3337    Telefax: + 49-511-8386072  
<http://im-03.iw.uni-hannover.de>  
Verantwortlicher Leiter : Dr. Dirk Windelberg

## **Inhalt**

|                                                                                                                                |   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 1. Aufgabe .....                                                                                                               | 1 |
| 2. Bestimmung der maximalen Verzögerung .....                                                                                  | 2 |
| 2.1 Auswertung einer FEM-Rechnung zur Bestimmung der Verzögerungen beim Aufprall<br>eines Behälters auf einen Betonboden ..... | 2 |
| 2.2 maximale Verzögerungen zu verschiedenen Zeitschritten .....                                                                | 2 |
| 2.2.1 160 Messwerte in 0,005 s .....                                                                                           | 2 |
| 2.2.2 42 Zeitschritte in 0,005 s .....                                                                                         | 3 |
| 2.2.3 14 Zeitschritte in 0,005 s .....                                                                                         | 3 |
| 3. Filterung .....                                                                                                             | 4 |
| 3.1 Schnelle Fourier Transformation (FFT) .....                                                                                | 4 |
| 3.2 FFT für 160 Messwerte auf 0,005 s .....                                                                                    | 5 |
| 3.3 FFT für 42 Messwerte auf 0,005 s .....                                                                                     | 6 |
| 3.4 FFT für 14 Messwerte auf 0,005 s .....                                                                                     | 7 |

## **1. Aufgabe**

Mit Hilfe eines FEM-Programmes wurde ein Aufprall eines Stahl-Behälters auf eine Betonboden gerechnet, um die maximalen Verzögerungen in der Behälterwand zu bestimmen. Bei der FEM-Rechnung wurde eine minimale Zeitschrittweite von 167 Messpunkten pro 0,005 s eingestellt.

Das Ergebnis besteht daher aus 167 Verzögerungswerten innerhalb eines Zeitraumes von 0,005 s.

Hier soll der Frage nachgegangen werden, wie gross die maximale Verzögerung ist, wenn Schwingungen bei Frequenzen von mehr als 200 Hz ( $=0,005$  s) vernachlässigt werden.

Im Kapitel 2 werden von den 167 Messwerten zunächst nur noch jeder 4. Messwert und schliesslich nur noch jeder 12. Messwert berücksichtigt.

Im Kapitel 3 wird für jede der drei erzeugten „Versuche“ jeweils eine Harmonische Analyse (Fast Fourier-Transformation „FFT“) durchgeführt. In der dadurch entstehenden trigonometrischen Reihe werden dann stufenweise immer mehr der Koeffizienten hoher Frequenzen vernachlässigt.

Dann kann sich bei einer Auflösung von 14 Zeitschritten in 0.005 s und einer maximalen Wellenlänge von 0,01 s eine maximale Verzögerung von 1406 g ergeben.



