

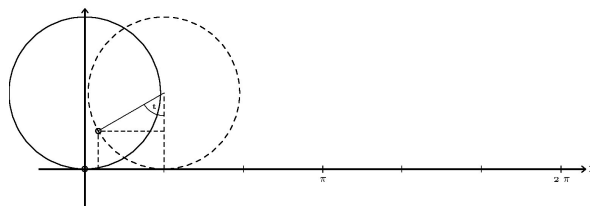
14 Kurven in Parameterdarstellung, Tangentenvektor und Bogenlänge

Aufgabe 14.1 (Tangentenvektor und Bogenlänge):

Als Beispiel für eine Kurve, die in Parameterdarstellung beschrieben wird, werden wir hier eine **Zykloide** untersuchen.

a) Es wird ein Kreis mit dem Radius 1 betrachtet. Es sei P ein Punkt auf dem Radius des Kreises. Die Kurve, die der Punkt P beschreibt, wenn der Kreis auf der x -Achse abrollt, heißt dann Zykloide.

Bestimmen Sie die Parameterdarstellung für diese Kurve, wobei Sie den „Wälzwinkel“ als Parameter t wählen, und zeichnen Sie diese Zykloide für $0 \leq t \leq 2 \cdot \pi$.



Aufgabe 14.1:
Zykloide (Punkt P liegt auf dem Radius)

Lösung von Aufgabe 14.1a) [AUF 18.1 (d)]

Es wird zunächst der Mittelpunkt $(x_m(t), y_m(t))$ des Rades verfolgt:

Für $t = 0$ ist $\begin{pmatrix} x_m(t) \\ y_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m(0) \\ y_m(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

für ein beliebiges t ist $\begin{pmatrix} x_m(t) \\ y_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Weg des Punktes P soll nun beschrieben werden durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m(t) \\ y_m(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_P(t) \\ y_P(t) \end{pmatrix},$$

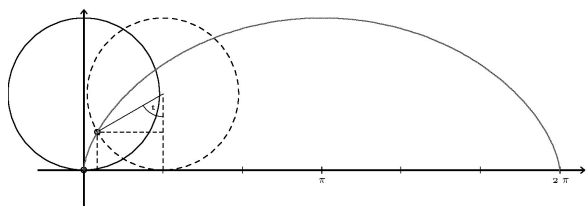
wobei $(x_P(t), y_P(t))$ die relative Bewegung des Punktes P auf dem Rad beschreibt.

Für $t = 0$ ist $\begin{pmatrix} x_P(t) \\ y_P(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P(0) \\ y_P(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und

für ein beliebiges t ist $\begin{pmatrix} x_P(t) \\ y_P(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$.

Folglich ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} \quad (14.1.1)$$



Aufgabe 14.1: Zykloide (Punkt P liegt auf dem Radius)

Aufgabe 14.1b) Eliminieren Sie den Wälzwinkel t , um eine **explizite Darstellung** der Zykloide zu erhalten. Verwenden Sie dazu die Gleichung $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ und $t = \arccos(1 - y)$.

Lösung von Aufgabe 14.1b) [AUF 18.1 (d)]

Nach (14.1.1) gilt $x = t - \sin(t)$, also $\sin(t) = t - x$.

Ferner gilt $y = 1 - \cos(t)$ nach (14.1.1), also auch $t = \arccos(1 - y)$, also insgesamt $\sin(t) = \arccos(1 - y) - x$.

Ebenfalls nach (14.1.1) gilt $y = 1 - \cos(t)$, also $\cos(t) = 1 - y$.

Damit ist

$$1 = \sin^2(t) + \cos^2(t) = (\arccos(1 - y) - x)^2 + (1 - y)^2$$

oder

$$(\arccos(1 - y) - x)^2 = 1 - (1 - y)^2 = 1 - (1 - 2 \cdot y + y^2) = 2 \cdot y - y^2$$

oder

$$\arccos(1 - y) - x = \sqrt{2 \cdot y - y^2} \quad \text{für } 0 \leq y \leq 2 \text{ und } 0 \leq x \leq \pi$$

oder

$$x = \arccos(1 - y) - \sqrt{2 \cdot y - y^2} \quad \text{für } 0 \leq y \leq 2 \text{ und } 0 \leq x \leq \pi$$

Aufgabe 14.1c) Bestimmen Sie die Gleichung der Zykloide, für die der Punkt P nicht auf dem Radius des sich drehenden Rades liegt, sondern den Abstand $a > 0$ vom Kreismittelpunkt hat.

Berechnen Sie die Winkel (in Abhängigkeit von a), unter denen die Zykloide die x -Achse schneidet.

