



15 Flächeninhalt bei verschiedenen Begrenzungskurven, Krümmung

In Aufgabe 14.6 wurde der Flächeninhalt einer durch eine in Polarkoordinaten gegebenen Kurve begrenzten Fläche berechnet. Natürlich kann auch der Flächeninhalt einer durch eine in Parameterdarstellung gegebenen Kurve begrenzten Fläche berechnet werden. Dazu dient Aufgabe 15.1. Schliesslich ist in Aufgabe 15.2 noch der Flächeninhalt einer durch einen Polygonzug begrenzten Fläche zu berechnen.

Für ebene Kurven ist die **Krümmung** und damit auch die maximale Krümmung sowie der Krümmungskreismittelpunkt wichtig - z.B. an Strassen und Schienenwegen. Daher werden hier die Aufgaben 15.3 und 15.4 gestellt.

Aufgabe 15.1:

Gegeben sei ein Kreis K mit dem Radius r .

- a) Berechnen Sie die Bogenlänge dieses Kreises.
- b) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Kreises.

Lösung von Aufgabe 15.1:

ohne Beschränkung der Allgemeinheit legen wir das Koordinatensystem in den Mittelpunkt des Kreises.

Dann beschreiben wir den Kreis z.B. in einer Parameterdarstellung:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, t_0 \leq t \leq t_1 \right\} = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi \right\}$$

- a) Nach REP Seite 501 ist dann

$$L = \int_{t=t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \cdot dt$$

also hier

$$L = \int_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} r \cdot \sqrt{(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} \cdot dt = [r \cdot t]_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} = 2 \cdot r \cdot \pi$$

- b) Nach REP Seite 505 lautet die „Sektorformel“

$$F = \frac{1}{2} \cdot \int_{t=t_0}^{t_1} (x(t) \cdot \dot{y}(t) - \dot{x}(t) \cdot y(t)) \cdot dt$$

also hier

$$F = \frac{1}{2} \cdot \int_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} ((r \cdot \cos(t)) \cdot (r \cdot \sin(t)) - r \cdot \sin(t) \cdot r \cdot \cos(t)) \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot [r^2]_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} = \pi \cdot r^2$$

Aufgabe 15.2:

Es seien $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 1)$, $P_3 = (2, 0)$, $P_4 = (2, -3)$ und $P_5 = (1, -1)$ gegeben. Berechnen Sie für den (nicht konvexen) geschlossenen Polygonzug $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_1$ den Flächeninhalt (mit Hilfe der Vektorrechnung). Versuchen Sie, eine allgemeine Formel für den Flächeninhalt eines nicht notwendig konvexen Polygonzuges mit n Ecken zu finden.

Lösung von Aufgabe 15.2:

Es seien $P_1, \dots, P_n$ Punkte gegeben. Dann ist

$$F = \left| \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=2}^{n-1} \overrightarrow{P_1, P_i} \times \overrightarrow{P_1, P_{i+1}} \right|$$

der gesuchte Flächeninhalt.

Also hier:

$$\begin{aligned} F &= \left| \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right| = 3.5 \end{aligned}$$

Aufgabe 15.3: Krümmung

a) Bestätigen Sie für einen Kreis mit Radius r die Formeln REP 504 oder F+H 119 für die Krümmung sowohl für die explizite Darstellung $f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ als auch für die Polarkoordinatendarstellung $r = \text{const.}$.

b) Zeigen Sie, dass für eine Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit den Halbmessern a und b mit $a > b$ die maximale Krümmung in den Punkten $(a, 0)$ und $(-a, 0)$ auftritt.

Lösung von Aufgabe 15.3a)

explizite Darstellung $y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

Für die explizite Darstellung ist die Krümmung κ definiert als $\kappa = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\text{Mit } f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y} \text{ und } f''(x) = -\frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{r^2}{y^3}$$

$$\text{ergibt sich hier } \kappa = -\frac{\frac{r^2}{y^3}}{\left(1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{r^2}{y^3 \cdot (y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{y^3}} = -\frac{r^2}{r^3} = -\frac{1}{r}$$

(**Bemerkung:** die negative Krümmung ergibt sich aus dem Umlaufsinn: für den oberen Halbkreis verläuft die Kurve für x von $x = -1$ bis $x = +1$ gegen den Uhrzeigersinn. Für den unteren Halbkreis ergibt sich jedoch $\kappa = \frac{1}{r}$.)