## 2. Bestimmung der maximalen Verzögerung

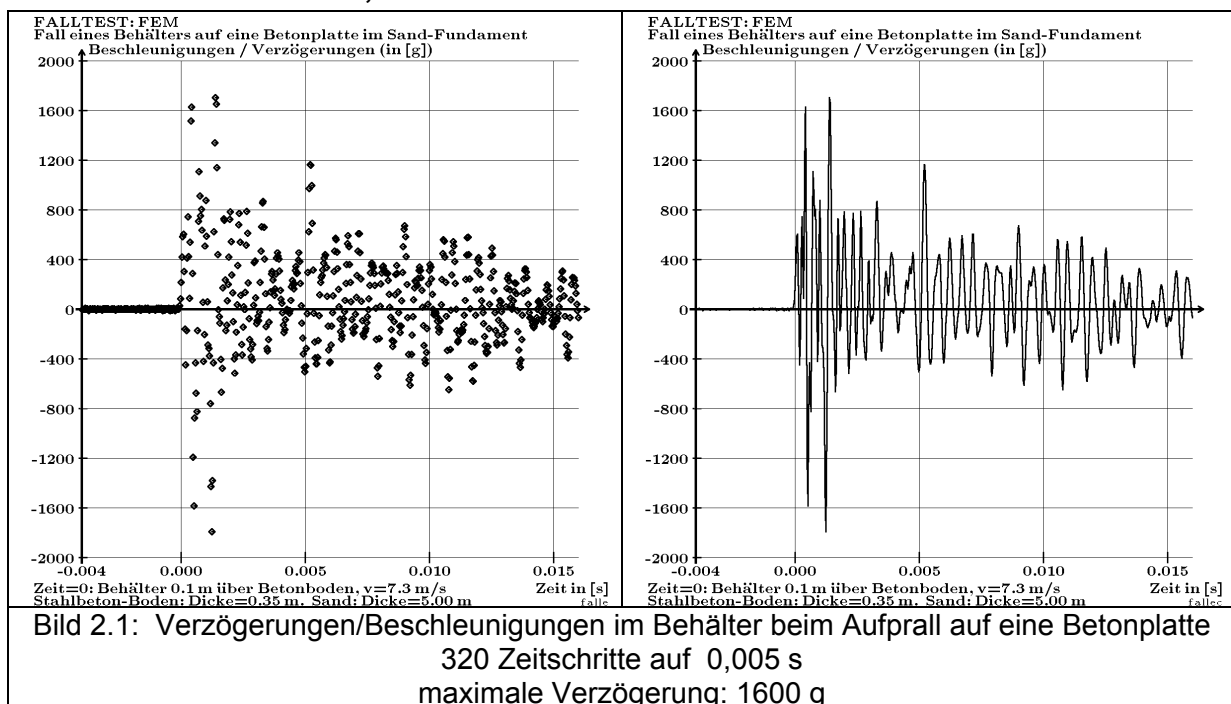
### 2.1 Auswertung einer FEM-Rechnung zur Bestimmung der Verzögerungen beim Aufprall eines Behälters auf einen Betonboden

In dem Falltest wurden Messwerte für die Zeit zwischen dem Aufprall und 0.015 s danach berechnet. Die Berechnungen setzen homogenes Material und einfache Geometrie des Behälters und des Betonbodens voraus - diese Voraussetzung ist im praktischen Versuch nicht gegeben. Es wurde ferner angenommen, dass der Behälter nicht beladen war, so dass auch keine zusätzlichen Verzögerungen durch unterschiedliche Aufprallzeiten von Behälter und Ladung berücksichtigt wurden.

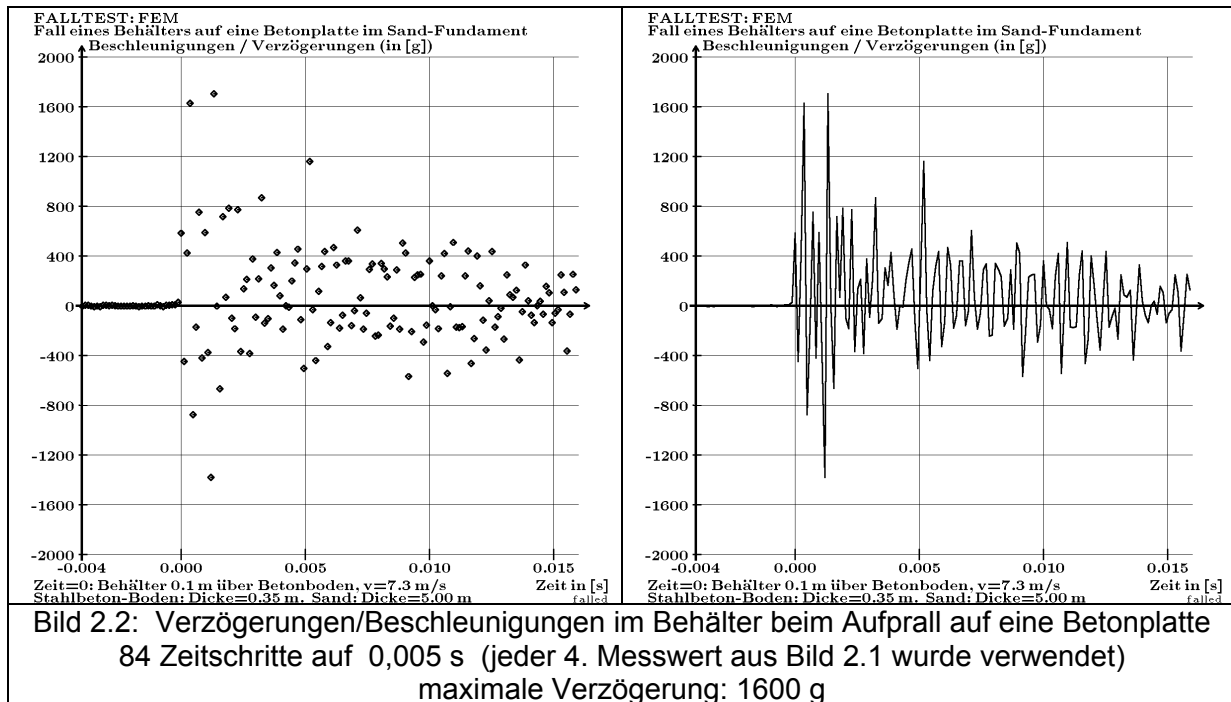
Es wurde zu Testzwecken untersucht, welches Ergebnis eine FEM-Rechnung mit deutlich geringerer Zeitschrittweite ergeben hätte.