Lösung von Aufgabe 14.1c) [AUF 18.3]

Die Gleichung einer Zykloide im Sinne dieser Aufgabe lautet

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - a \cdot \sin(t) \\ 1 - a \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \quad (14.1.2)$$

Zunächst ist zu untersuchen, für welche a die Zykloide überhaupt die x -Achse schneidet: für einen Schnittpunkt muss es ein t geben mit $0 \leq t \leq 2 \cdot \pi$ und $y(t) = 0$, also

$1 - a \cdot \cos(t) = 0$ nach (14.1.2) oder

$$\cos(t) = \frac{1}{a} \quad (14.1.3)$$

Also schneidet die Zykloide die x -Achse nur für $a > 1$.

Es sei t_0 ein Parameter, bei dem die Zykloide die x -Achse schneidet.

Für eine in Parameterdarstellung gegebene Kurve $\vec{x} = \vec{x}(t)$ ist nach REP 18.1 der Tangentenvektor $\vec{t}$ in einem Punkt $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ auf der Kurve bestimmt durch

$$\vec{t} = \dot{\vec{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}. \quad - \quad \text{Hier ist daher } \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 - a \cdot \cos(t) \\ a \cdot \sin(t) \end{pmatrix}.$$

An einem Schnittpunkt t_0 gilt $\cos(t_0) = \frac{1}{a}$ nach (14.1.3), also ist dann

$$\sin(t_0) = \sqrt{1 - \cos^2(t_0)} = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - 1}{a^2}} = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{a^2 - 1} \text{ und damit}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 - a \cdot \cos(t_0) \\ a \cdot \sin(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \cdot \frac{1}{a} \cdot \sqrt{a^2 - 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{a^2 - 1} \end{pmatrix}.$$

Für $a = 1$ ist $\cos(t_0) = 1$ und damit $t_0 = 0$ oder $t_0 = 2 \cdot \pi$ und $\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit existiert an den Rändern keine Tangente.

Für $a > 1$ ist $\vec{t} \neq \vec{0}$. Also wird dort die x -Achse senkrecht geschnitten.

Aufgabe 14.1d) Berechnen Sie die Bogenlänge der Zykloide mit $a = 1$.

Lösung von Aufgabe 14.1d) [AUF 18.5 (b)]

Nach REP 18.1 wird die Bogenlänge L einer in Parameterform gegebenen Kurve berechnet durch

$$L = \int_{t=t_0}^{t=t_1} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt$$

wobei $\vec{x}(t_0)$ der Anfangs- und $\vec{x}(t_1)$ der Endpunkt des zu berechnenden Bogens ist.

Nach (14.1.1) wird die Zykloide beschrieben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi$$

also ist hier

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich

$$(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 = (1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t) = 1 - 2 \cdot \cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t) = 2 - 2 \cdot \cos(t)$$

und damit wegen $\sin^2(\heartsuit) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot \heartsuit))$ oder $1 - \cos(t) \stackrel{2 \cdot \heartsuit = t}{=} 2 \cdot \sin(\frac{t}{2})$:

$$L = \int_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt = \int_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(t)} dt = \int_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} 2 \cdot \sin(\frac{t}{2}) dt = 8$$

Aufgabe 14.1e) Berechnen Sie die Bogenlänge der Zykloide mit $a = 2$.

Lösung von Aufgabe 14.1e)

Wie in der Lösung von Aufgabe 14.1d) ist für die Zykloide

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t - 2 \cdot \sin(t) \\ 1 - 2 \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi$$

hier

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot \cos(t) \\ 2 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (1 - 2 \cdot \cos(t))^2 + 4 \cdot \sin^2(t) = 1 - 4 \cdot \cos(t) + 4 \cdot \cos^2(t) + 4 \cdot \sin^2(t) = 5 - 4 \cdot \cos(t)$$

und damit

$$L = \int_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt = \int_{x=0}^{x=2 \cdot \pi} \sqrt{5 - 4 \cdot \cos(x)} dx \quad (1)$$

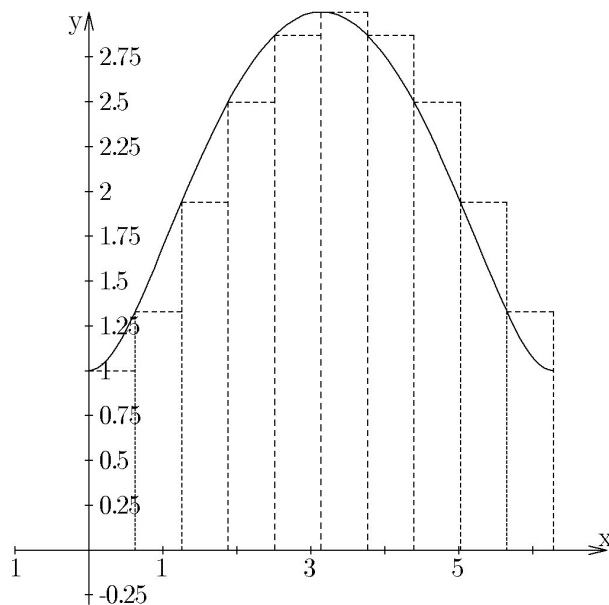
Wenn versucht wird, dieses Integral mit Hilfe der Generalsubstitution zu lösen, so ergibt sich

