10 Extremwertaufgaben, dreidimensional

3D: Notwendige Bedingung für das Auftreten eines relativen Extremwertes:
Es seien $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : B \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn der Graph von $z = f(x, y)$ in (x_e, y_e) ein relatives Extremum besitzt, so ist

$$f_x(x_e, y_e) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_e, y_e) = 0 \tag{1}$$

3D: Hinreichende Bedingung für das Auftreten eines relativen Extremwertes:
Es ist zunächst die Determinante

$$D(x, y) := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \tag{2}$$

zu berechnen. Dann ist für jedes mögliche Extremum (x_e, y_e) der Wert $D(x_e, y_e)$ zu berechnen:

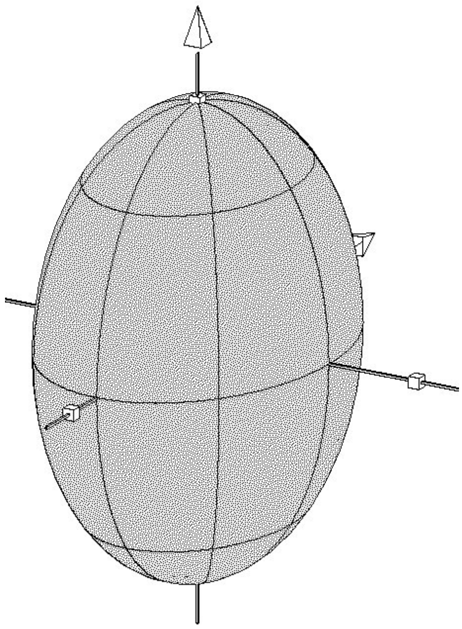
- wenn $D(x_e, y_e) > 0$ und $f_{xx} < 0$, dann besitzt die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt (x_e, y_e) ein relatives Maximum
- wenn $D(x_e, y_e) > 0$ und $f_{xx} > 0$, dann besitzt die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt (x_e, y_e) ein relatives Minimum
- wenn $D(x_e, y_e) < 0$, dann besitzt die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt (x_e, y_e) ein kein Extremum (es liegt ein Sattelpunkt vor)
- wenn $D(x_e, y_e) = 0$, dann ist keine Aussage über ein Extremum möglich

Aufgabe 10.1:
Bestimmen Sie das Volumen des größten Quaders mit achsenparallelen Kanten innerhalb des Ellipsoids mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$ (1)

Lösung der Aufgabe 10.1:
Wähle auf der Schale des Ellipsoids einen Punkt $P = (x, y, z)$.
Der durch diesen Punkt definierte Quader hat dann das Volumen
$V_Q = 8 \cdot x \cdot y \cdot z$.

Lösungsweg 1: Entsprechend der Aufgabe 9.4 versuchen wir, die Funktion $V(x, y, z)$ durch eine Funktion $V(x, y)$ zu beschreiben, indem wir die Ellipsoidgleichung nach z auflösen:
$z^2 = c^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$ und damit

$$V(x, y) = 8 \cdot x \cdot y \cdot c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \tag{2}$$



Aufgabe 10.1: Ellipsoid

Für das Auftreten eines Extremums an einer Stelle (x_e, y_e) lautet dann die notwendige Bedingung: $V_x(x_e, y_e) = 0$ und $V_y(x_e, y_e) = 0$.
Hier ist nach der Produktregel

$$V_x = 8 \cdot y \cdot c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - 8 \cdot x \cdot y \cdot c \cdot \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = 8 \cdot y \cdot c \cdot \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{x^2}{a^2}\right]$$

für ein mögliches Maximum in (x_e, y_e) muss $y_e \neq 0$ sein, also muss gelten:

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{x^2}{a^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{y_e^2}{b^2} = 1 - 2 \cdot \frac{x_e^2}{a^2} \tag{3}$$

Entsprechend

$$V_y = 8 \cdot x \cdot c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - 8 \cdot x \cdot y \cdot c \cdot \frac{y}{b^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = 8 \cdot x \cdot c \cdot \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{y^2}{b^2}\right]$$

für ein mögliches Maximum in (x_e, y_e) muss $x_e \neq 0$ sein, also muss gelten

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x_e^2}{a^2} = 1 - 2 \cdot \frac{y_e^2}{b^2} \tag{4}$$

Wird nun (3) in (4) eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{x_e^2}{a^2} = 1 - 2 \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{x_e^2}{a^2}\right) = -1 + 4 \cdot \frac{x_e^2}{a^2} \text{ oder } 1 = 3 \cdot \frac{x_e^2}{a^2} \text{ oder}$$

$$x_e = \frac{a}{\sqrt{3}} \tag{5}$$

Wird dann (5) in (3) eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{y_e^2}{b^2} = 1 - 2 \cdot \frac{x_e^2}{a^2} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ oder } y_e = \frac{b}{\sqrt{3}} \tag{6}$$

Werden (5) und (6) in (1) eingesetzt, so ist

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ und damit $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$.