### 2.2 maximale Verzögerungen zu verschiedenen Zeitschritten

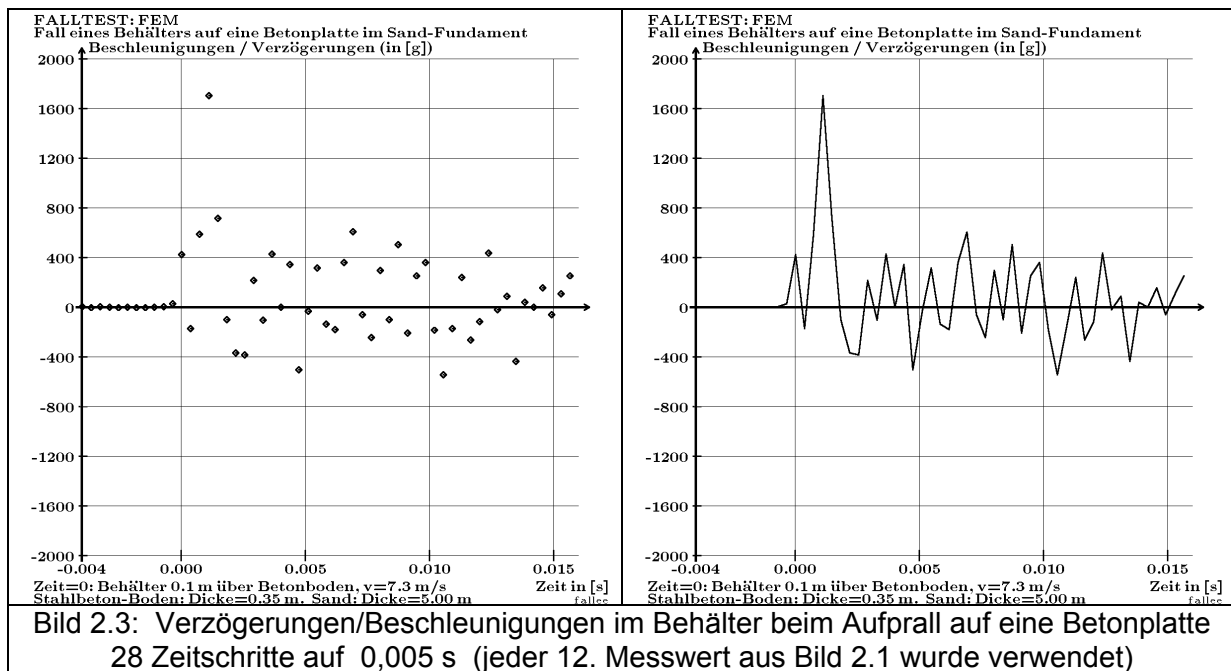
#### 2.2.1 160 Messwerte in 0,005 s.



## 2.2.2 42 Zeitschritte in 0,005 s.



## 2.2.3 14 Zeitschritte in 0,005 s.



### 3. Filterung

Es wird angenommen, dass bei "sehr hoher Frequenz" eine beliebig hohe Verzögerung nicht zu einer Materialschädigung führt. Daher soll für die im Kapitel 2 angegebenen verschiedenen berechneten Verzögerungen jeweils eine "Grundschiwingung" bestimmt werden. Für eine trigonometrische Funktion können Grundschiwingungen und Oberschiwingungen voneinander getrennt werden. Daher wird hier zunächst eine solche Funktion gesucht, die die Messwerte optimal approximiert, und dann werden von dieser Funktion die Oberschiwingungen weggelassen.