$$\text{mit } \cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \text{ und } dx = \frac{2 \cdot dt}{1 + t^2}$$

$$L = 2 \cdot \int_{x=0}^{x=2 \cdot \pi} \sqrt{5 - 4 \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \cdot \frac{1}{1 + t^2} dt = 2 \cdot \int_{x=0}^{x=2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{1 + 9 \cdot t^2}{(1 + t^2)^3}} dt$$

Ein solches Integral ist in der Formelsammlung nicht enthalten.

Also wird (1) numerisch integriert:



x_{anfang}	x_{ende}	y	Fläche
0.00	0.63	1.00	0.63
0.63	1.26	1.33	0.83
1.26	1.88	1.94	1.22
1.88	2.51	2.50	1.57
2.51	3.14	2.87	1.80
3.14	3.77	3.00	1.88
3.77	4.40	2.87	1.80
4.40	5.03	2.50	1.57
5.03	5.65	1.94	1.22
5.65	6.28	1.33	0.83
0.00	6.28		13.36

Aufgabe 14.1e):

Bogenlänge einer Zykloide mit $a = 2$ als
Fläche unter der obigen Kurve

Aufgabe 14.2:

Zur Beschreibung der Abhängigkeit des Schallpegels $P = P(v)$ eines Schienenverkehrsmittels von dessen Geschwindigkeit v wird die Gleichung

$$P(v) = \left[51 + 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{v}{100 \text{ km/h}} \right) \right] \text{ dB}$$

verwendet. Nach dieser Gleichung ist $\lim_{v \rightarrow 0} P(v) = -\infty$.

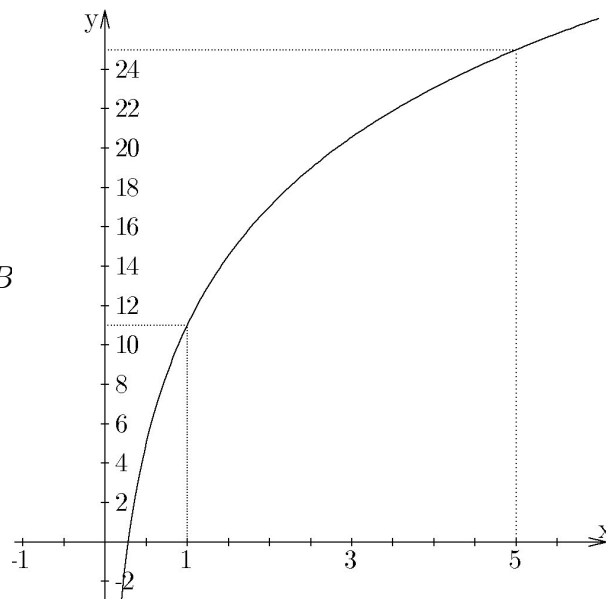
Suchen Sie nach einer geeigneten Funktion, für die gilt

$$P(0) = 0 \text{ dB(A)}$$

$$P(100 \text{ km/h}) = 51 \text{ dB(A)}$$

$$P(200 \text{ km/h}) = 57 \text{ dB(A)}$$

und zeichnen Sie dann beide Funktionen für Geschwindigkeiten zwischen 0 km/h und 5 km/h



Aufgabe 14.2:

Kurve $P(v) = 51 + 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{v}{100 \text{ km/h}} \right)$
(ausgezogen)

Lösung der Aufgabe 14.2:

Ziel dieser Veranstaltung ist es, Kreativität bezüglich mathematischer Lösungsverfahren zu beweisen. Daher ist der hier angegebene Lösungsweg nur einer von vielen möglichen.

Ansatz: Gesucht sind Zahlen a und b mit der Eigenschaft, dass die Kurve

$$P(v) = a \cdot \log_{10} \left(1 + \frac{v}{b} \right)$$

durch die Punkte $P(0) = 0$,
 $P(100 \text{ km/h}) = 51 \text{ dB(A)}$ und
 $P(200 \text{ km/h}) = 57 \text{ dB(A)}$ geht.

Nach Ansatz geht die Kurve bereits durch $(0, 0)$.

