



12 Integralrechnung, Schwerpunkt

Schwerpunkt

Es sei ϱ die Dichte innerhalb der zu untersuchenden Ebene bzw. des zu untersuchenden Raumes. Für den geometrischen Schwerpunkt wird $\varrho = 1$ gesetzt.

a) einer Fläche in der Ebene

Mit $S = (x_s, y_s)$ wollen wir dann den Schwerpunkt der zwischen einer Kurve $y = f(x) \geq 0$ für $a < b$ und $x \in [a, b]$, der x -Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ gelegenen Fläche bezeichnen. so gilt

$$x_s = \frac{\int_a^b \varrho \cdot x \cdot f(x) \cdot dx}{\int_a^b \varrho \cdot f(x) \cdot dx} \quad \text{und} \quad y_s = \frac{\int_a^b \varrho \cdot f^2(x) \cdot dx}{2 \cdot \int_a^b \varrho \cdot f(x) \cdot dx}$$

Entsprechend kann auch bei beliebigen Flächen A der Schwerpunkt bestimmt werden:

$$x_s = \frac{\int_A \varrho \cdot x \cdot dF}{\int_A \varrho \cdot dF} \quad \text{und} \quad y_s = \frac{\int_A \varrho \cdot y \cdot dF}{\int_A \varrho \cdot dF}$$

(Dabei ist $\int_A 1 \cdot dF$ der Flächeninhalt von A).

b) eines (3-dimensionalen) Körpers im Raum:

Für einen beliebigen Körper K im Raum gilt für den Schwerpunkt $S = (x_s, y_s, z_s)$:

$$x_s = \frac{\int_K (x \cdot \varrho) \cdot dV}{\int_K \varrho \cdot dV} \quad \text{und} \quad y_s = \frac{\int_K (y \cdot \varrho) \cdot dV}{\int_K \varrho \cdot dV} \quad \text{und} \quad z_s = \frac{\int_K (z \cdot \varrho) \cdot dV}{\int_K \varrho \cdot dV}$$

(Dabei ist $\int_K 1 \cdot dV$ das Volumen des Körpers K).

(Der Schwerpunkt ist der Massenmittelpunkt.)

Koordinatensysteme (siehe F+H F2)

1. kartesische Koordinaten

(x, y) in der Ebene und (x, y, z) im Raum. - $dF = dx \cdot dy$ und $dV = dx \cdot dy \cdot dz$

2. Polarkoordinaten (in der Ebene)

r Abstand vom Nullpunkt, und φ Winkel gegenüber der positiven x -Achse (in der Ebene). - Umrechnung: siehe F+H Seite 118. - $dF = r \cdot dr \cdot d\varphi$

3. Zylinderkoordinaten (im Raum)

r Abstand vom Nullpunkt, φ Winkel gegenüber der positiven x -Achse in einer Ebene parallel zur x, y -Ebene, und z Höhe. - $dV = r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$

4. Kugelkoordinaten (im 3-D-Raum)

Es sei $P = (x, y, z)$ ein Punkt auf oder in einer Kugel mit dem Radius R .

Mit dem Scheitel $(0, 0, 0)$ (dem Mittelpunkt der Kugel) wird der Winkel zwischen dem „Nordpol“ der Kugel und dem Punkt P durch ϑ bezeichnet (damit hat der Nordpol den Winkel $\vartheta = 0^\circ$ und der Äquator den Winkel $\vartheta = 90^\circ$ - im Gegensatz zu den Geodäten!)

P hat den Abstand r vom Mittelpunkt der Kugel; es ist $r \leq R$.

φ ist der Winkel gegenüber der positiven x -Achse in einer Ebene parallel zur x, y -Ebene. - $x = r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi)$ und $y = r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi)$ und $z = r \cdot \cos(\vartheta)$
 $dV = r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$.

Aufgabe 12.1:

Berechnen Sie das Volumen V und den Schwerpunkt S eines Quaders mit den Seitenlängen $x = 3$, $y = 2$ und $z = 1$.

Lösung Aufgabe 12.1

Diese Aufgabe wird mit drei verschiedenen Ansätzen gelöst:

- a) (Zunächst Bestimmung des Flächeninhaltes bei Schnitt mit einer Ebene $x = x_0$):

$$V = \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=2} 1 \cdot dy \cdot dx = \int_{x=0}^{x=3} [y]_{y=0}^{y=2} \cdot dx = \int_{x=0}^{x=3} 2 \cdot dx = [2 \cdot x]_{x=0}^{x=3} = 6$$

- b) (Zunächst Bestimmung des Flächeninhaltes bei Schnitt mit einer Ebene $y = y_0$):

$$V = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{x=3} 1 \cdot dx \cdot dy = \int_{y=0}^{y=2} [x]_{x=0}^{x=3} \cdot dy = \int_{y=0}^{y=2} 3 \cdot dy = [3 \cdot y]_{y=0}^{y=2} = 6$$

- c) (Zunächst Bestimmung des Flächeninhaltes bei Schnitt mit einer Ebene $z = z_0$):

$$V = \int_{z=0}^{z=1} \int_{x=0}^{x=3} 2 \cdot dx \cdot dz = \int_{z=0}^{z=1} [2 \cdot x]_{x=0}^{x=3} \cdot dz = \int_{z=0}^{z=1} 6 \cdot dz = [6 \cdot z]_{z=0}^{z=1} = 6$$

Für die Bestimmung des geometrischen Schwerpunktes wird nur noch eine Darstellung gerechnet:

Da ϱ unabhängig von (x, y, z) ist, kann $\varrho = 1$ gesetzt werden.

Um den Algorithmus zu testen, wird zunächst der Nenner $\int_K 1 \cdot dV$ berechnet:

$$\begin{aligned} \int_K 1 \cdot dV &= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=2} \int_{z=0}^{z=1} 1 \cdot dz \cdot dy \cdot dx = \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=2} [z]_{z=0}^{z=1} 1 \cdot dy \cdot dx \\ &= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=2} 1 \cdot dy \cdot dx = \int_{x=0}^{x=3} [y]_{y=0}^{y=2} \cdot dx = \int_{x=0}^{x=3} 2 \cdot dx = 6 \end{aligned}$$

Da dieses Rechenverfahren das richtige Ergebnis liefert, versuchen wir es mit den Zählern: Bestimmung des Zählers von x_s :

$$\begin{aligned} \int_K x \cdot dV &= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=2} \int_{z=0}^{z=1} x \cdot dz \cdot dy \cdot dx = \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=2} [x \cdot z]_{z=0}^{z=1} \cdot dy \cdot dx \\ &= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=2} x \cdot dy \cdot dx = \int_{x=0}^{x=3} [x \cdot y]_{y=0}^{y=2} \cdot dx = \int_{x=0}^{x=3} (x \cdot 2) \cdot dx \\ &= 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_{x=0}^{x=3} = 2 \cdot \left(\frac{9}{2} - 0 \right) = 9 \end{aligned}$$

Also ergibt sich $x_s = \frac{9}{6} = 1.5$ - auch dieses Ergebnis ist glaubhaft.