#### 3.1 Schnelle Fourier Transformation (FFT)

Es wird hier angenommen, dass in einer FEM-Rechnung  $(2 \cdot m)$  Messwerte für die Zeit nach dem Aufprall des Behälters auf einen Betonfussboden bestimmt wurden:

Für  $i$  mit  $1 \leq i \leq (2 \cdot m - 1)$  sei  $t(i)$  der Zeitpunkt, zu dem eine Verzögerung (oder Beschleunigung)  $v(i)$  auftritt.

Ferner wird angenommen, dass die Zeitschrittweite, also die Differenz  $t(i) - t(i-1)$ , für alle  $i$  mit  $0 \leq i \leq (2 \cdot m - 1)$  gleich gross gewählt wurde.

Ziel ist es, eine (trigonometrische) Funktion

$$v(x) = a(0) + \sum_{j=1}^{m-1} [a(j) \cdot \cos(j \cdot x) + b(j) \cdot \sin(j \cdot x)] + a(m) \cdot \cos(m \cdot x) \quad \text{mit} \quad x = \frac{2 \cdot \pi}{t(2 \cdot m - 1) - t(0)} \cdot t$$

zu bestimmen, deren Kurve die Messwerte möglichst gut trifft.

Nach den Regeln der Angewandten Mathematik sind diese Koeffizienten wie folgt zu berechnen:

|                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a(0) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \sum_{i=0}^{2 \cdot m - 1} v(i)$                                                                                      | $a(m) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \sum_{i=0}^{2 \cdot m - 1} v(i) \cdot \cos(i \cdot \pi)$                                                              |
| $a(j) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=0}^{2 \cdot m - 1} v(i) \cdot \cos\left(\frac{j \cdot i \cdot \pi}{m}\right) \quad \text{für } 1 \leq j \leq (m - 1)$ | $b(j) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=0}^{2 \cdot m - 1} v(i) \cdot \sin\left(\frac{j \cdot i \cdot \pi}{m}\right) \quad \text{für } 1 \leq j \leq (m - 1)$ |

### 3.2 FFT für 160 Messwerte auf 0,005 s

Das Ergebnis einer Fourier-Transformation für die in Bild 2.1 dargestellten Messpunkte (ab dem Aufprall, also ab der Zeit 0.000 s) ist in dem folgenden Bild 3.1 dargestellt.

Ferner wurden in Bild 3.1a und Bild 3.1b die Ergebnisse bei Reduzierung der Obertöne angegeben: In Bild 3.1a wurden nur die ersten 12 Grundfrequenzen betrachtet, in Bild 3.1b nur die ersten 4.

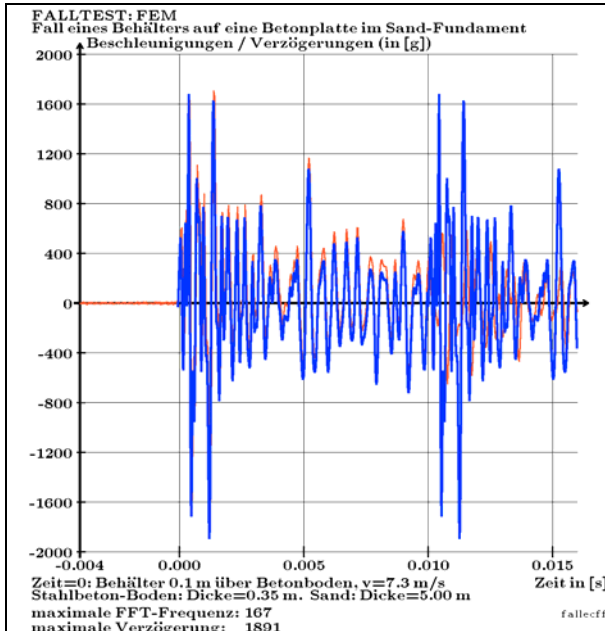


Bild 3.1: Auflösung von 160 Zeitschritten in 0.005 s  
Maximale FFT-Frequenz: 167  
maximale Verzögerung: 1891 g