Wegen $P(100 \text{ km/h}) = 51 \text{ dB(A)}$ muss gelten

$$\begin{aligned} P(100 \text{ km/h}) &= a \cdot \log_{10} \left(1 + \frac{100 \text{ km/h}}{b} \right) \\ &= 51 \text{ dB(A)} \end{aligned}$$

und wegen $P(200 \text{ km/h}) = 57 \text{ dB(A)}$ muss gelten

$$P(200 \text{ km/h}) = a \cdot \log_{10} \left(1 + \frac{200 \text{ km/h}}{b} \right) = 57 \text{ dB(A)}$$

Daraus ergibt sich jeweils

$$1 + \frac{100 \text{ km/h}}{b} = 10^{\frac{51}{a}} \Leftrightarrow b = \frac{100 \text{ km/h}}{10^{\frac{51}{a}} - 1} \quad (14.2.1)$$

und

$$1 + \frac{200 \text{ km/h}}{b} = 10^{\frac{57}{a}} \Leftrightarrow b = \frac{200 \text{ km/h}}{10^{\frac{57}{a}} - 1} \quad (14.2.2)$$

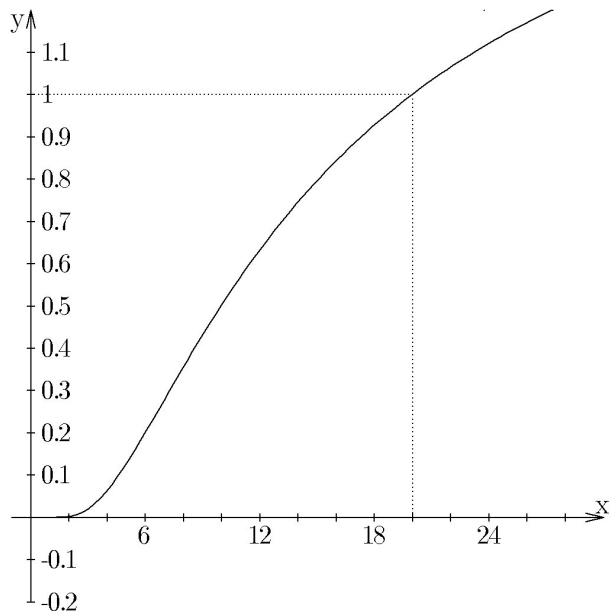
Gleichsetzen von (14.2.1) und (14.2.2) ergibt

$1 = 2 \cdot \frac{10^{\frac{51}{a}} - 1}{10^{\frac{57}{a}} - 1}$, und diese Gleichung lässt sich graphisch lösen: $a = 20$.

Hieraus kann dann nach (14.2.1) b bestimmt werden: $b = 0.28 \text{ km/h}$.

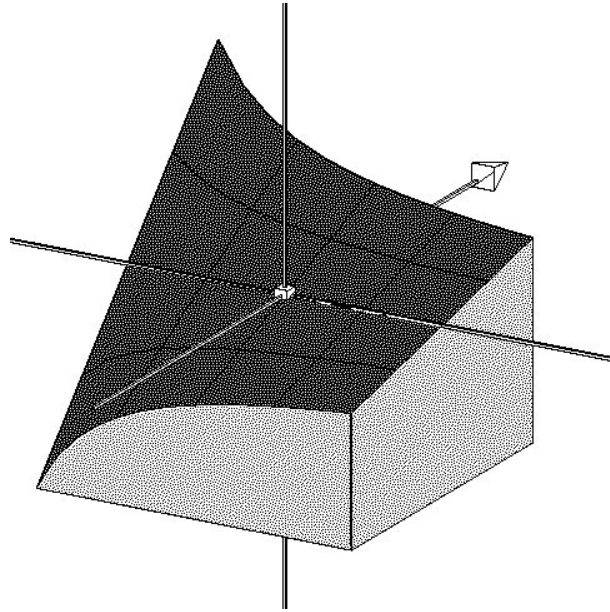
Damit ergibt sich als Lösung:

$$P(v) = 20 \cdot \log_{10} \left(1 + \frac{v}{0.28 \text{ km/h}} \right)$$



Aufgabe 14.2:

Für welches a ist $1 = 2 \cdot \frac{10^{\frac{51}{a}} - 1}{10^{\frac{57}{a}} - 1}$?



Aufgabe 14.2:

Kurve $P(v) = 51 + 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{v}{100 \text{ km/h}} \right)$ (ausgezogen)

Kurve $P(v) = 20 \cdot \log_{10} \left(1 + \frac{v}{0.28 \text{ km/h}} \right)$ (gestrichelt)

Als Beispiel für Kurven, die in Polarkoordinaten-Darstellung beschrieben werden, sollen hier Spiralen, eine Kardioide und eine Lemniskate untersucht werden.