Lösungsweg 2 (Lagrange):
Die Nebenbedingung lautet

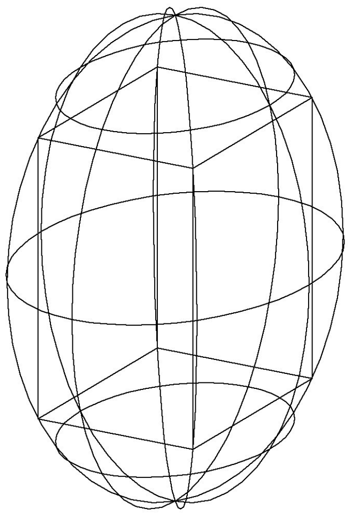
$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

und die Lagrange-Funktion

$$L(x, y, z, \lambda) = 8 \cdot x \cdot y \cdot z + \lambda \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right).$$

Die notwendige Bedingung dafür, dass der Punkt mit den Koordinaten (x, y, z) eine Ecke des Quaders mit maximalem Volumen ist, lautet

$$L_x = 8 \cdot y \cdot z + \tfrac{2 \cdot \lambda}{a^2} \cdot x = 0$$
$$L_y = 8 \cdot x \cdot z + \tfrac{2 \cdot \lambda}{b^2} \cdot y = 0$$
$$L_z = 8 \cdot x \cdot y + \tfrac{2 \cdot \lambda}{c^2} \cdot z = 0$$
$$L_\lambda = \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} + \tfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$



Aufgabe 10.1: Ellipsoid mit maximalem Quader

Dann ist

$$0 = x \cdot L_x - y \cdot L_y = 2 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \text{ und folglich } x^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot y^2 \tag{7}$$

Entsprechend ist

$$0 = y \cdot L_y - z \cdot L_z = 2 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) \text{ und folglich } y^2 = \frac{b^2}{c^2} \cdot z^2 \tag{8}$$

Aus (7) ergibt sich mit Gleichung (8):

$$x^2 = \frac{a^2}{c^2} \cdot z^2 \tag{9}$$

Wegen $L_\lambda = 0$ folgt mit (9) und (8):

$L_\lambda = \frac{z^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

$$\text{und damit } z = \frac{c}{\sqrt{3}}. \tag{10}$$

$$\text{Dann sind auch } y = \frac{b}{\sqrt{3}} \text{ und } x = \frac{a}{\sqrt{3}} \tag{11}$$

Für den Punkt $P = (x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a, b, c)$ ergibt sich dann das maximale Volumen zu $V = \frac{8}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot a \cdot b \cdot c$

Aufgabe 10.2:

Bestimmen Sie die relativen Extrema der folgenden Funktion und zeichnen Sie die Fläche jeweils in einer Umgebung möglicher Extrema (also auch von Sattelpunkten).

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 9 \cdot x \cdot y + 27$$

Lösung 10.2:
Es ist

$$f_x = 3 \cdot x^2 - 9 \cdot y \quad \text{und} \quad f_y = 3 \cdot y^2 - 9 \cdot x$$

Die <u>notwendige</u> Bedingung für das Auftreten eines Extremums an einer Stelle (x_e, y_e) lautet

$$f_x(x_e, y_e) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_e, y_e) = 0 \tag{3}$$

Hier folgt aus

$$3 \cdot x_e^2 - 9 \cdot y_e = 0 \quad \text{und} \quad 3 \cdot y_e^2 - 9 \cdot x_e = 0$$

durch Division mit 3

$$x_e^2 - 3 \cdot y_e = 0 \quad \text{und} \quad y_e^2 - 3 \cdot x_e = 0$$

und damit

$$y_e = \frac{1}{3} \cdot x_e^2 \quad \text{und} \quad x_e = \frac{1}{3} \cdot y_e^2$$

Einsetzen von y_e aus der ersten Gleichung in die zweite Gleichung ergibt

$$x_e = \frac{1}{27} \cdot x_e^4$$

und daher

$$x_{e1} = 0 \quad \text{oder} \quad x_{e2} = 3$$

Wegen $y_e = \frac{1}{3} \cdot x_e^2$ gehören dazu die y-Werte

$$y_{e1} = 0 \quad \text{bzw.} \quad y_{e2} = 3$$

Damit lauten die Koordinaten der mögliche Extremwerte

$$P_1 = (x_{e1}, y_{e1}) = (0,0) \quad \text{und} \quad P_2 = (x_{e2}, y_{e2}) = (3,3)$$

Für diese beiden möglichen Extremwerte wird die <u>hinreichende</u> Bedingung für das Auftreten eines Extremums geprüft: Dazu ist zunächst die Hesse-Determinante (2) zu berechnen.
Hier ist

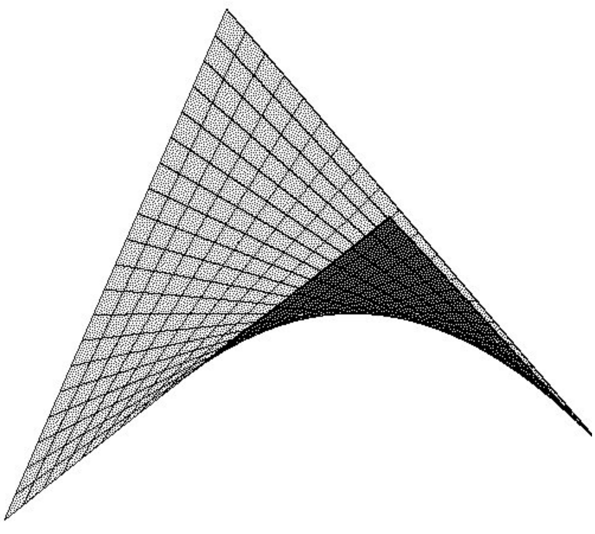
$$f_{xx}(x,y) = 6 \cdot x \quad \text{und} \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -9 \quad \text{und} \quad f_{yy}(x,y) = 6 \cdot y$$

nach (2) also

$$D(x,y) := \begin{vmatrix} 6 \cdot x & -9 \\ -9 & 6 \cdot y \end{vmatrix} = 36 \cdot x \cdot y - 81$$