Bestimmung des Zählers von y_s :

$$\begin{aligned} \int_K y \cdot dV &= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=2} \int_{z=0}^{z=1} y \cdot dz \cdot dy \cdot dx = \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=2} [y \cdot z]_{z=0}^{z=1} \cdot dy \cdot dx \\ &= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=2} y \cdot dy \cdot dx = \int_{x=0}^{x=3} \left[\frac{1}{2} \cdot y^2 \right]_{y=0}^{y=2} \cdot dx = \int_{x=0}^{x=3} \left(\frac{4}{2} \right) \cdot dx \\ &= 2 \cdot [x]_{x=0}^{x=3} = 2 \cdot 3 = 6 \end{aligned}$$

Also ergibt sich $y_s = \frac{6}{6} = 1.0$ - auch dieses Ergebnis ist glaubhaft.

Bestimmung des Zählers von z_s :

$$\begin{aligned}\int_K z \cdot dV &= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=2} \int_{z=0}^{z=1} z \cdot dz \cdot dy \cdot dx = \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=2} \left[\frac{1}{2} \cdot z^2 \right]_{z=0}^{z=1} \cdot dy \cdot dx \\ &= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=2} \frac{1}{2} \cdot dy \cdot dx = \int_{x=0}^{x=3} \left[\frac{1}{2} \cot y \right]_{y=0}^{y=2} \cdot dx = \int_{x=0}^{x=3} 1 \cdot dx \\ &= [x]_{x=0}^{x=3} = 3\end{aligned}$$

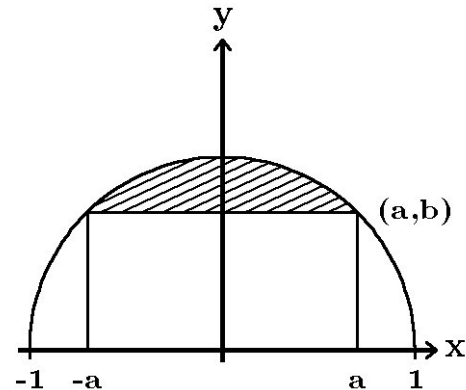
Also ergibt sich $z_s = \frac{3}{6} = 0.5$

- auch dieses Ergebnis ist glaubhaft.

Damit ist $S = \frac{1}{2} \cdot (3, 2, 1)$.

Aufgabe 12.2:

Berechnen Sie in Abhängigkeit von a ($0 < a \leq 1$) die Koordinaten des geometrischen Schwerpunktes des nebenstehend schraffierten Kreisabschnittes A .



Aufgabe 12.2: A = schraffierte Fläche

Lösung Aufgabe 12.2

Gesucht ist der geometrische Schwerpunkt $S = (x_s, y_s)$ des schraffierten Kreisabschnittes A in Abhängigkeit von a ($0 < a \leq 1$).

Es ist $b = \sqrt{1 - a^2}$.

Aus Symmetriegründen ist $x_s = 0$; nach Definition ist $y_s = \frac{\int_A y \cdot dA}{\int_A 1 \cdot dA}$.

Für den Flächeninhalt $\int_A 1 \cdot dA$ ergibt sich:

$$\text{a) } \int_A 1 \cdot dA = \int_{x=-a}^{x=a} \int_{y=\sqrt{1-a^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} 1 \cdot dy \cdot dx = \int_{-a}^a (\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-a^2}) \cdot dx.$$

Nach F+H, Integral Nr. 105, ist $\int \sqrt{1-x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot (x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin(x))$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_A 1 \cdot dA &= \left[\frac{1}{2} \cdot (x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)) \right]_{x=-a}^{x=a} - \sqrt{1-a^2} \cdot [x]_{x=-a}^{x=a} \\ &= a \cdot \sqrt{1-a^2} + \arcsin(a) - 2 \cdot a \cdot \sqrt{1-a^2} \\ &= \arcsin(a) - a \cdot \sqrt{1-a^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int_A 1 \cdot dA &= \int_{y=\sqrt{1-a^2}}^{y=1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} dx \cdot dy = \int_{y=\sqrt{1-a^2}}^{y=1} [x]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \cdot dy \\
 &= \int_{y=\sqrt{1-a^2}}^{y=1} (2 \cdot \sqrt{1-y^2}) \cdot dy
 \end{aligned}$$

Nach F+H, Integral Nr. 105, ist $\int \sqrt{1-y^2} \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot (y \cdot \sqrt{1-y^2} + \arcsin(y))$.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_A 1 \cdot dA &= 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (y \cdot \sqrt{1-y^2} + \arcsin(y)) \right]_{y=\sqrt{1-a^2}}^{y=1} = \left[y \cdot \sqrt{1-y^2} + \arcsin(y) \right]_{y=\sqrt{1-a^2}}^{y=1} \\
 &= \sqrt{1-1} + \arcsin(1) - \sqrt{1-a^2} \cdot \sqrt{1-(1-a^2)} - \arcsin(\sqrt{1-a^2}) \\
 &= \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-a^2} \cdot a - \arcsin(\sqrt{1-a^2}) = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sqrt{1-a^2}) \right) - a \cdot \sqrt{1-a^2}
 \end{aligned}$$

Für den Zähler von y_s erhält man $\int_A y \cdot dA = \int_{-a}^a \int_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y \cdot dy \cdot dx = \int_{-a}^a \left[\frac{1}{2} \cdot y^2 \right]_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx =$

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{-a}^a (a^2 - x^2) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left[a^2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right]_{-a}^a = \frac{2}{3} \cdot a^3.$$

$$\Rightarrow y_s = \frac{2 \cdot a^3}{3 \cdot (\arcsin(a) - a \cdot \sqrt{1-a^2})}.$$

[Für den Fall $a = 1$ ergibt sich für den Schwerpunkt der oberen Hälfte der Einheitskreisfläche:
 $S = (0; \frac{4}{3\pi}) \approx (0; 0,42)$]

Aufgabe 12.3:

Berechnen Sie das Volumen V und den geometrischen Schwerpunkt S eines Zylinders mit dem Radius 2 und der Höhe 3.

Lösung Aufgabe 12.3

Das Volumen V ist (nach Schulwissen) gleich Grundfläche $\cdot$ Höhe, also $V = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12 \cdot \pi$, und der geometrische Schwerpunkt liegt auf der Hauptachse des Zylinders in der halben Höhe.

Diese Aufgabe wird mit Zylinderkoordinaten gelöst:

a)

$$\begin{aligned} V &= \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} 3 \cdot dA = \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} 3 \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr \\ &= \int_{r=0}^{r=2} [3 \cdot r \cdot \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cdot dr = \int_{r=0}^{r=2} (3 \cdot r \cdot 2 \cdot \pi) \cdot dr \\ &= 6 \cdot \pi \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot r^2 \right]_{r=0}^{r=2} = 6 \cdot \pi \cdot \frac{4}{2} = 12 \cdot \pi \end{aligned}$$

(Dieser Wert entspricht tatsächlich dem Volumen, $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 12 \cdot \pi$.)

b)

$$\begin{aligned} V &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} 3 \cdot dA = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} 3 \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left[3 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \right]_{r=0}^{r=2} \cdot d\varphi = 6 \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} 1 \cdot d\varphi = 12 \cdot \pi \end{aligned}$$

Da ϱ unabhängig von (x, y, z) ist, kann $\varrho = 1$ gesetzt werden.