Lösung von Aufgabe 14.3a)

Aufgabe 14.3a):

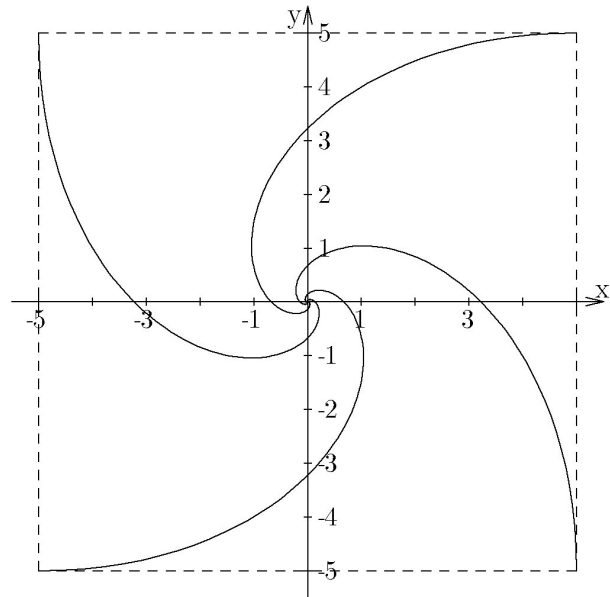
Es wird ein Quadrat mit den Ecken $E_1 = (-5, -5)$, $E_2 = (5, -5)$, $E_3 = (5, 5)$ und $E_4 = (-5, 5)$ (mit der Seitenlänge 10 m) betrachtet. In jeder Ecke E_i starte ein Hund H_i , um dem vor ihm sitzenden Hund H_{i+1} nachzulaufen (es wird $H_5 = H_1$ gesetzt). Nun läuft jeder Hund H_i 1 m weit in der Richtung, in der er den anderen Hund H_{i+1} am Anfang gesehen hatte.

Dann erkennt der Hund H_i , dass der Hund H_{i+1} auch weitergelaufen ist; also ändert er seine Richtung und läuft nun wieder 1 m in der neuen Richtung.

Und so weiter ...

Zeichnen Sie den Weg eines der Hunde.

(Diese Kurve ist eine logarithmische Spirale.)

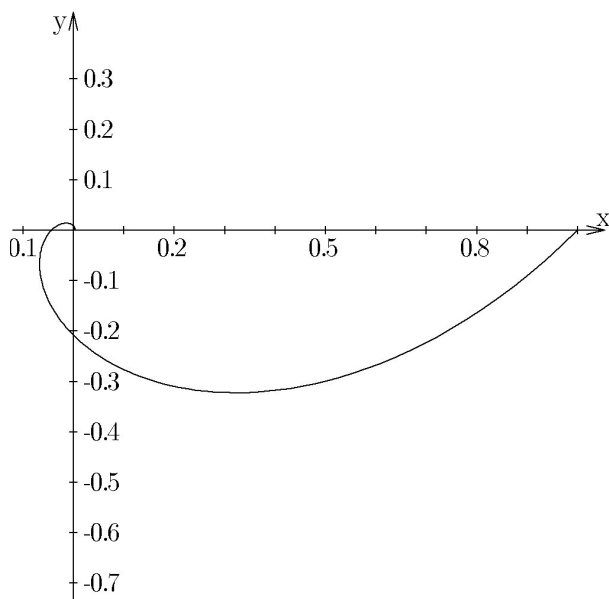


Aufgabe 14.3a)

Wege der vier Hunde

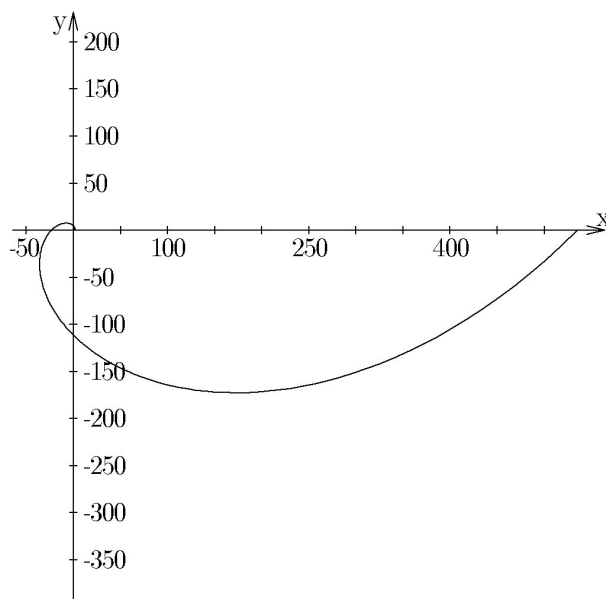
b) Zeichnen Sie die in Polarkoordinaten gegebene Kurve $r = e^\varphi$ für $-2 \cdot \pi \leq \varphi \leq 0$ und für $0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi$.