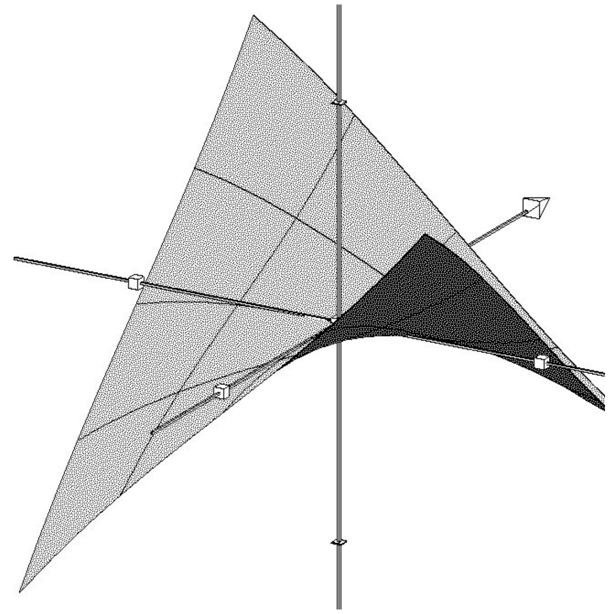
und folglich gilt:

- In $P_1 = (0,0)$ besitzt die Fläche $z = f(x,y)$ einen <u>Sattelpunkt</u>
  wegen $D(0,0) = -81 < 0$
- In $P_2 = (3,3)$ besitzt die Fläche $z = f(x,y)$ ein <u>relatives Minimum</u>
  wegen $D(3,3) = 243 > 0$ und $f_{xx}(3,3) = 18 > 0$

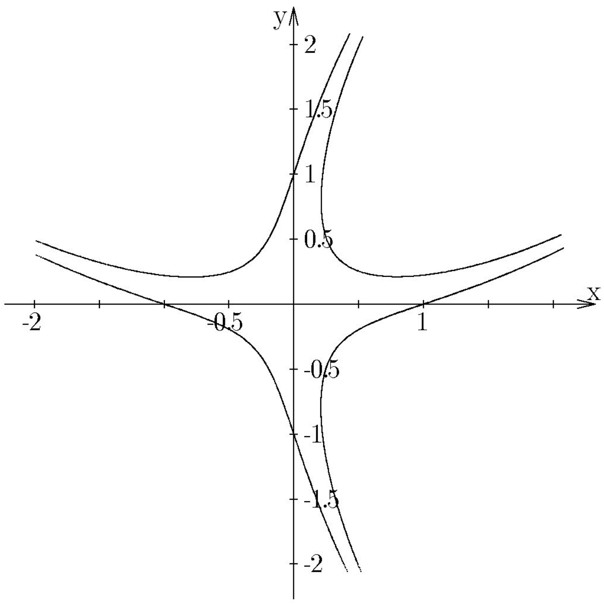


Aufgabe 10.2:: Blockbild zu $P_1 = (0,0)$
$-0.1 \leq x \leq 0.1$ und $-0.1 \leq y \leq 0.1$

Bilder zu Aufgabe 10.2:
In $P_1 = (0, 0)$ besitzt die Fläche $z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 9 \cdot x \cdot y + 27$ einen Sattelpunkt

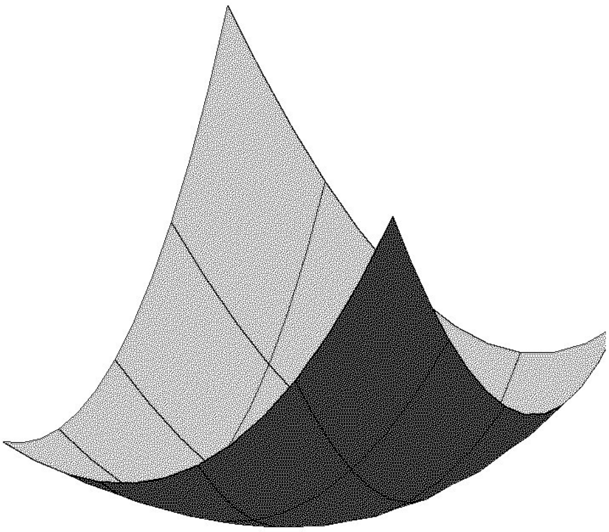


Aufgabe 10.2:: Blockbild zu $P_1 = (0, 0)$
$-1 \le x \le 1$ und $-1 \le y \le 1$
(Fläche: $z = f(x, y) - 27$)