Polarkoordinatendarstellung $r = \text{const.}$

Für die Polarkoordinatendarstellung ist die Krümmung κ definiert als

$$\kappa = \kappa(\varphi) = \frac{r^2 + 2 \cdot \dot{r}^2 - r \cdot \ddot{r}}{(r^2 + \dot{r}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{Mit } \left. \begin{array}{l} \dot{r} = 0 \\ \ddot{r} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r^2 + 2 \cdot \dot{r}^2 - r \cdot \ddot{r} = r^2 \\ (r^2 + \dot{r}^2)^{\frac{3}{2}} = r^3 \end{array} \right. \quad \text{ergibt sich hier } \kappa = \frac{1}{r}$$

Parameterdarstellung $\vec{x}(t) = (x(t), y(t)) = (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t))$

Für die Parameterdarstellung ist die Krümmung κ definiert als $\kappa = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\text{Mit } \left. \begin{array}{l} \dot{x} = -r \cdot \sin(t) \text{ und } \ddot{x} = -r \cdot \cos(t) \\ \dot{y} = r \cdot \cos(t) \text{ und } \ddot{y} = -r \cdot \sin(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y} = r^2 \cdot (\sin^2(t) + \cos^2(t)) = r^2 \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2 \cdot (\sin^2(t) + \cos^2(t)) = r^2 \end{array} \right.$$

$$\text{ergibt sich hier } \kappa = \frac{r^2}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r}$$

Lösung von Aufgabe 15.3b)

Parameterdarstellung $\vec{x}(t) = (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))$

Für diese Darstellung ist die Krümmung κ definiert als $\kappa = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$ also hier mit

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = -a \cdot \sin(t) \text{ und } \ddot{x} = -a \cdot \cos(t) \\ \dot{y} = b \cdot \cos(t) \text{ und } \ddot{y} = -b \cdot \sin(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y} = a \cdot b \cdot (\sin^2(t) + \cos^2(t)) = a \cdot b$$

sowie $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 \cdot \sin^2(t) + b^2 \cdot \cos^2(t) = a^2 \cdot \sin^2(t) + b^2 \cdot (1 - \sin^2(t)) = b^2 + (a^2 - b^2) \cdot \sin^2(t)$

$$\text{Dann ist } \kappa = \kappa(t) = \frac{a \cdot b}{(b^2 + (a^2 - b^2) \cdot \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

Es ist $\kappa(t)$ maximal, wenn der Nenner minimal ist - also bei $t = 0$ und bei $t = \pi$.

Um diese Aussage zu bestätigen, kann auch die Ableitung $\frac{d\kappa(t)}{dt}$ gebildet werden:

$$\frac{d\kappa(t)}{dt} = -\frac{3}{2} \cdot (b^2 + (a^2 - b^2) \cdot \sin^2(t))^{-\frac{5}{2}} \cdot 2 \cdot (a^2 - b^2) \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)$$

Eine notwendige Bedingung für das Auftreten eines Maximums ist die Bedingung $\frac{d\kappa(t)}{dt} = 0$, also hier:

$$-\frac{3}{2} \cdot (b^2 + (a^2 - b^2) \cdot \sin^2(t))^{-\frac{5}{2}} \cdot 2 \cdot (a^2 - b^2) \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) = 0$$

oder $\sin(t) \cdot \cos(t) = 0$, d.h. bei $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, ... liegen mögliche Extremwerte.

Aufgabe 15.4: Krümmungskreismittelpunkt

Wir hatten bereits eine spezielle Konstruktion einer Ellipse $(x_m + a \cdot \cos(\varphi), y_m + b \cdot \sin(\varphi))$ mit den Halbachsen a und b und dem Mittelpunkt $M := (x_m, y_m)$ betrachtet - nun wollen wir diese beweisen:

Lösung von Aufgabe 15.4

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $M = (x_m, y_m) = (0, 0)$.

Für eine in Parameterdarstellung gegebene Kurve $(x(\varphi), y(\varphi))$ sei $\vec{x}_M$ der Krümmungskreismittelpunkt des Krümmungskreises im Punkt $\vec{x}_0 = (x(\varphi_0), y(\varphi_0))$.