Lösung von Aufgabe 14.3b)



Aufgabe 14.3b)

$$r = e^\varphi \text{ für } -2 \cdot \pi \leq \varphi \leq 0$$



Aufgabe 14.3b)

$$r = e^\varphi \text{ für } 0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi$$

c) Untersuchen Sie, ob es Parameter a und b gibt, so dass die Kurve $r = b \cdot e^{a \cdot \varphi}$ die Kurve des Hundes H_1 beschreibt.

Lösung von Aufgabe 14.3c)

(mit Hilfe der Definition des Tangentenvektors aus dem REP, S.500)

Da die Spirale $r = b \cdot e^{a \cdot \varphi}$ durch den Punkt $E_1 = (-5, -5)$ gehen soll, muss für $r = 5 \cdot \sqrt{2}$ und

$$\varphi = \frac{5}{4} \cdot \pi \text{ gelten:}$$

$$5 \cdot \sqrt{2} = b \cdot e^{a \cdot \frac{5}{4} \cdot \pi}$$

Nach REP, S.500 ist für eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve $r = r(\varphi)$ der Tangentenvektor $\vec{t}$ im Punkt (r, φ_0) bestimmt durch

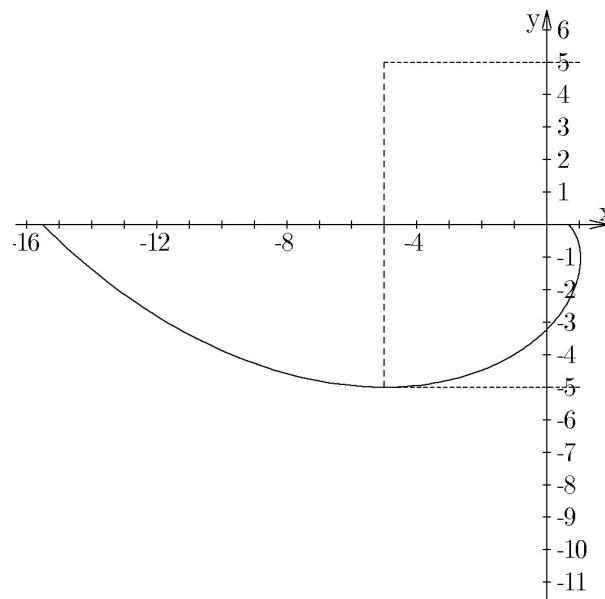
$$\vec{t}(\varphi) = \begin{pmatrix} \dot{r}(\varphi_0) \cdot \cos(\varphi_0) - r(\varphi_0) \cdot \sin(\varphi_0) \\ \dot{r}(\varphi_0) \cdot \sin(\varphi_0) + r(\varphi_0) \cdot \cos(\varphi_0) \end{pmatrix}$$

also hier mit $r(\varphi) = b \cdot e^{a \cdot \varphi}$ und $\dot{r}(\varphi) = a \cdot b \cdot e^{a \cdot \varphi}$

$$\vec{t}\left(\frac{5}{4} \cdot \pi\right) = b \cdot e^{a \cdot \frac{5}{4} \cdot \pi} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right) \begin{pmatrix} a - 1 \\ a + 1 \end{pmatrix}$$

Nun soll $\vec{t}\left(\frac{5}{4} \cdot \pi\right)$ parallel zur x -Achse sein, also muss $a + 1 = 0$ und damit $a = -1$ sein.

Wird nun $a = -1$ in die obige Gleichung für b eingesetzt, so ergibt sich $b = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\frac{5}{4} \cdot \pi} \approx 359$.



Aufgabe 14.3c)

logarithmische Spirale $r = b \cdot e^{a \cdot \varphi}$

durch $E_1 = (-5, -5)$ mit Tangentensteigung 0 in Punkt E_1

$a = -1$ und $b \approx 359$

Aufgabe 14.3d)

Bestimmen Sie die Winkel α , unter der die Spirale $r = e^{a \cdot \varphi}$ eine Gerade $y = \tan(\beta) \cdot x$ schneidet.

Lösung von Aufgabe 14.3d)

siehe AUF 18.4.

Aufgabe 14.3e) Berechnen Sie die Bogenlänge der Spirale $r = e^\varphi$ für $-2 \cdot \pi \leq \varphi \leq 0$. schneiden.

Lösung von Aufgabe 14.3e)

(mit Hilfe der Definition der Bogenlänge einer in Polarkoordinaten gegebenen Kurve aus dem REP, S.501)

Aufgabe 14.4:

a) Zeichnen Sie die in Polarkoordinaten gegebene Kurve $r = \varphi$ mit $0 \leq \varphi \leq 4 \cdot \pi$.