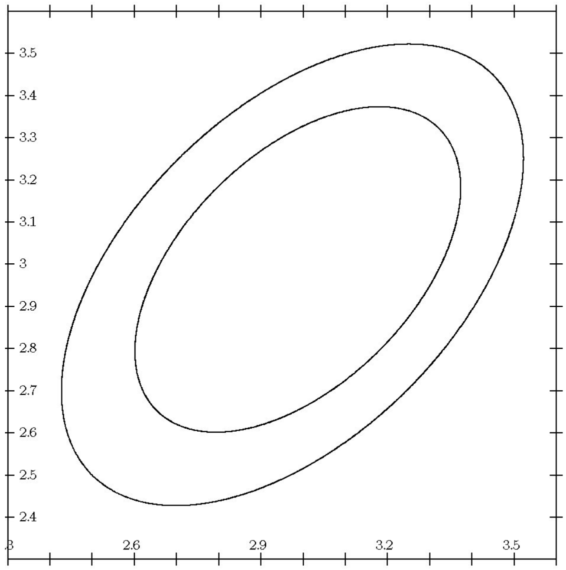


Aufgabe 10.2:: Höhenlinien zu $P_1 = (0, 0)$
$z = 26$ und $z = 28$

In $P_2 = (3, 3)$ besitzt die Fläche $z = f(x, y)$ ein relatives Minimum



Aufgabe 10.2:: Blockbild zu $P_2 = (3, 3)$
$2 \le x \le 4$ und $2 \le y \le 4$



Aufgabe 10.2:: Höhenlinien zu $P_2 = (3, 3)$
$z = 1$ und $z = 2$
$(2.4 \le x, y, \le 3.6)$

Aufgabe 10.3:

Bestimmen Sie die relativen Extrema der folgenden Funktion und zeichnen Sie die Fläche jeweils in einer Umgebung möglicher Extrema (also auch von Sattelpunkten).

$$f(x,y) = y \cdot \frac{\cosh(x)}{1+y^2}$$

Lösung 10.3:
Es ist

$$f_x = \frac{y}{1+y^2} \cdot \sinh(x) \quad \text{und} \quad f_y = \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2} \cdot \cosh(x)$$

<u>notwendige</u> Bedingung:
<u>Für ein mögliches Extremum (x_e, y_e) muss daher nach (3) gelten</u>

$$0 = \frac{y_e}{1+y_e^2} \cdot \sinh(x_e) \quad \text{und} \quad 0 = \frac{1-y_e^2}{(1+y_e^2)^2} \cdot \cosh(x_e)$$

also hier

$$(y_e = 0 \text{ oder } x_e = 0) \quad \text{und} \quad (y_e = 1 \,\text{oder}\, y_e = -1)$$

Damit lauten die Koordinaten der mögliche Extremwerte

$$P_1 = (x_{e1}, y_{e1}) = (0,1) \quad \text{und} \quad P_2 = (x_{e2}, y_{e2}) = (0,-1)$$

<u>hinreichende</u> Bedingung:
Hier ist

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{y}{1+y^2} \cdot \cosh(x) \quad \text{und} \quad f_{yy}(x,y) = \frac{2 \cdot y^3 - 6 \cdot y}{(1+y^2)^3} \cdot \cosh(x) \\ \text{und} \quad f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2} \cdot \sinh(x) \end{aligned}$$

und damit <u>für den Punkt $P_1 = (0,1)$</u>

$$\begin{aligned} f_{xx}(0,1) &= \frac{1}{2} \cdot \cosh(0) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad f_{yy}(0,1) = \frac{2-6}{2^3} \cdot \cosh(0) = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \\ \text{und} \quad f_{xy}(0,1) &= f_{yx}(0,1) = \frac{1-1}{2^2} \cdot \sinh(0) = 0 \end{aligned}$$

nach (2) also

$$D(0,1) := \begin{vmatrix} f_{xx}(0,1) & f_{xy}(0,1) \\ f_{yx}(0,1) & f_{yy}(0,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

d.h. **im Punkt $P_1 = (0,1)$ besitzt die Fläche einen Sattelpunkt.**

<u>Für den Punkt $P_2 = (0,-1)$</u>

$$\begin{aligned} f_{xx}(0,-1) &= \frac{-1}{2} \cdot \cosh(0) = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad f_{yy}(0,-1) = \frac{-2+6}{2^3} \cdot \cosh(0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \text{und} \quad f_{xy}(0,-1) &= f_{yx}(0,-1) = \frac{1-1}{2^2} \cdot \sinh(0) = 0 \end{aligned}$$

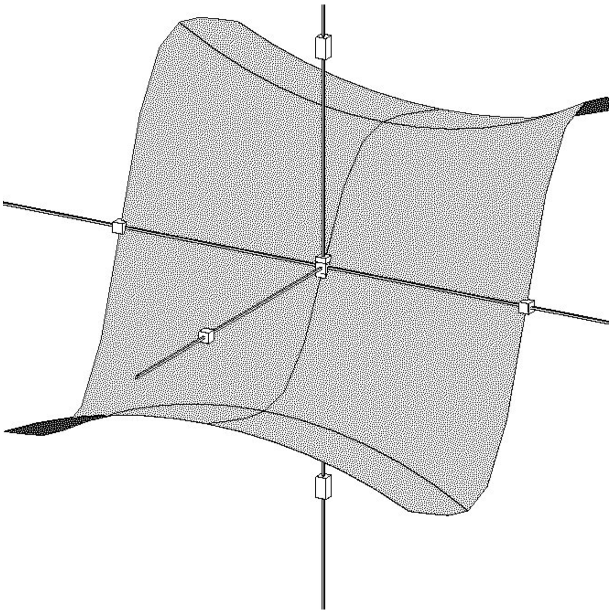
nach (2) also

$$D(0,-1) := \begin{vmatrix} f_{xx}(0,-1) & f_{xy}(0,-1) \\ f_{yx}(0,-1) & f_{yy}(0,-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