Um den Algorithmus zu testen, wird zunächst der Nenner $\int_K 1 \cdot dV$ berechnet (bei Zylinderkoordinaten gilt $dV = r \cdot dr \cdot d\varphi$):

$$\begin{aligned} \int_K 1 \cdot dV &= \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{z=0}^{z=3} dV \stackrel{\text{Zylinderkoordinaten}}{=} \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{z=0}^{z=3} r \cdot dz \cdot d\varphi \cdot dr \\ &= \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r \cdot [z]_{z=0}^{z=3} \cdot d\varphi \cdot dr = 3 \cdot \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r \cdot d\varphi \cdot dr \\ &= 3 \cdot \int_{r=0}^{r=2} r \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cdot dr = 6 \cdot \pi \cdot \int_{r=0}^{r=2} r \cdot dr = 6 \cdot \pi \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot r^2 \right]_{r=0}^{r=2} \\ &= 6 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 12 \cdot \pi \end{aligned}$$

Da dieses Rechenverfahren das richtige Ergebnis liefert, versuchen wir es mit den Zählern:

Bestimmung des Zählers von $x_s = r \cdot \cos(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
 \int_K x \cdot dV &= \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \int_{z=0}^{z=3} x \cdot dV \\
 &= \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \int_{z=0}^{z=3} (r \cdot \cos(\varphi)) \cdot \underbrace{r \cdot dz \cdot d\varphi \cdot dr}_{\text{Zylinderkoordinaten}} \\
 &= \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} (r^2 \cdot \cos(\varphi)) \cdot [z]_{z=0}^{z=3} \cdot d\varphi \cdot dr \\
 &= 3 \cdot \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} (r^2 \cdot \cos(\varphi)) \cdot d\varphi \cdot dr \\
 &= 3 \cdot \int_{r=0}^{r=2} r^2 \cdot [\sin(\varphi)]_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \cdot dr = 3 \cdot \int_{r=0}^{r=2} r^2 \cdot (\sin(2\cdot\pi) - \sin(0)) \cdot dr = 0
 \end{aligned}$$

Also ergibt sich $x_s = 0$ - auch dieses Ergebnis ist glaubhaft.

Bestimmung des Zählers von $y_s = r \cdot \sin(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
 \int_K y \cdot dV &= \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \int_{z=0}^{z=3} y \cdot dV \\
 &= \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \int_{z=0}^{z=3} \left(\underbrace{r \cdot \sin(\varphi)}_y \right) \cdot \underbrace{r \cdot dz \cdot d\varphi \cdot dr}_{\text{Zylinderkoordinaten}} \\
 &= \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} (r^2 \cdot \sin(\varphi)) \cdot [z]_{z=0}^{z=3} \cdot d\varphi \cdot dr \\
 &= 3 \cdot \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} (r^2 \cdot \sin(\varphi)) \cdot d\varphi \cdot dr \\
 &= 3 \cdot \int_{r=0}^{r=2} r^2 \cdot [-\cos(\varphi)]_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \cdot dr = 3 \cdot \int_{r=0}^{r=2} r^2 \cdot (-\cos(2\cdot\pi) + \cos(0)) \cdot dr = 0
 \end{aligned}$$

Also ergibt sich $y_s = 0$ - auch dieses Ergebnis ist glaubhaft.

Bestimmung des Zählers von z_s :

$$\begin{aligned}
 \int_K z \cdot dV &= \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \int_{z=0}^{z=3} z \cdot dV \\
 &= \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \int_{z=0}^{z=3} z \cdot \underbrace{r \cdot dz \cdot d\varphi \cdot dr}_{\text{Zylinderkoordinaten}} \\
 &= \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} r \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot z^2 \right]_{z=0}^{z=3} \cdot d\varphi \cdot dr = \frac{9}{2} \cdot \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} r \cdot d\varphi \cdot dr \\
 &= \frac{9}{2} \cdot \int_{r=0}^{r=2} r \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \cdot dr = 9 \cdot \pi \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot r^2 \right]_{r=0}^{r=2} = 18 \cdot \pi
 \end{aligned}$$

Also ergibt sich $z_s = \frac{18 \cdot \pi}{12 \cdot \pi} = 1.5$ - auch dieses Ergebnis ist glaubhaft.

Damit ist $S = \frac{1}{2} \cdot (0, 0, 3)$.

Aufgabe 12.4 Stehaufmännchen):

Ein Stehaufmännchen ist

- aus einer hölzernen **Kegelspitze** Ho (rot) mit einer gesuchten Dichte ϱ_{Ho}
- aus einem eisernen **Kegel** $Ei1$ (violett) mit der Dichte $\varrho_{Ei} = 7 \frac{g}{cm^3}$
- aus einem eisernen **Kugelsektor** $Ei2$ (blau) mit der Dichte $\varrho_{Ei} = 7 \frac{g}{cm^3}$

zusammengesetzt (mit einem glatten Übergang zwischen Kegel und Kugelabschnitt).

Die Gesamthöhe beträgt das Dreifache des Kugelradius R_{Ei} .

Welche Dichte ϱ_{Ho} darf das Holz höchstens haben, damit das Männchen wirklich aufsteht?

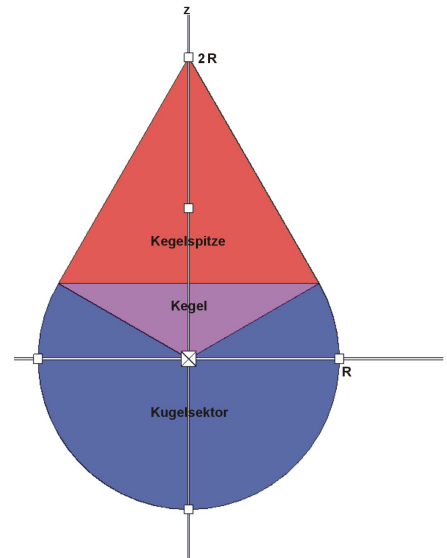


Bild 12.4.1: Stehaufmännchen

Bemerkung zur Physik: Wenn

- z_{Ho} die z -Komponente des Schwerpunktes der Masse m_{Ho} der Kegelspitze ist und
 - z_{Ei1} die z -Komponente des Schwerpunktes der Masse m_{Ei1} des Kegels ist und
 - z_{Ei2} die z -Komponente des Schwerpunktes der Masse m_{Ei2} des Kugelsektors ist,
- dann ist die z -Komponente z_{ges} der drei Massen $m_{Ho} + m_{Ei1} + m_{Ei2}$ gegeben durch

$$z_{ges} = \frac{z_{Ho} \cdot m_{Ho} + z_{Ei1} \cdot m_{Ei1} + z_{Ei2} \cdot m_{Ei2}}{m_{Ho} + m_{Ei1} + m_{Ei2}} \quad (1)$$

Das Stehaufmännchen steht „wirklich“ auf, wenn $z_{ges} < z_{Ei2}$, also hier $z_{ges} < 0$ ist.

Lösung von Aufgabe 12.4:**Kegelspitze Ho (rot):**

Aus der Schule ist bekannt. Das Volumen V_{Ho} eines Kegels ist gleich $\frac{1}{3}$ des Volumens des entsprechenden Zylinders.

Hier ist der Radius R_{Ho} des Kegels gegeben durch $R_{Ho} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot R$

und die Höhe H_{Ho} durch $H_{Ho} = \frac{3}{2} \cdot R$.