Diese Kurve heißt archimedische Spirale.

b) Bestimmen Sie den Abstand $d(\alpha)$ zwischen den beiden Schnittpunkten einer Geraden

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \tan(\alpha) \cdot x\}$$

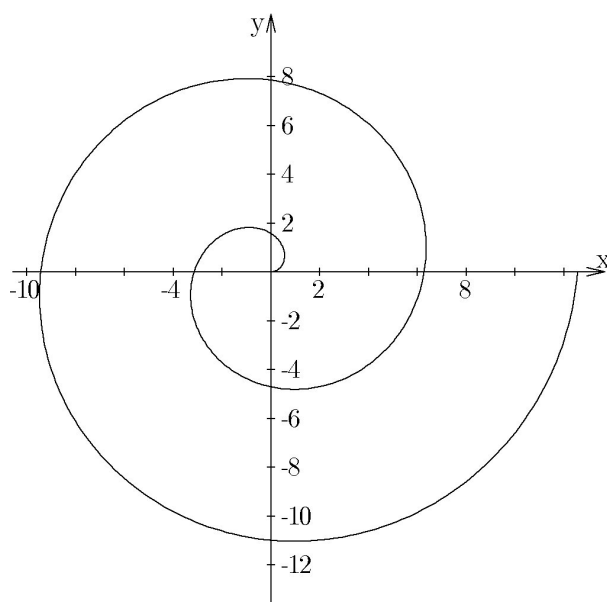
mit der unter a) gezeichneten archimedischen Spirale.

Aufgabe 14.5:

a) Zeichnen Sie die in Polarkoordinaten gegebene Kurve $r = 1 + \cos(\varphi)$ mit $0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi$.

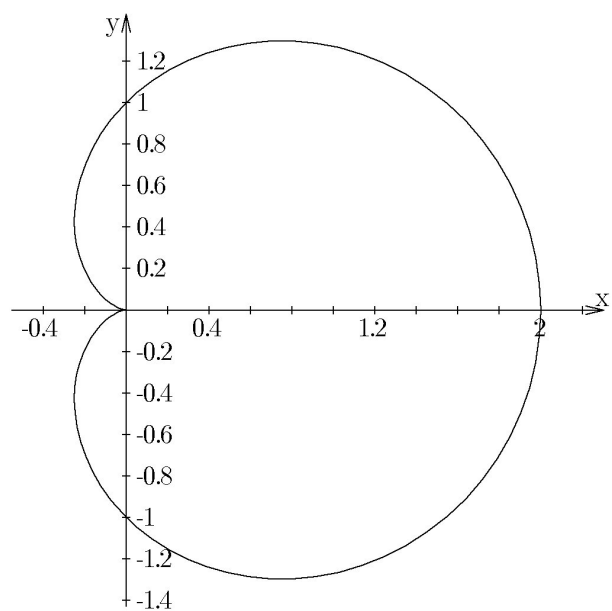
Diese Kurve heißt Kardioid.

Lösung von Aufgabe 14.4a)



Aufgabe 14.4a)
archimedische Spirale

Lösung von Aufgabe 14.5a)



Aufgabe 14.5a)
Kardioid

b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kardioid $r = 1 + \cos(\varphi)$ mit $0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi$.

Aufgabe 14.6 (Bogenlänge):

Gegeben sei das Kurvenstück $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot t^3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot t^2 \\ t \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq a$.

Für welche reelle Zahl a hat dieses Kurvenstück die Bogenlänge 12?

Lösung von Aufgabe 14.6:

Die Bogenlänge L ist nach F+H, Seite 119, für eine in Parameterdarstellung gegebene Kurve der Form $\vec{x}(t)$ mit $t_0 \leq t \leq t_1$ definiert durch

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} \cdot dt$$

wobei $\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt}$ und $\dot{y}(t) := \frac{dy(t)}{dt}$ und $\dot{z}(t) := \frac{dz(t)}{dt}$ ist.

Hier ist

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ \sqrt{2} \cdot t \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit $\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} = \sqrt{t^4 + 2 \cdot t^2 + 1} = t^2 + 1$.

Folglich ist die Bogenlänge (in Abhängigkeit von a):

$$L = \int_0^a (t^2 + 1) \cdot dt = \left[\frac{1}{3} \cdot t^3 + t \right]_0^a = \frac{1}{3} \cdot a^3 + a = a \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a^2 + 1 \right)$$

Gesucht wird eine reelle Zahl a mit $L = \frac{2}{3} \cdot a^3 + 2 \cdot a = 12$. Durch Probieren findet man $\boxed{a = 3}$.

Aufgabe 14.7 (Bogenlänge):

Gegeben sei das Kurvenstück $y = e^x$ mit $0 \leq x \leq 1$.

Berechnen Sie die Bogenlänge.