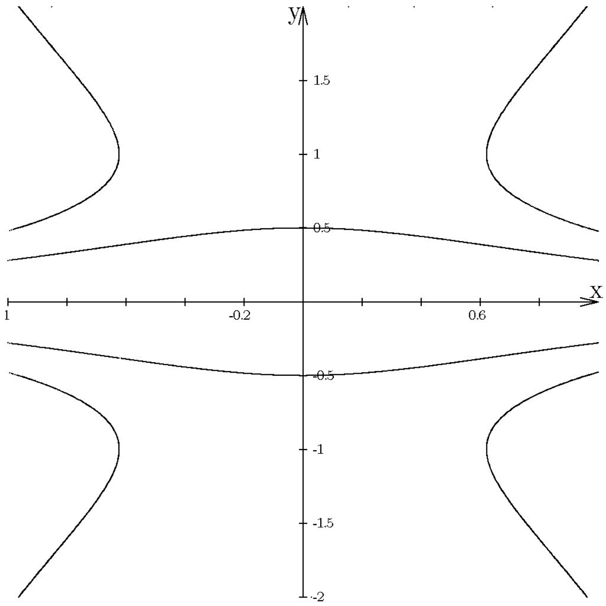
d.h. **im Punkt $P_2 = (0,-1)$ besitzt die Fläche einen Sattelpunkt.**

Aufgabe 10.3:
Fläche $z = f(x, y) = y \cdot \frac{\cosh(x)}{1+y^2}$:

In $P_1 = (0, 1)$ und $P_2 = (0, -1)$ besitzt die Fläche $z = f(x, y)$ jeweils einen Sattelpunkt



Aufgabe 10.3: Blockbild zu $z = y \cdot \frac{\cosh(x)}{1+y^2}$
$-1 \leq x \leq 1$ und $-2 \leq y \leq 2$



Höhenlinien zu Aufgabe 10.3
$z = \pm 0.6$ und $z = \pm 0.4$
($-1 \leq x \leq 1$ und $-2 \leq y \leq 2$)

Aufgabe 10.4:

Bestimmen Sie die relativen Extrema der folgenden Funktion und zeichnen Sie die Fläche jeweils in einer Umgebung möglicher Extrema (also auch von Sattelpunkten).

$$f(x,y) = 4 \cdot y^3 - 6 \cdot x \cdot y^2 + 3 \cdot x^2 \cdot y^2 - 6 \cdot x \cdot y$$

Zeichnen Sie für diese Fläche

a) die Höhenlinie $H = -7$ in der Umgebung des Punktes $P_2 = (2,1)$ und

b) die Höhenlinien $H = -1$ und $H = -1.5$
in der Umgebung des Punktes $P_3 = (-1, -0.5)$.

Lösung 10.4:
Es ist

$$f_x = -6 \cdot y^2 + 6 \cdot x \cdot y^2 - 6 \cdot y \quad \text{und} \quad f_y = 12 \cdot y^2 - 12 \cdot x \cdot y + 6 \cdot x^2 \cdot y - 6 \cdot x$$

Die <u>notwendige</u> Bedingung für das Auftreten eines Extremums an einer Stelle (x_e, y_e) lautet nach (3)

$$f_x(x_e, y_e) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_e, y_e) = 0$$

Hier folgt aus

$$-6 \cdot y_e^2 + 6 \cdot x_e \cdot y_e^2 - 6 \cdot y_e = 0 \quad \text{und} \quad 12 \cdot y_e^2 - 12 \cdot x_e \cdot y_e^2 + 6 \cdot x_e^2 \cdot y_e - 6 \cdot x_e = 0$$

durch Division mit 6

$$-\,y_e^2 + x_e \cdot y_e - y_e = 0 \quad \text{und} \quad 2 \cdot y_e^2 - 2 \cdot x_e \cdot y_e + x_e^2 \cdot y_e - x_e = 0 \tag{4}$$

und damit aus der ersten Gleichung von (4)

$$y_e \cdot (y_e - x_e \cdot y_e + 1) = 0$$

also

$$y_{e1} = 0 \quad \text{oder} \quad y_e - x_e \cdot y_e + 1 = 0 \Leftrightarrow y_{e2} = \frac{1}{x_e - 1}$$

Werden diese Werte von y_e jeweils in die zweite Gleichung von (4) eingesetzt, so ergeben sich:

- $\underline{y_{e1} = 0}$: Dann muss gelten $x_{e1} = 0$.