Also wäre das entsprechende

$$\text{Zylindervolumen} = V_Z = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = \pi \cdot (R_{Ho})^2 \cdot H_{Ho} = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot R\right)^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot R$$

oder $V_Z = \pi \cdot \frac{9}{8} \cdot R^3$.

Damit beträgt nach dem Schulwissen das

$$\text{Kegelvolumen} = V_{Ho} = \frac{1}{3} \cdot V_Z = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{9}{8} \cdot R^3 = \pi \cdot \frac{3}{8} \cdot R^3$$

Nun soll der Schwerpunkt $S = (x_S, y_S, z_S)$ dieses Kegels bestimmt werden.

Aus Symmetriegründen ist ersichtlich: $x_S = y_S = 0$, d.h. es ist nur z_S auszurechnen.

Nach Definition ist

$$z_{Ho} = \frac{\int_{Ho} \varrho_{Ho} \cdot z \cdot dHo}{\int_{Ho} \varrho_{Ho} \cdot dHo}$$

Da hier ϱ_{Ho} eine Konstante ist, gilt hier

$$z_{Ho} = \frac{\int_{Ho} z \cdot dHo}{\int_{Ho} 1 \cdot dHo} \quad (2)$$

Um unser Rechenverfahren zu testen, berechnen wir zunächst den Nenner - denn hier kennen wir das Ergebnis.

Zur Geometrie:

Wir wollen Zylinderkoordinaten verwenden, d.h. wir wollen die Geometrie durch

1. eine Achse in radialer Richtung r
2. eine Achse in Umfangsrichtung φ
3. eine Achse in Richtung der Höhe z

beschreiben. (Die ersten beiden Achsen haben wir bereits als **Polarkoordinaten** kennengelernt.)

In Umfangsrichtung ist $0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi$.

In radialer Richtung ist $0 \leq r \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot R$.

Die Höhe z ist von r abhängig:

- wenn $r = 0$ ist, soll $z = \frac{3}{2} \cdot R$ sein,
- wenn $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot R$ ist, soll $z = 0$ sein,
- zwischen $r = 0$ und $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot R$ ist die Abhängigkeit von z linear.

Also ist

$$z = \frac{3}{2} \cdot R - \sqrt{3} \cdot r$$

Damit kann der Nenner N_{Ho} von (2) als Dreifachintegral berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 N_{Ho} &= \int_{Ho} 1 \cdot dHo = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot R} \int_{z=0}^{z=\frac{3}{2}\cdot R - \sqrt{3}\cdot r} \underbrace{1}_{\text{Dichte}} \cdot \underbrace{r \cdot dz \cdot dr \cdot d\varphi}_{\text{Zylinderkoordinaten}} \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot R} r \cdot [z]_{z=0}^{z=\frac{3}{2}\cdot R - \sqrt{3}\cdot r} \cdot dr \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot R} r \cdot \frac{3}{2} \cdot R - \sqrt{3} \cdot r^2 \cdot dr \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left[\frac{3}{4} \cdot r^2 \cdot R - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot r^3 \right]_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot R} \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot R^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot R^3 \right) \cdot d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} R^3 \cdot \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{8} \right) \cdot d\varphi \\
 &= 2 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot R^3
 \end{aligned}$$

(Dieses ist genau das Volumen der Kegelspitze - dieses Ergebnis hatten wir auch erwartet.)

Wenn nun die Kegelspitze die Dichte ϱ_{Ho} besitzt, so ist seine

$$\text{Masse} \quad m_{Ho} = \varrho_{Ho} \cdot V_{Ho} = \varrho_{Ho} \cdot \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot R^3 [g] \quad (3)$$

Nun kann der Zähler Z_{Ho} von z_{Ho} (siehe Gleichung (2)) nach dem gleichen Verfahren wie der Nenner berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 Z_{Ho} &= \int_{Ho} z \cdot dHo = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot R} \int_{z=0}^{z=\frac{3}{2}\cdot R - \sqrt{3}\cdot r} \underbrace{z}_{\text{Dichte}} \cdot \underbrace{r \cdot dz \cdot dr \cdot d\varphi}_{\text{Zylinderkoordinaten}} \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot R} r \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot z^2 \right]_{z=0}^{z=\frac{3}{2}\cdot R - \sqrt{3}\cdot r} 1 \cdot dr \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot R} \frac{1}{2} \cdot r \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot R - \sqrt{3} \cdot r \right)^2 \cdot dr \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot R} \left(\frac{9}{8} \cdot R^2 \cdot r - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot R \cdot r^2 + 3 \cdot r^3 \right) \cdot dr \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left[\frac{9}{16} \cdot R^2 \cdot r^2 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot R \cdot r^3 + \frac{3}{4} \cdot r^4 \right]_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot R} \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} R^4 \cdot \left(\frac{9}{16} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{16} \right) \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} R^4 \cdot \left(\frac{27}{64} - \frac{9}{16} + \frac{27}{128} \right) \cdot d\varphi \\
 &= 2 \cdot \pi \cdot R^4 \cdot \frac{9}{128} = \frac{9}{64} \cdot \pi \cdot R^4
 \end{aligned}$$

Daher ist $z_{Ho} = \frac{Z_{Ho}}{N_{Ho}} = \frac{\frac{9}{64} \cdot \pi \cdot R^4}{\frac{3}{8} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{9 \cdot 8}{64 \cdot 3} \cdot R = \frac{3}{8} \cdot R$.

Damit gilt:

Der Schwerpunkt der Kegelspitze **Ho** mit der Höhe $H_{Ho} = \frac{3}{2} \cdot R$ und dem Radius $R_{Ho} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot R$ hat die Koordinaten $(x_{Ho}, y_{Ho}, z_{Ho}) = (0, 0, \frac{3}{8} \cdot R)$

Da die Kegelspitze nicht in der Höhe $z = 0$, sondern in der Höhe $z = \frac{1}{2} \cdot R$ beginnt, ist

$$z_{Ho} = \frac{1}{2} \cdot R + \frac{3}{8} \cdot R = \frac{7}{8} \cdot R \quad (4)$$

Kegel $Ei1$ (violett) mit der Dichte $\varrho_{Ei} = 7 \frac{g}{cm^3}$:

Hier ist die untere Begrenzung der Kegelfläche gegeben durch die Gerade

$$z = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot r$$

Da auch ϱ_{Ei} eine Konstante ist, gilt hier

$$z_{Ei1} = \frac{\int_{Ei1} z \cdot dEi1}{\int_{Ei1} 1 \cdot dEi1} \quad \text{sowie} \quad z_{Ei2} = \frac{\int_{Ei2} z \cdot dEi2}{\int_{Ei2} 1 \cdot dEi2} \quad (5)$$