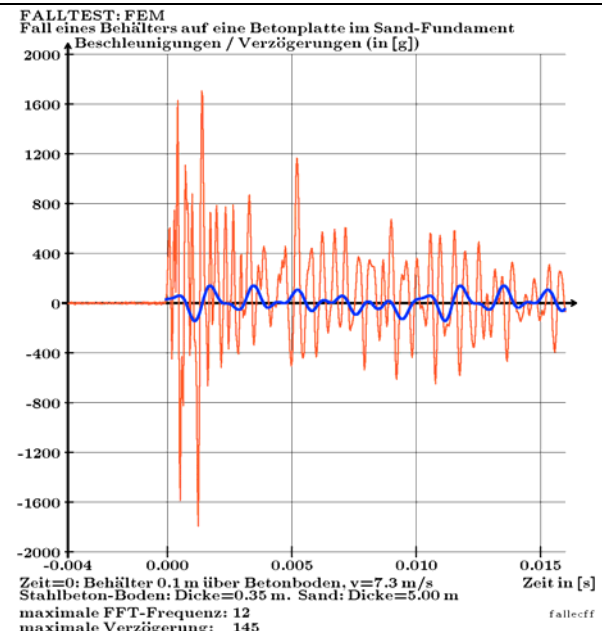


Bild 3.1a: Auflösung von 160 Zeitschritten in 0.005 s  
Maximale FFT-Frequenz: 12  
maximale Verzögerung: 145 g