- $\underline{y_{e2} = \frac{1}{x_e - 1}}$: Dann muss gelten: $2 \cdot \left(\frac{1}{x_e-1}\right)^2 - 2 \cdot x_e \cdot \left(\frac{1}{x_e-1}\right) + x_e^2 \cdot \left(\frac{1}{x_e-1}\right) - x_e = 0$ und damit - nach Multiplikation von $(x_e - 1)^2$ -

  $$2 - 2 \cdot x_e \cdot (x_e - 1) + x_e^2 \cdot (x_e - 1) - x_e \cdot (x_e - 1)^2 = 0$$

  oder

  $$2 + x_e - x_e^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{e2} = 2 \quad \text{und} \quad x_{e3} = -1$$

Damit lauten die Koordinaten der mögliche Extremwerte

$$P_1 = (x_{e1}, y_{e1}) = (0, 0)$$

und

$$P_2 = (x_{e2}, y_{e2}) = (2, \frac{1}{x_{e2} - 1}) = (2, 1) \quad \text{und} \quad P_3 = (x_{e3}, y_{e2}) = (-1, \frac{1}{x_{e3} - 1}) = (-1, -\frac{1}{2})$$

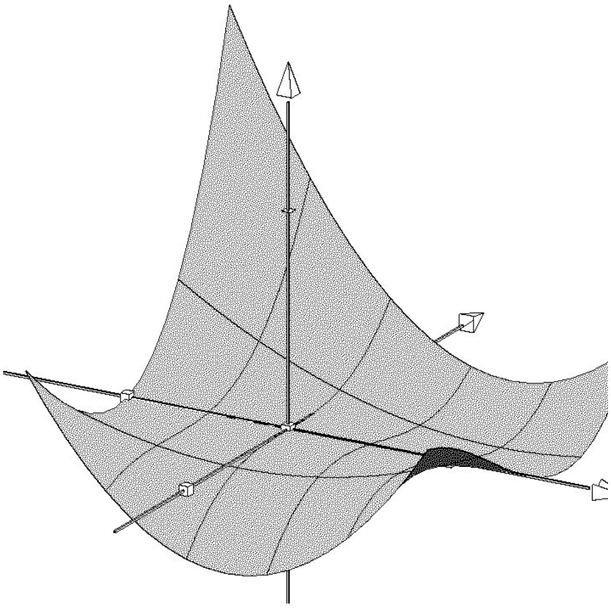
Für jeden dieser drei möglichen Extremwerte wird die <u>hinreichende</u> Bedingung für das Auftreten eines Extremums geprüft:
Hier ist

$$f_{xx}(x,y) = 6 \cdot y^2 \qquad \text{und} \qquad f_{yy}(x,y) = 24 \cdot y - 12 \cdot x + 6 \cdot x^2$$
$$\text{und} \quad f_{xy}(x,y) \quad = \quad f_{yx}(x,y) = -12 \cdot y + 12 \cdot x \cdot y - 6$$

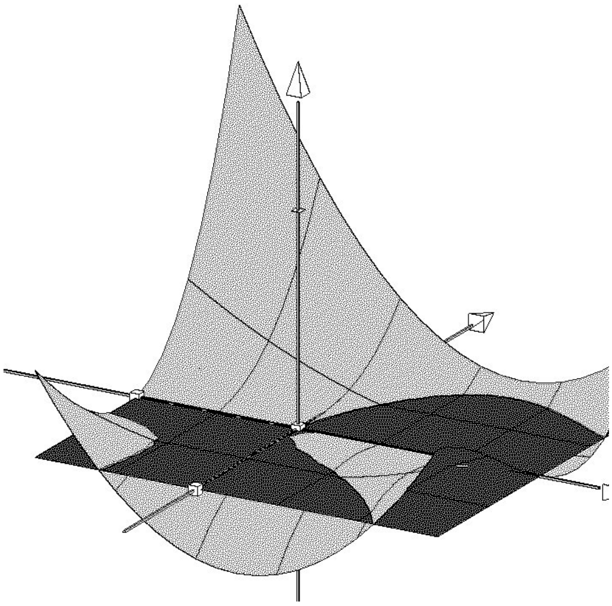
nach (2) also

- <u>möglicher Extremwert $P_1 = (0,0)$:</u>
  Es ist
  $$f_{xx}(0,0) = 0 \quad \text{und} \quad f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = -6 \quad \text{und} \quad f_{yy}(0,0) = 0$$
  und damit
  $$D(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$$
  folglich liegt im Punkt P_1 ein **Sattelpunkt** vor ($f(0,0) = 0$).
- <u>möglicher Extremwert $P_2 = (2,1)$:</u>
  Es ist
  $$f_{xx}(2,1) = 6 \quad \text{und} \quad f_{xy}(2,1) = f_{yx}(2,1) = 6 \quad \text{und} \quad f_{yy}(2,1) = 24$$
  und damit
  $$D(2,1) = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 24 \end{vmatrix} = 108 > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(2,1) > 0$$
  folglich liegt im Punkt P_2 ein **relatives Minimum** vor ($f(2,1) = -8$).
- <u>möglicher Extremwert $P_3 = (-1, -\frac{1}{2})$:</u>
  Es ist
  $$f_{xx}(-1,-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad f_{xy}(-1,-\frac{1}{2}) = f_{yx}(-1,-\frac{1}{2}) = 6 \quad \text{und} \quad f_{yy}(-1,-\frac{1}{2}) = 6$$
  und damit
  $$D(-1,-\frac{1}{2}) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = -27 < 0$$
  folglich liegt im Punkt P_3 ein **Sattelpunkt** vor ($f(-1,-\frac{1}{2}) = \frac{19}{4}$). .