Zunächst wird das Volumen V_{Ei1} und die Masse m_{Ei1} als Dreifachintegral berechnet:

$$\begin{aligned} N_{Ei1} &= \int_{Ei1} \varrho_{Ei} \cdot dEi1 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot R} \int_{z=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot r}^{z=\frac{1}{2}\cdot R} \underbrace{\varrho_{Ei}}_{\text{Dichte}} \cdot \underbrace{r \cdot dz \cdot dr \cdot d\varphi}_{\text{Zylinderkoordinaten}} \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot R} \varrho_{Ei} \cdot [r \cdot z]_{z=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot r}^{z=\frac{1}{2}\cdot R} \cdot dr \cdot d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot R} \varrho_{Ei} \cdot \left(r \cdot \frac{1}{2} \cdot R - r^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \right) \cdot dr \cdot d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \varrho_{Ei} \cdot \left[r^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot R - \frac{1}{9} \cdot r^3 \cdot \sqrt{3} \right]_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot R} \cdot d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \varrho_{Ei} \cdot \left(\frac{3}{16} \cdot R^3 - \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot R^3 \right) \cdot d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \varrho_{Ei} \cdot R^3 \cdot \frac{1}{16} \cdot d\varphi = \varrho_{Ei} \cdot R^3 \cdot \frac{1}{16} \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \\ &= \varrho_{Ei} \cdot \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot R^3 \end{aligned}$$

Das Volumen des Kegels beträgt also $\text{Volumen } V_{Ei1} = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot R^3 \text{ cm}^3$

Die Masse des Kegels beträgt also

$$\text{Masse } m_{Ei1} = 7 \cdot V_{Ei1} = \frac{7}{8} \cdot \pi \cdot R^3 [g] \quad (6)$$

Nun kann der Zähler von z_{Ei1} (siehe Gleichung (5)) nach dem gleichen Verfahren wie der Nenner berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 Z_{Ei1} &= \int_{Ei1} \varrho_{Ei1} \cdot z \cdot dEi1 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot R} \int_{z=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot r}^{z=\frac{1}{2}\cdot R} \varrho_{Ei} \cdot z \cdot \underbrace{r \cdot dz \cdot dr \cdot d\varphi}_{\text{Zylinderkoordinaten}} \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot R} \varrho_{Ei} \cdot r \cdot \frac{1}{2} \cdot [z^2]_{z=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot r}^{z=\frac{1}{2}\cdot R} \cdot dr \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot R} \varrho_{Ei} \cdot r \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \cdot R \right)^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot r \right)^2 \right) \cdot dr \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot R} \varrho_{Ei} \cdot r \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot R^2 - \frac{1}{3} \cdot r^2 \right) \cdot dr \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot R} \varrho_{Ei} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot R^2 \cdot r - \frac{1}{6} \cdot r^3 \right) \cdot dr \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \varrho_{Ei} \cdot \left[\frac{1}{16} \cdot R^2 \cdot r^2 - \frac{1}{24} \cdot r^4 \right]_{r=0}^{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot R} \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \varrho_{Ei} \cdot R^4 \cdot \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{24} \cdot \frac{9}{16} \right) \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} \varrho_{Ei} \cdot R^4 \cdot \frac{3}{128} \cdot d\varphi = \varrho_{Ei} \cdot R^4 \cdot \frac{3}{128} \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\cdot\pi} = \varrho_{Ei} \cdot R^4 \cdot \frac{3}{64} \cdot \pi
 \end{aligned}$$

Nun ist daher

$$z_{Ei1} = \frac{Z_{Ei1}}{N_{Ei1}} = \frac{\varrho_{Ei} \cdot R^4 \cdot \frac{3}{64} \cdot \pi}{\varrho_{Ei} \cdot \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{3}{8} \cdot R \quad (7)$$

Damit gilt:

Der Schwerpunkt des Kegels Ei1 mit der Höhe $H_{Ho} = \frac{1}{2} \cdot R$
 und dem Radius $R_{Ho} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot R$
 hat die Koordinaten $(x_{Ei1}, y_{Ei1}, z_{Ei1}) = (0, 0, \frac{3}{8} \cdot R)$

Kugelsektor $Ei2$ (blau) mit der Dichte $\varrho_{Ei} = 7 \frac{g}{cm^3}$:

Zur Geometrie:

Wir wollen Kugelkoordinaten verwenden, d.h. wir wollen die Geometrie durch

1. einen Winkel ϑ vom Nordpol bis zum Südpol
2. einen Winkel φ in Umfangsrichtung
3. einen Abstand r vom Kugelmittelpunkt

beschreiben.

In Umfangsrichtung ist $0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi$.

Vom Nordpol zum Südpol ist $\frac{\pi}{3} \leq \vartheta \leq \pi$.

Für den Abstand vom Kugelmittelpunkt gilt $0 \leq r \leq R$

Damit kann der Nenner N_{Ei2} von (5) als Dreifachintegral berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 N_{Ei2} &= \int_{Ei2} \varrho_{Ei} \cdot dEi2 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2 \cdot \pi} \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \int_{r=0}^{r=R} \underbrace{\varrho_{Ei}}_{\text{Dichte}} \cdot \underbrace{r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi}_{\text{Kugelkoordinaten}} \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2 \cdot \pi} \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \int_{r=0}^{r=R} \varrho_{Ei} \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 &= \varrho_{Ei} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=2 \cdot \pi} \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \left[\frac{1}{3} \cdot r^3 \right]_{r=0}^{r=R} \cdot \sin(\vartheta) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 &= \varrho_{Ei} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=2 \cdot \pi} \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \frac{1}{3} \cdot R^3 \cdot \sin(\vartheta) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 &= \varrho_{Ei} \cdot \frac{1}{3} \cdot R^3 \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=2 \cdot \pi} [-\cos(\vartheta)]_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \cdot d\varphi \\
 &= \varrho_{Ei} \cdot \frac{1}{3} \cdot R^3 \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=2 \cdot \pi} \left(-\cos(\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \cdot d\varphi = \varrho_{Ei} \cdot \frac{1}{3} \cdot R^3 \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=2 \cdot \pi} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \cdot d\varphi \\
 &= \varrho_{Ei} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot R^3 \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2 \cdot \pi} = \varrho_{Ei} \cdot \pi \cdot R^3
 \end{aligned}$$

Also ist

$$\text{Masse} \quad m_{Ei2} = \varrho_{Ei} \cdot \pi \cdot R^3 = 7 \cdot \pi \cdot R^3 [g] \quad (8)$$

Nun kann der Zähler Z_{Ei2} von z_{Ei2} nach dem gleichen Verfahren wie der Nenner berechnet werden, wobei zu berücksichtigen ist, dass bei Kugelkoordinaten $z = r \cdot \cos(\vartheta)$ ist:

$$\begin{aligned}
 Z_{Ei2} &= \int_{Ei2} z \cdot dEi2 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \int_{r=0}^{r=R} \underbrace{\varrho_{Ei}}_{\text{Dichte}} \cdot z \cdot \underbrace{r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi}_{\text{Kugelkoordinaten}} \\
 &= \varrho_{Ei} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \int_{r=0}^{r=R} \underbrace{r \cdot \cos(\vartheta)}_{z=r \cdot \cos(\vartheta)} \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 &= \varrho_{Ei} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \left[\frac{1}{4} \cdot r^4 \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta) \right]_{r=0}^{r=R} \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 &= \varrho_{Ei} \cdot \frac{1}{4} \cdot R^4 \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \cos(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 &= \varrho_{Ei} \cdot \frac{1}{4} \cdot R^4 \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sin^2(\vartheta)}_{F+H,218} \right]_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \cdot d\varphi \\
 &= \varrho_{Ei} \cdot \frac{1}{8} \cdot R^4 \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\sin^2(\pi) - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \cdot d\varphi \\
 &= -\varrho_{Ei} \cdot \frac{1}{8} \cdot R^4 \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{3}{4} \cdot d\varphi = -\varrho_{Ei} \cdot \frac{3}{32} \cdot R^4 \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = -\varrho_{Ei} \cdot \frac{3}{16} \cdot \pi \cdot R^4
 \end{aligned}$$