Lösung von Aufgabe 14.7:

Die Bogenlänge L ist nach F+H, Seite 119, für eine in expliziter Darstellung gegebene Kurve der Form $y = f(x)$ mit $x_0 \leq x \leq x_1$ definiert durch

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

Hier ist

$$f'(x) = e^x$$

und damit $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + e^{2x}}$.

Nach F+H, Seite 93, sollte bei der Integration von Funktionen, die e^x enthalten, substituiert werden:

$$e^x = t \quad \text{mit} \quad dx = \frac{dt}{t}$$

also hier

$$L = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1 + e^{2x}} \cdot dx = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1 + t^2} \cdot \frac{dt}{t} = \int_{x=0}^{x=1} \frac{\sqrt{1 + t^2}}{t} \cdot dt$$

Die Lösung eines solchen Integrals ist in der F+H zu finden: auf Seite 102, Nr. 119:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} \cdot dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a \cdot \ln \left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right)$$

also hier

$$L = \int_{x=0}^{x=1} \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t} \cdot dt = \left[\sqrt{t^2 + 1} - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{t^2 + 1}}{t} \right) \right]_{x=0}^{x=1}$$

Da bei dieser Substitution $e^x = t$ gewählt wurde, gilt für die Grenzen:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow t = e^0 = 1 \\ x = 1 &\Rightarrow t = e^1 = e \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} L &= \left[\sqrt{t^2 + 1} - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{t^2 + 1}}{t} \right) \right]_{t=1}^{t=e} \\ &= \left(\sqrt{e^2 + 1} - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{e^2 + 1}}{e} \right) \right) - \left(\sqrt{1 + 1} - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 1}}{1} \right) \right) \\ &\approx 2.54 - 0.52 = 2.02 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist plausibel, denn nach Pythagoras ist

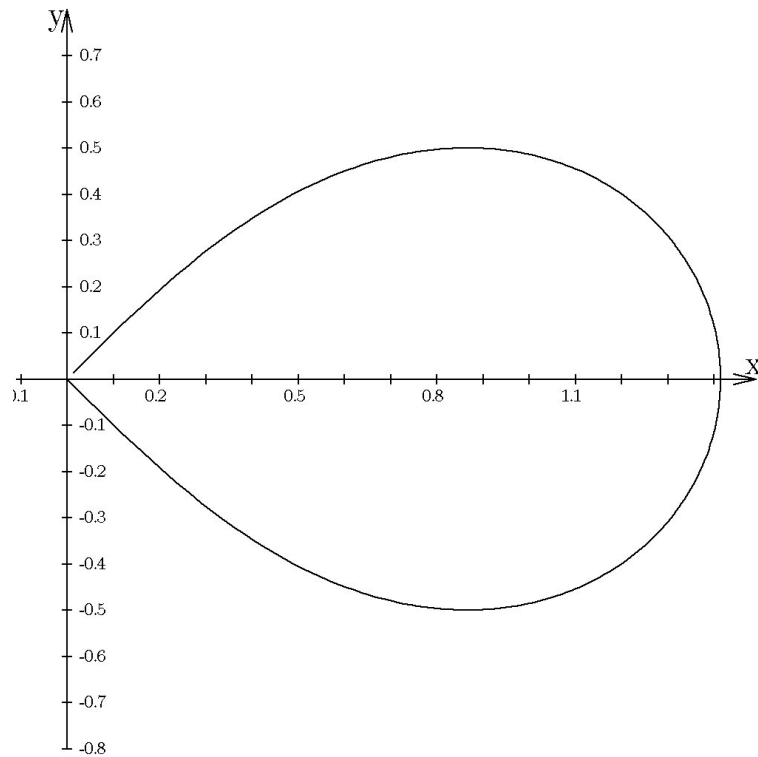
$$\text{Strecke zwischen } (0, 1) \text{ und } (1, e) = (e - 1)^2 + 1^2 \approx 1.99$$

Aufgabe 14.8:

a) Zeichnen Sie die in Polarkoordinaten gegebene Kurve $r = \sqrt{2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi)}$ mit $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

Diese Kurve heißt **Lemniskate**.

b) Berechnen Sie die von der unter a) gezeichneten Lemniskate eingeschlossene Fläche.

Lösung zu Aufgabe 14.8a:

Aufgabe 14.8)

Lemniskate

Lösung zu Aufgabe 14.8b: (siehe auch REP 18.10 (S. 505))

Es gilt nach der „Sektorformel für Polarkoordinaten“ für eine Funktion $r = r(\varphi)$ im Intervall $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ für die zwischen $(0, 0)$ und der Kurve eingeschlossene Fläche F :

$$F = \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (r(\varphi))^2 d\varphi$$

also hier

$$F = \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} 2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \cdot [\sin(2 \cdot \varphi)]_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cdot (1 + 1) = 1$$