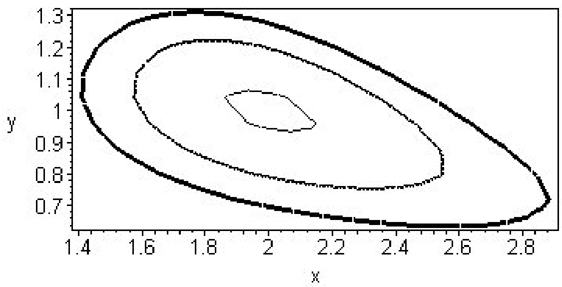
Bilder zu Aufgabe 10.4: $f(x,y) = 4 \cdot y^3 - 6 \cdot x \cdot y^2 + 3 \cdot x^2 \cdot y^2 - 6 \cdot x \cdot y$



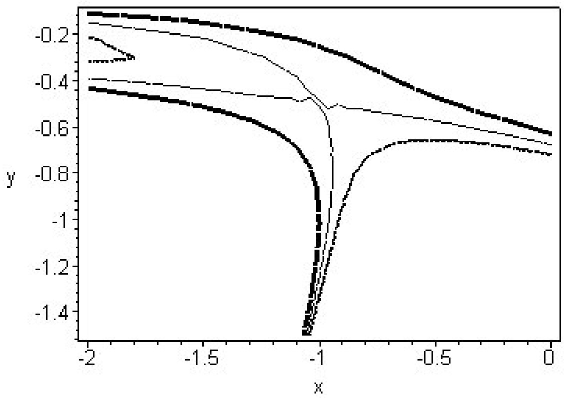
Aufgabe 10.4: Blockbild
$-2 \leq x \leq 3$ und $-2 \leq y \leq 2$



Aufgabe 10.4: Blockbild mit $x - y$-Ebene
$-2 \leq x \leq 3$ und $-2 \leq y \leq 2$



Aufgabe 10.4: Höhenlinien
um das Minimum bei $(2,1)$ mit
$f(2,1) = -8$:
$H = -7.9$, $H = -7.5$, $H = -7$



Aufgabe 10.4: Höhenlinien
in der Umgebung des Punktes
$P_3 = (-1, -0.5)$:
$H = -1.5$, $H = -1.25$ (dünn),
$H = -1$ (dick)

Sattelpunkt $(0,0)$ mit $f(0,0) = 0$.
Sattelpunkt $(-1,-0.5)$ mit $f(-1,-0.5) = -\frac{19}{4}$.

Aufgabe 10.5:

Bestimmen Sie die relativen Extrema der folgenden Funktionen und zeichnen Sie die Fläche jeweils in einer Umgebung möglicher Extrema (also auch von Sattelpunkten).

$$f(x,y) = (x^2 - y^2) \cdot e^{-(x^2)}$$

Lösung 10.5:

Es ist

$$f_x = (2 \cdot x - 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x \cdot y^2) \cdot e^{(-x^2)} \quad \text{und} \quad f_y = -2 \cdot y \cdot e^{(-x^2)}$$

<u>notwendige</u> Bedingung:
Für ein mögliches Extremum (x_e, y_e) muss daher nach (3) gelten

$$0 = (2 \cdot x_e - 2 \cdot x_e^3 + 2 \cdot x_e \cdot y_e^2) \cdot e^{(-x_e^2)} \quad \text{und} \quad 0 = -2 \cdot y_e \cdot e^{(-x_e^2)}$$

also hier

$$\big(x_e = 0 \text{ oder } 1 - x_e^2 + y_e^2 = 0\big) \quad \text{und} \quad (y_e = 0)$$

Damit lauten die Koordinaten der mögliche Extremwerte

$$P_1 = (x_{e1}, y_{e1}) = (0,0) \quad \text{und} \quad P_2 = (x_{e2}, y_{e2}) = (1,0) \quad \text{und} \quad P_3 = (x_{e3}, y_{e3}) = (-1,0)$$

<u>hinreichende</u> Bedingung:
Hier ist

$$f_{xx} = (2 - 10 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 4 \cdot x^4 - 4 \cdot x^2 \cdot y^2) \cdot e^{(-x^2)} \qquad \text{und} \qquad f_{yy} = -2 \cdot e^{(-x^2)}$$
$$\text{und} \quad f_{xy} \quad = \quad f_{yx} = 4 \cdot x \cdot y \cdot e^{(-x^2)}$$

und damit <u>für den Punkt $P_1 = (0,0)$</u>

$$f_{xx}(0,0) \quad = \quad 2 \quad \text{und} \quad f_{yy}(0,0) = -2 \quad \text{und} \quad f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0$$

nach (2) also

$$D(0,0) := \begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

d.h. **im Punkt $\boldsymbol{P_1 = (0,0)}$ besitzt die Fläche einen Sattelpunkt.**