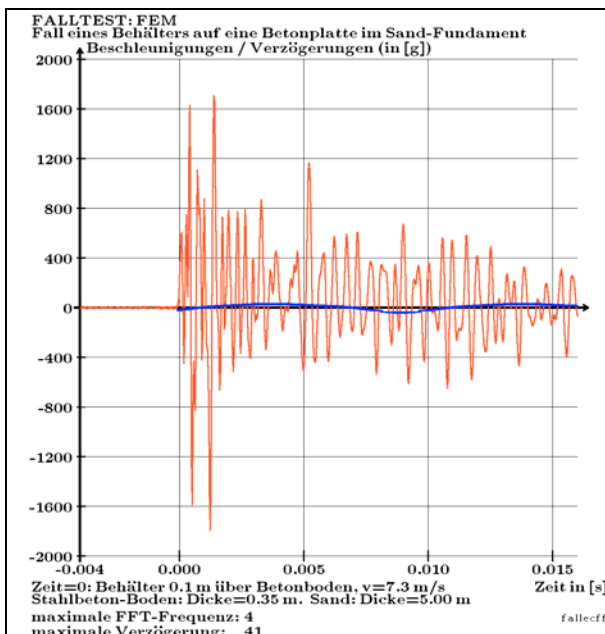
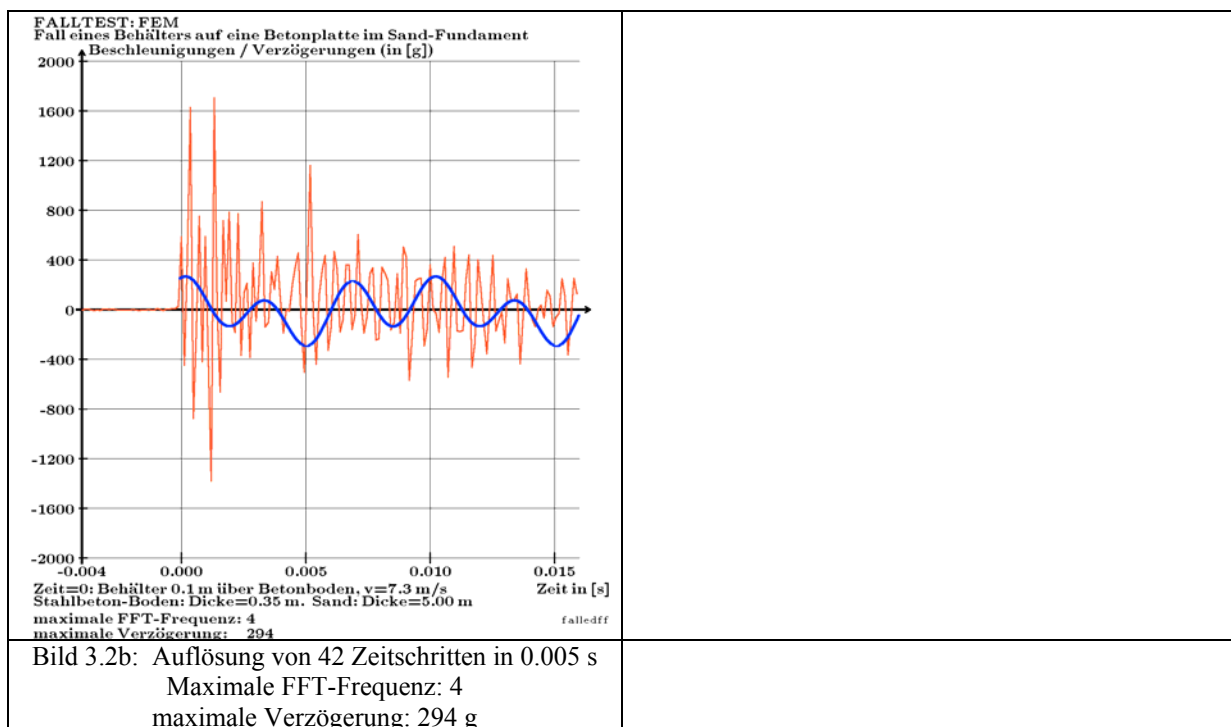
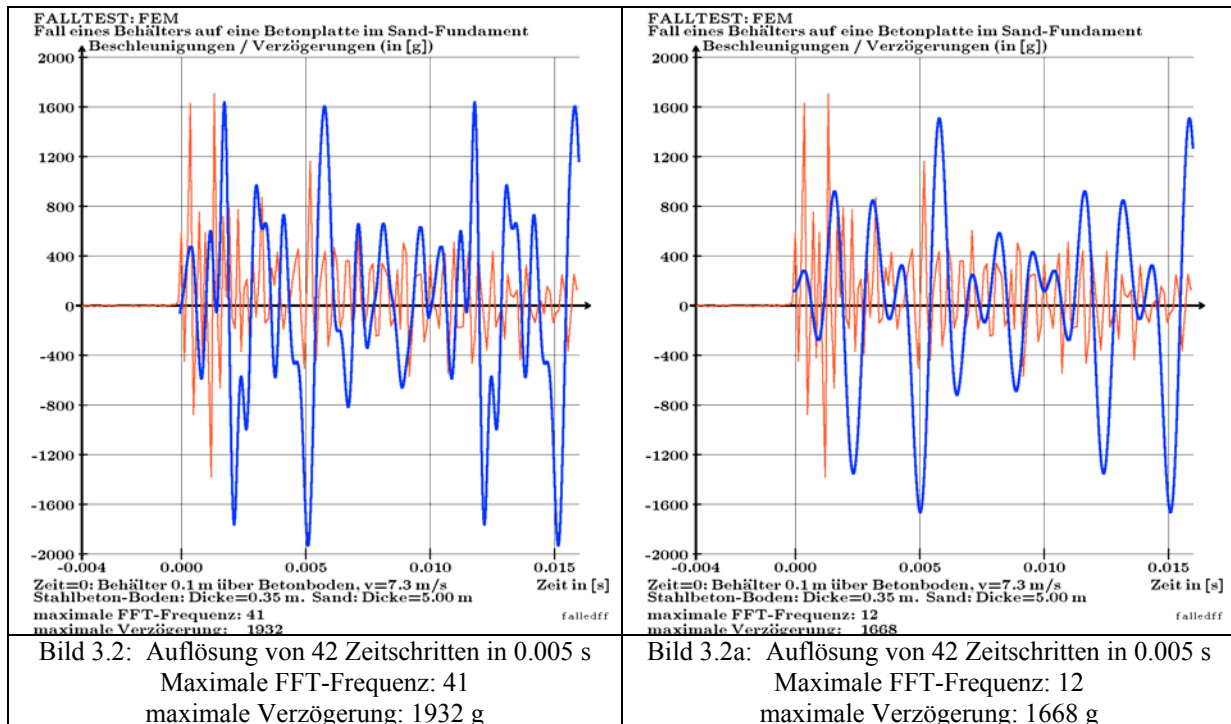


Bild 3.1b: Auflösung von 160 Zeitschritten in 0.005 s  
Maximale FFT-Frequenz: 4  
maximale Verzögerung: 41 g

### 3.3 FFT für 42 Messwerte auf 0,005 s



### 3.4 FFT für 14 Messwerte auf 0,005 s