Daher ist

$$z_{Ei2} = \frac{Z_{Ei2}}{N_{Ei2}} = \frac{-\varrho_{Ei} \cdot \frac{3}{16} \cdot \pi \cdot R^4}{\varrho_{Ei} \cdot \pi \cdot R^3} = -\frac{3}{16} \cdot R \quad (9)$$

Nach (1) ist nun

$$\begin{aligned}
 z_{ges} &= \frac{z_{Ho} \cdot m_{Ho} + z_{Ei1} \cdot m_{Ei1} + z_{Ei2} \cdot m_{Ei2}}{m_{Ho} + m_{Ei1} + m_{Ei2}} \\
 &= \frac{\frac{7}{8} \cdot R \cdot \varrho_{Ho} \cdot \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot R^3 + \frac{3}{8} \cdot R \cdot \frac{7}{8} \cdot \pi \cdot R^3 - \frac{3}{16} \cdot R \cdot 7 \cdot \pi \cdot R^3}{\varrho_{Ho} \cdot \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot R^3 + \frac{7}{8} \cdot \pi \cdot R^3 + 7 \cdot \pi \cdot R^3} \\
 &= R \cdot \frac{\frac{7}{8} \cdot \varrho_{Ho} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{8} - \frac{3}{16} \cdot 7}{\varrho_{Ho} \cdot \frac{3}{8} + \frac{7}{8} + 7} = R \cdot \frac{\frac{21}{64} \cdot \varrho_{Ho} + \frac{21}{64} - \frac{21}{16}}{\varrho_{Ho} \cdot \frac{3}{8} + \frac{63}{8}} \\
 &= R \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{21 \cdot \varrho_{Ho} + 21 - 84}{\varrho_{Ho} \cdot 3 + 63} = R \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{21 \cdot \varrho_{Ho} - 63}{\varrho_{Ho} \cdot 3 + 63}
 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\boxed{z_{ges} < 0 \quad , \quad \text{falls} \quad 21 \cdot \varrho_{Ho} < 63 \quad \text{oder} \quad \varrho_{Ho} < 3}$$

Diese Bedingung ist für alle bekannten Holzarten erfüllt.

Ergänzung 1:

Was wäre, wenn für den Kugelsektor gelten würde

Kugelsektor $Ei2$ (blau) mit der Dichte $\varrho_{Ei3} = (7 - z) \frac{g}{cm^3}$?

Dann müssen wir bereits im Nenner berücksichtigen, dass in Kugelkoordinaten gilt

$$z = r \cdot \cos(\vartheta)$$

Es ist (nach MAPLE, d.h. nicht selbst gerechnet!):

$$\begin{aligned} N_{Ei3} &= \int_{Ei2} \varrho_{Ei} \cdot dEi2 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \int_{r=0}^{r=R} \underbrace{\varrho_{Ei3}}_{\text{Dichte}} \cdot \underbrace{r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi}_{\text{Kugelkoordinaten}} \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \int_{r=0}^{r=R} \underbrace{(7 - r \cdot \cos(\vartheta))}_{z=r \cdot \cos(\vartheta)} \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \left(-\frac{1}{4} \cdot \cos(\vartheta) \cdot R^4 + \frac{7}{3} \cdot R^3 \right) \cdot \sin(\vartheta) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\frac{3}{32} \cdot R^4 + \frac{7}{2} \cdot R^3 \right) \cdot d\varphi \\ &= \frac{3}{16} \cdot \pi \cdot R^4 + 7 \cdot \pi \cdot R^3 \end{aligned}$$

Also ist

$$\text{Masse} \quad m_{Ei3} = \frac{3}{16} \cdot \pi \cdot R^4 + 7 \cdot \pi \cdot R^3 \quad (10)$$

und für den Zähler Z_{Ei3} von z_{Ei3} gilt nach dem gleichen Verfahren wie für den Nenner:

$$\begin{aligned} Z_{Ei3} &= \int_{Ei3} z \cdot dEi3 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \int_{r=0}^{r=R} \underbrace{(7 - z)}_{\text{Dichte}} \cdot \underbrace{z \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi}_{\text{Kugelkoordinaten}} \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \int_{r=0}^{r=R} \underbrace{(7 - r \cdot \cos(\vartheta)) \cdot r \cdot \cos(\vartheta)}_{z=r \cdot \cos(\vartheta)} \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\pi} \left(-\frac{1}{5} \cdot \cos^2(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta) \cdot R^5 + \frac{7}{4} \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta) \cdot R^4 \right) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(-\frac{3}{40} \cdot R^5 - \frac{21}{32} \cdot R^4 \right) \cdot d\varphi \\ &= -\frac{3}{20} \cdot \pi \cdot R^5 - \frac{21}{16} \cdot \pi \cdot R^4 \end{aligned}$$

Daher ist

$$z_{Ei3} = \frac{Z_{Ei3}}{N_{Ei3}} = \frac{-\frac{3}{20} \cdot \pi \cdot R^5 - \frac{21}{16} \cdot \pi \cdot R^4}{\frac{3}{16} \cdot \pi \cdot R^4 + 7 \cdot \pi \cdot R^3}$$

Für $R = 1$ ist dann $z_{Ei3} = -\frac{117}{575} \approx -0.203$.

Ergänzung 2:

Wo läge der Schwerpunkt, wenn die Dichte in einer vollständigen Kugel ($Ei4$) mit Radius R gemäß $\varrho_{Ei4} = (7 - z) \frac{g}{cm^3}$ verteilt wäre?

$$\begin{aligned}
 N_{Ei4} &= \int_{Ei4} \varrho_{Ei} \cdot dEi4 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \int_{r=0}^{r=R} \underbrace{\varrho_{Ei4}}_{\text{Dichte}} \cdot \underbrace{r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi}_{\text{Kugelkoordinaten}} \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \int_{r=0}^{r=R} (7 - r \cdot \cos(\vartheta)) \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \left(-\frac{1}{4} \cdot \cos(\vartheta) \cdot R^4 + \frac{7}{3} \cdot R^3 \right) \cdot \sin(\vartheta) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{14 \cdot R^3}{3} \cdot d\varphi = \frac{28 \cdot R^3 \cdot \pi}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{Ei4} &= \int_{Ei4} \varrho_{Ei} \cdot z \cdot dEi4 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \int_{r=0}^{r=R} \underbrace{\varrho_{Ei4}}_{\text{Dichte}} \cdot z \cdot \underbrace{r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi}_{\text{Kugelkoordinaten}} \\
 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \int_{r=0}^{r=R} (7 - r \cdot \cos(\vartheta)) \cdot r \cdot \cos(\vartheta) \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 &= -\frac{4 \cdot R^5 \cdot \pi}{15}
 \end{aligned}$$

Daher ist

$$z_{Ei4} = \frac{Z_{Ei4}}{N_{Ei4}} = -\frac{R^2}{35}$$

Für $R = 1$ ist dann $z_{Ei4} = -\frac{1}{35} \approx -0.0286$.