<u>Für die Punkte $P_2 = (1,0)$ und $P_3 = (-1,0)$</u>

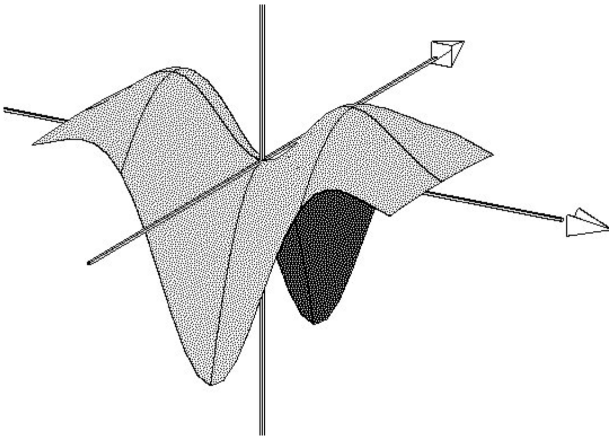
$$f_{xx}(\pm 1,0) \quad = \quad -4 \cdot e^{-1} \quad \text{und} \quad f_{yy}(\pm 1,0) = -2 \cdot e^{-1} \quad \text{und} \quad f_{xy}(\pm 1,0) = f_{yx}(\pm 1,0) = 0$$

nach (2) also

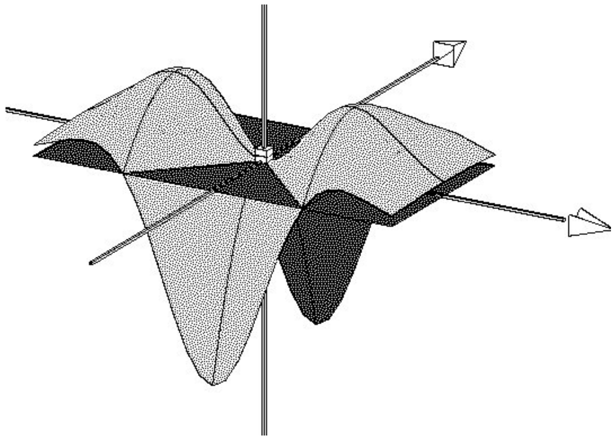
$$D(\pm 1,0) := \begin{vmatrix} f_{xx}(\pm 1,0) & f_{xy}(\pm 1,0) \\ f_{yx}(\pm 1,0) & f_{yy}(\pm 1,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 \cdot e^{-1} & 0 \\ 0 & -2 \cdot e^{-1} \end{vmatrix} = 8 \cdot e^{-2} > 0$$

Wegen $f_{xx}(\pm 1,0) < 0$ gilt daher: **in den Punkten $\boldsymbol{P_2 = (1,0)}$ und $\boldsymbol{P_3 = (-1,0)}$ besitzt die Fläche ein relatives Maximum.** (Es ist $f(1,0) = f(-1,0) = e^{-1}$).

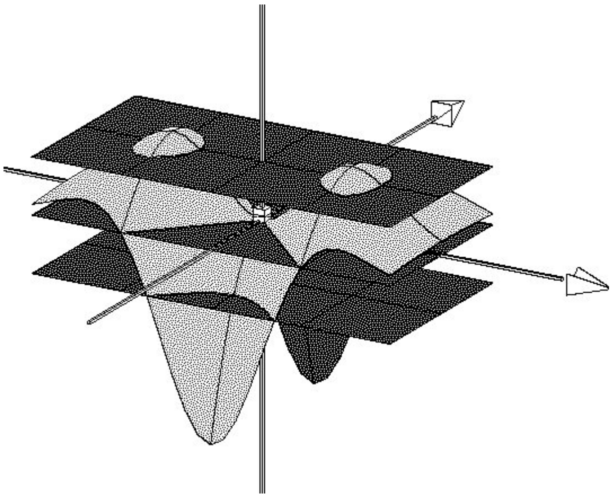
Bilder zu Aufgabe 10.5: $f(x,y) = (x^2 - y^2) \cdot e^{-(x^2)}$



Aufgabe 10.5: Blockbild
$-2 \leq x \leq 2$ und $-1 \leq y \leq 1$



Aufgabe 10.5: Blockbild mit $x-y$-Ebene
$-2 \leq x \leq 2$ und $-1 \leq y \leq 1$



Aufgabe 10.5: Blockbild
$-2 \leq x \leq 2$ und $-1 \leq y \leq 1$
mit Ebenen in Höhen $z = \pm 0.3$ und $z = 0$

```
SKIZZE zur Erzeugung der Bilder zu Aufgabe 10.5

Flaeche z=(x^2-y^2)*exp(-x^2):

x(u,v) = u
y(u,v) = v
z(u,v) = (u^2-v^2)*exp(-u^2)
-2 < u < 2      -1 < v < 1
u_anz = 5  umult = 6
v_anz = 3  vmult = 6
Farbnr. der Linien u=const.:  0 ,
der Linien v=const.: 1
Farbnr. der einen Fl\"achenseite:  32 ,
der anderen: 16


Flaeche z=0:

x(u,v) = u      y(u,v) = v      z(u,v) = 0
-2 < u < 2      -1 < v < 1
u_anz = 5  umult = 1
v_anz = 3  vmult = 1
```