Dieser Krümmungskreismittelpunkt $\vec{x}_M$ kann nach REP Seite 504 oder nach F+H Seite 119 bestimmt werden durch die Gleichung

$$\vec{x}_M = \vec{x}_0 + \frac{1}{\kappa(\varphi_0)} \cdot \frac{\vec{n}(\varphi_0)}{|\vec{n}(\varphi_0)|}$$

Darin ist $\kappa(\varphi_0) = \frac{\dot{x}(\varphi_0) \cdot \ddot{y}(\varphi_0) - \ddot{x}(\varphi_0) \cdot \dot{y}(\varphi_0)}{((\dot{x}(\varphi_0))^2 + (\dot{y}(\varphi_0))^2)^{\frac{3}{2}}}$ die Krümmung der Kurve im Punkt $\vec{x}_0$

und

$\vec{n}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(\varphi_0) \\ \dot{x}(\varphi_0) \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor in diesem Punkt auf die Kurve.

Für die hier betrachtete Ellipse ist

$$\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\varphi) \\ b \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \text{ und } \dot{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} -a \cdot \sin(\varphi) \\ b \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} \text{ sowie } \ddot{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} -a \cdot \cos(\varphi) \\ -b \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\text{und folglich } \kappa(\varphi_0) = \frac{a \cdot b \cdot \sin^2(\varphi_0) + a \cdot b \cdot \cos^2(\varphi_0)}{(a^2 \cdot \sin^2(\varphi_0) + b^2 \cdot \cos^2(\varphi_0))^{\frac{3}{2}}} = \frac{a \cdot b}{(a^2 \cdot \sin^2(\varphi_0) + b^2 \cdot \cos^2(\varphi_0))^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{und } \vec{n}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(\varphi_0) \\ \dot{x}(\varphi_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \cdot \cos(\varphi_0) \\ -a \cdot \sin(\varphi_0) \end{pmatrix}, \text{ also } |\vec{n}(\varphi_0)| = \sqrt{a^2 \cdot \sin^2(\varphi_0) + b^2 \cdot \cos^2(\varphi_0)}.$$

Damit gilt hier

$$\vec{x}_M = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\varphi_0) \\ b \cdot \sin(\varphi_0) \end{pmatrix} + \frac{(a^2 \cdot \sin^2(\varphi_0) + b^2 \cdot \cos^2(\varphi_0))^{\frac{3}{2}}}{a \cdot b} \cdot \frac{\begin{pmatrix} -b \cdot \cos(\varphi_0) \\ -a \cdot \sin(\varphi_0) \end{pmatrix}}{\sqrt{(a^2 \cdot \sin^2(\varphi_0) + b^2 \cdot \cos^2(\varphi_0))}}$$

$$\stackrel{c}{=} \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\varphi_0) \\ b \cdot \sin(\varphi_0) \end{pmatrix} + \frac{a^2 \cdot \sin^2(\varphi_0) + b^2 \cdot \cos^2(\varphi_0)}{a \cdot b} \cdot \begin{pmatrix} -b \cdot \cos(\varphi_0) \\ -a \cdot \sin(\varphi_0) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 15.4a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M_A des Krümmungskreises des Punktes $A := (x_m + a, y_m)$.

Lösung der Aufgabe 15.4a)

Für den auf dieser Ellipse liegenden Punkt $A = (a, 0)$ ist $\varphi_0 = 0$. Nach obiger allgemeiner Rechnung gilt dann für $\vec{x}_M$:

$$\begin{aligned} \vec{x}_M &= \begin{pmatrix} a \cdot \cos(0) \\ b \cdot \sin(0) \end{pmatrix} + \frac{1}{a \cdot b} \cdot (a^2 \cdot \sin^2(0) + b^2 \cdot \cos^2(0)) \cdot \begin{pmatrix} -b \cdot \cos(0) \\ -a \cdot \sin(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{a \cdot b} \cdot (b^2) \cdot \begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \frac{b^2}{a} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2 - b^2}{a} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 15.4b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M_B des Krümmungskreises des Punktes $B := (x_m, y_m + b)$.