Aufgabe 12.5: (REP BEI 13.44)

Berechnen Sie den Flächeninhalt F und den geometrischen Schwerpunkt der Fläche zwischen der Kurve $y = x^2$, der x -Achse und den Geraden $x = -1$ und $x = 2$.

Aufgabe 12.6: (REP BEI 13.45)

Berechnen Sie den Flächeninhalt F und den geometrischen Schwerpunkt der Fläche zwischen der Kurve $y = \cos(x)$ und der x -Achse für $\frac{\pi}{2} \leq x \leq 3 \cdot \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 12.7:

Aus der Vektorrechnung ist bekannt: Der Schwerpunkt $\vec{s}_{\vec{a}, \vec{b}}$ des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks ist

$$\vec{s}_{\vec{a}, \vec{b}} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

Andererseits ist aus der Koordinatengeometrie bekannt, dass der Schwerpunkt S_K des durch die drei Punkte (x_1, y_1) , (x_2, y_2) und (x_3, y_3) bestimmten Dreiecks lautet:

$$S_K = (x_s, y_s) := \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

Zeigen Sie, dass bei „richtigen“ Bezeichnungen $\vec{s}_{\vec{a}, \vec{b}}$ und S_K den gleichen Schwerpunkt bezeichnen.

Lösung von Aufgabe 12.7:

Wir teilen die Lösung in zwei Teile: zunächst berechnen wir den Schwerpunkt nach der in der Aufgabe genannten Formel und dann untersuchen wir, welches Ergebnis wir bei Anwendung der Integralrechnung erhalten.

1. Schwerpunkt-Formel aus der Aufgabenstellung

Es wird (x_1, y_1) als Nullpunkt betrachtet. Dann ist

$\vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ und $\vec{b} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ und $\vec{s}_{\vec{a}, \vec{b}} = (x_s - x_1, y_s - y_1)$ gesetzt.

Dann ist $\vec{a} + \vec{b} = (x_2 + x_3 - 2 \cdot x_1, y_2 + y_3 - 2 \cdot y_1)$ und daher

$$\begin{aligned}\vec{s}_{\vec{a}, \vec{b}} &= \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3} \cdot (x_2 + x_3 - 2 \cdot x_1, y_2 + y_3 - 2 \cdot y_1) \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot (x_2 + x_3 - 2 \cdot x_1), \frac{1}{3} \cdot (y_2 + y_3 - 2 \cdot y_1) \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 - 3 \cdot x_1), \frac{1}{3} \cdot (y_1 + y_2 + y_3 - 3 \cdot y_1) \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3) - x_1, \frac{1}{3} \cdot (y_1 + y_2 + y_3) - y_1 \right) = (x_s - x_1, \frac{1}{3} \cdot (y_1 + y_2 + y_3) - y_1)\end{aligned}$$

2. Schwerpunkt-Formel aus der Integralrechnung

Wir betrachten wieder (x_1, y_1) als Nullpunkt: $(x_1, y_1) = (0, 0)$. Zusätzlich setzen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $y_2 = 0$. Nun berechnen wir

$$x_s = \frac{\int_F x \cdot dF}{\int_F 1 \cdot dF}$$

Fall $0 \leq x_3 < x_2$ und $y_2 > 0$:

$$\begin{aligned}\int_F 1 \cdot dF &= \left| \int_{x=0}^{x=x_3} \int_{y=0}^{y=\frac{y_3}{x_3} \cdot x} 1 \cdot dy \cdot dx \right| + \left| \int_{x=x_3}^{x=x_2} \int_{y=0}^{y=-\frac{y_3}{x_2-x_3} \cdot x + \frac{x_2 \cdot y_3}{x_2-x_3}} 1 \cdot dy \cdot dx \right| \\ &= \left| \int_{x=0}^{x=x_3} [y]_{y=0}^{y=\frac{y_3}{x_3} \cdot x} \cdot dx \right| + \left| \int_{x=x_3}^{x=x_2} [y]_{y=0}^{y=-\frac{y_3}{x_2-x_3} \cdot x + \frac{x_2 \cdot y_3}{x_2-x_3}} \cdot dx \right| \\ &= \left| \int_{x=0}^{x=x_3} \frac{y_3}{x_3} \cdot x \cdot dx \right| + \left| \int_{x=x_3}^{x=x_2} -\frac{y_3}{x_2-x_3} \cdot x + \frac{x_2 \cdot y_3}{x_2-x_3} \cdot dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{y_3}{x_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_{x=0}^{x=x_3} \right| + \left| \left[-\frac{y_3}{x_2-x_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x_2 \cdot y_3}{x_2-x_3} \cdot x \right]_{x=x_3}^{x=x_2} \right| \\ &= \left| \frac{y_3}{x_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x_3^2 \right| + \left| -\frac{y_3}{x_2-x_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x_2^2 - x_3^2) + \frac{x_2 \cdot y_3}{x_2-x_3} \cdot (x_2 - x_3) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \cdot y_3 \cdot x_3 \right| + \left| -\frac{y_3}{x_2-x_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x_2^2 - x_3^2) + \frac{x_2 \cdot y_3}{x_2-x_3} \cdot (x_2 - x_3) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \cdot y_3 \cdot x_3 \right| + \left| -\frac{1}{2} \cdot y_3 \cdot (x_2 + x_3) + x_2 \cdot y_3 \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \cdot y_3 \cdot x_3 \right| + \left| \frac{1}{2} \cdot y_3 \cdot (x_2 - x_3) \right| \\ &\quad \text{Wegen } x_3 < x_2 \text{ und } y_3 > 0 \text{ und } x_3 > 0 \text{ also} \\ &= \frac{1}{2} \cdot y_3 \cdot x_3 + \frac{1}{2} \cdot y_3 \cdot (x_2 - x_3) = \frac{1}{2} \cdot x_2 \cdot y_3\end{aligned}$$

D.h. der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt $F = \frac{1}{2} \cdot x_2 \cdot y_3$

$$\begin{aligned}
\int_F x \cdot dF &= \left(\int_{x=0}^{x=x_3} \int_{y=0}^{y=\frac{y_3}{x_3} \cdot x} x \cdot dy \cdot dx \right) + \left(\int_{x=x_3}^{x=x_2} \int_{y=0}^{y=-\frac{y_3}{x_2-x_3} \cdot x + \frac{x_2 \cdot y_3}{x_2-x_3}} x \cdot dy \cdot dx \right) \\
&= \left(\int_{x=0}^{x=x_3} x \cdot [y]_{y=0}^{y=\frac{y_3}{x_3} \cdot x} \cdot dx \right) + \left(\int_{x=x_3}^{x=x_2} x \cdot [y]_{y=0}^{y=-\frac{y_3}{x_2-x_3} \cdot x + \frac{x_2 \cdot y_3}{x_2-x_3}} \cdot dx \right) \\
&= \left(\int_{x=0}^{x=x_3} \frac{y_3}{x_3} \cdot x^2 \cdot dx \right) + \left(\int_{x=x_3}^{x=x_2} \left(-\frac{y_3}{x_2-x_3} \cdot x^2 + \frac{x_2 \cdot y_3}{x_2-x_3} \cdot x \right) \cdot dx \right) \\
&= \left(\left[\frac{y_3}{x_3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 \right]_{x=0}^{x=x_3} \right) + \left(\left[-\frac{y_3}{x_2-x_3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{x_2 \cdot y_3}{x_2-x_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_{x=x_3}^{x=x_2} \right) \\
&= \left(\frac{y_3}{x_3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x_3^3 \right) + \left(-\frac{y_3}{x_2-x_3} \cdot \frac{1}{3} \cdot (x_2^3 - x_3^3) + \frac{x_2 \cdot y_3}{x_2-x_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x_2^2 - x_3^2) \right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot (y_3 \cdot x_3^2) + \left(y_3 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-x_2^2 - x_2 \cdot x_3 - x_3^2) + \frac{1}{2} \cdot (x_2^2 + x_2 \cdot x_3) \right] \right) \\
&\quad \text{Wegen } y_3 > 0 \text{ und } x_3^2 > 0 \text{ also} \\
&= \frac{1}{3} \cdot y_3 \cdot x_3^2 + y_3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (-x_2^2 - x_2 \cdot x_3 - x_3^2) + \frac{1}{2} \cdot (x_2^2 + x_2 \cdot x_3) \right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot y_3 \cdot x_3^2 + y_3 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot x_2^2 + \frac{1}{6} \cdot x_2 \cdot x_3 - \frac{1}{3} \cdot x_3^2 \right) \\
&= \frac{1}{6} \cdot y_3 \cdot (2 \cdot x_3^2 + (x_2 \cdot (x_2 + x_3) - 2 \cdot x_3^2))
\end{aligned}$$

$$\text{D.h. } x_s = \frac{\int_F x \cdot dF}{\int_F 1 \cdot dF} = \frac{\frac{1}{6} \cdot y_3 \cdot (2 \cdot x_3^2 + (x_2 \cdot (x_2 + x_3) - 2 \cdot x_3^2))}{\frac{1}{2} \cdot x_2 \cdot y_3}$$

oder

$$x_s = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2 \cdot x_3^2 + (x_2 \cdot (x_2 + x_3) - 2 \cdot x_3^2))}{x_2} = \frac{1}{3} \cdot (x_2 + x_3)$$

wie in der Koordinatengeometrie.

Die y -Komponente wird entsprechend berechnet.

Aufgabe 12.8 (Volumenintegral):

In $\mathbb{R}^3$ seien die beiden Kurven

$$P := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3, y = -x^2 + 3 \cdot x\} \quad \text{und} \quad G := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3, y = 2 \cdot x\}$$

sowie die Fläche

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = x^2 + y\}$$

- Zeichnen Sie die beiden Kurven P und G und schraffieren Sie die von den beiden Kurven eingeschlossene Fläche.
- Berechnen Sie das Volumen des Körpers über der in der x, y -Ebene schraffierten Fläche (nach a)), die nach oben durch die Fläche F beschränkt ist.
- Berechnen Sie den geometrischen Schwerpunkt dieses Volumens.

Lösung der Aufgabe 12.8a):

siehe nebenstehendes Bild.

(20)

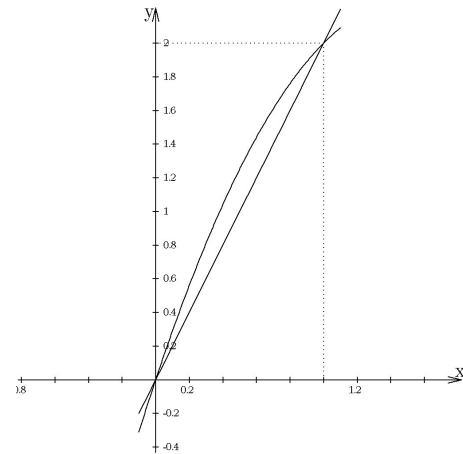
Lösung der Aufgabe 12.8b):

Das Volumen V dieses Körpers ist definiert durch

$$V = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=2 \cdot x}^{y=-x^2+3 \cdot x} (x^2 + y) \cdot dy \cdot dx$$

also

$$V = \int_{x=0}^{x=1} \left[x^2 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot y^2 \right]_{y=2 \cdot x}^{y=-x^2+3 \cdot x} \cdot dx.$$



Zu Aufgabe 12.8a)

Damit ist

$$V = \int_{x=0}^{x=1} \left(x^2 \cdot (-x^2 + x) + \frac{1}{2} \cdot (-x^2 + 3 \cdot x)^2 - 2 \cdot x^2 \right) \cdot dx$$

oder

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=0}^{x=1} \left(-x^4 + x^3 + \frac{1}{2} \cdot (x^4 - 6 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2) - 2 \cdot x^2 \right) \cdot dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \left(-\frac{1}{2} \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + \frac{5}{2} \cdot x^2 \right) \cdot dx \\ &= \left[-\frac{1}{10} \cdot x^5 - \frac{2}{4} \cdot x^4 + \frac{5}{6} \cdot x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{10} - \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{7}{30} \end{aligned} \quad (40)$$

Lösung der Aufgabe 12.8c):

Nach Definition (F+H Seite 141) ist die x -Komponente des geometrischen Schwerpunktes eines Körpers K mit dem Volumen V definiert durch

$$x_S = \frac{1}{V} \cdot \int_K x \cdot dV, \text{ also hier}$$

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{V} \cdot \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=2 \cdot x}^{y=-x^2+3 \cdot x} \int_{z=0}^{z=x^2+y} x \cdot dz \cdot dy \cdot dx \\ &= \frac{1}{V} \cdot \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=2 \cdot x}^{y=-x^2+3 \cdot x} [x \cdot z]_{z=0}^{z=x^2+y} \cdot dy \cdot dx \\ &= \frac{1}{V} \cdot \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=2 \cdot x}^{y=-x^2+3 \cdot x} (x^3 + x \cdot y) \cdot dy \cdot dx \\ &= \frac{1}{V} \cdot \int_{x=0}^{x=1} \left[x^3 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot x \cdot y^2 \right]_{y=2 \cdot x}^{y=-x^2+3 \cdot x} \cdot dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{V} \cdot \int_{x=0}^{x=1} \left(x^3 \cdot (-x^2 + x) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot ((-x^2 + 3 \cdot x)^2 - (2 \cdot x)^2) \right) \cdot dx \\ &= \frac{1}{V} \cdot \int_{x=0}^{x=1} \left(-\frac{1}{2} \cdot x^5 - 2 \cdot x^4 + \frac{5}{2} \cdot x^3 \right) \cdot dx \\ &= \frac{1}{V} \cdot \left[-\frac{1}{12} \cdot x^6 - \frac{2}{5} \cdot x^5 + \frac{5}{8} \cdot x^4 \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{V} \cdot \left(\frac{-10 - 48 + 75}{120} \right) \\ &= \frac{7}{30} \cdot \frac{17}{120} = \frac{17}{28} \end{aligned}$$

$$y_S = \frac{1}{V} \cdot \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=2 \cdot x}^{y=-x^2+3 \cdot x} \int_{z=0}^{z=x^2+y} y \cdot dz \cdot dy \cdot dx = \frac{7}{30} \cdot \frac{43}{140} = \frac{128}{98}$$

$$z_S = \frac{1}{V} \cdot \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=2 \cdot x}^{y=-x^2+3 \cdot x} \int_{z=0}^{z=x^2+y} z \cdot dz \cdot dy \cdot dx = \frac{7}{30} \cdot \frac{169}{840} = \frac{169}{196}$$