Aufgabe 15.4c) Zeigen Sie, dass das Lot L von $D := (x_m + a, y_m + b)$ auf die Verbindungsgerade $\overline{A, B}$ die Halbachse $\overline{M, A}$ in dem Punkt M_A trifft.

Lösung der Aufgabe 15.4c)

Wir bezeichnen mit $\langle U, V \rangle$ die Strecke zwischen zwei Punkten U und V , und mit $|\langle U, V \rangle|$ den (euklidischen) Abstand zwischen U und V .

Es seien $\alpha := \angle(A, B, D)$ und X der Lotfusspunkt des Lotes L (auf der Geraden $\overline{A, B}$). Dann ist auch $\angle(X, D, A) = \alpha$, denn die zu $\angle(A, B, D)$ zugehörigen Schenkel $\overline{B, D}$ und $\overline{B, A}$ stehen jeweils senkrecht auf $\overline{D, A}$ beziehungsweise $\overline{D, X}$. Folglich ist

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{|\langle M_A, A \rangle|}{b} \quad \text{also} \quad |\langle M_A, A \rangle| = \frac{b^2}{a}$$

und damit $|\langle M, M_A \rangle| = |\langle M, A \rangle| - |\langle A, M_A \rangle| = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}$.

Dies ist nach 15.4a) genau der x -Wert des Krümmungskreismitelpunktes.

Aufgabe 15.4d) Zeigen Sie, dass das Lot L von $D := (x_m + a, y_m + b)$ auf die Verbindungsgerade $\overline{A, B}$ die Gerade $\overline{M, B}$ in dem Punkt M_B trifft.

Aufgabe 15.5 (Krümmung):

Gegeben sei die Kurve $y = e^{2 \cdot x}$.

Berechnen Sie die Steigung und die Krümmung im Punkt $x = 0$.

Lösung von Aufgabe 15.5:

Wir setzen $f(x) = y$.

Es ist $f'(x) = 2 \cdot e^{2 \cdot x}$ und folglich $f'(0) = 2 \cdot e^0 = 2$ die Steigung im Punkt $(0, 1)$.

Die Krümmung κ ist nach F+H, Seite 119, für eine in expliziter Darstellung gegebene Kurve der Form $y = f(x)$ in einem Punkt $x = x_0$ definiert durch

$$\kappa = \frac{f''(x_0)}{(1 + [f'(x_0)]^2)^{\frac{3}{2}}}$$

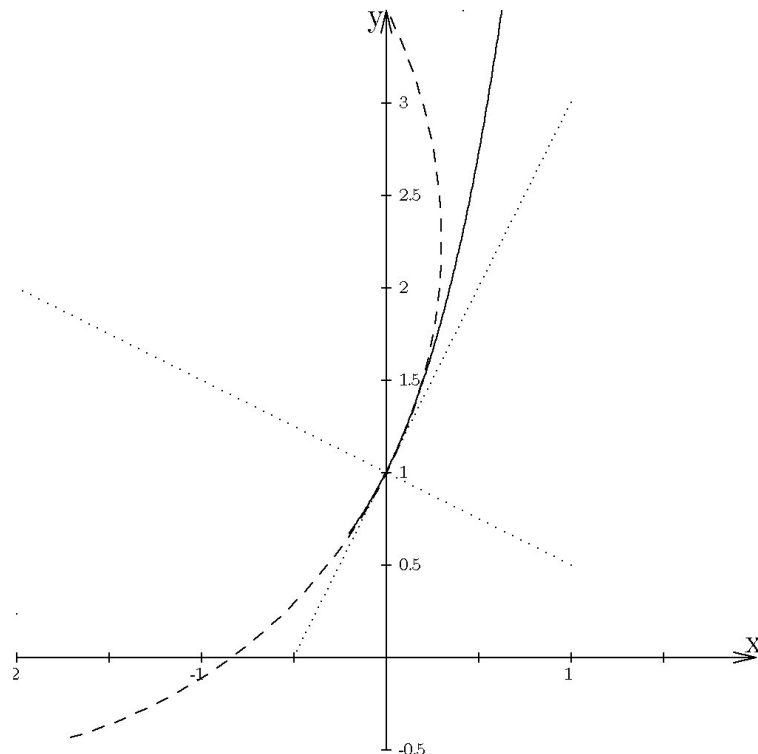
Hier ist

$f''(x) = 4 \cdot e^{2 \cdot x}$ und damit $f''(x_0) = f''(0) = 4$.

Also ist

$$\kappa = \frac{4}{(1 + [2]^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{5^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{4}{11.18} \approx 0.36$$

Dann ist der Krümmungsradius R eines Krümmungskreises in diesem Punkt bestimmt durch $R = \frac{1}{\kappa} \approx 2.8$.



Zu Aufgabe 15.5: Mittelpunkt des Krümmungskreises $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 Radius des Krümmungskreises $R = 2.8$

Aufgabe 15.6 (Rotation um die y -Achse):

In der x, y -Ebene sei das Kurvenstück $y = x^{\frac{2}{3}}$ mit $0 \leq x \leq 2$ gegeben. Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Fläche, die zwischen dieser Kurve und der x -Achse liegt, um die y Achse entsteht.

Lösung von Aufgabe 15.6:

Der durch Rotation der Fläche, die zwischen einem Kurvenstück $y = f(x)$ mit $a \leq x \leq b$ und der x -Achse liegt, um die y -Achse entstehende Körper hat nach F+H, Seite 142, das Volumen

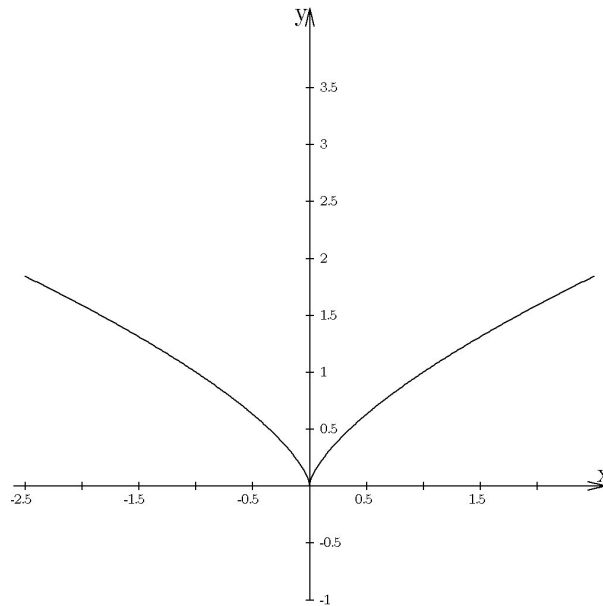
$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx$$

Hier also

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^2 x \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot dx$$

Es ist $x \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{3}}$ und daher

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \pi \cdot \int_0^2 x^{\frac{5}{3}} \cdot dx = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{5}{3} + 1} \cdot \left[x^{\frac{5}{3} + 1} \right]_0^2 \\ &= \frac{2 \cdot \pi}{\frac{8}{3}} \cdot \left[x^{\frac{8}{3}} \right]_0^2 = \frac{6 \cdot \pi}{8} \cdot \left(2^{\frac{8}{3}} - 0^{\frac{8}{3}} \right) \approx \frac{3 \cdot \pi}{4} \cdot 6.35 \approx 15 \end{aligned}$$



Zu Aufgabe 15.6 + 15.7: Neilsche Parabel

Aufgabe 15.7 (Rotation um die x -Achse):

In der x, y -Ebene sei das Kurvenstück $y = x^{\frac{2}{3}}$ mit $0 \leq x \leq 2$ gegeben. Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Fläche, die zwischen dieser Kurve und der x -Achse liegt, um die x -Achse entsteht.

Lösung von Aufgabe 15.7:

Der durch Rotation der Fläche, die zwischen einem Kurvenstück $y = f(x)$ mit $a \leq x \leq b$ und der x -Achse liegt, um die x -Achse entstehende Körper hat nach F+H, Seite 142, das Volumen

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \cdot dx$$

Hier also

$$V = \pi \cdot \int_0^2 \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2 \cdot dx$$

Es ist $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2 = x^{\frac{4}{3}}$ und daher

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^2 x^{\frac{4}{3}} \cdot dx = \frac{\pi}{\frac{4}{3} + 1} \cdot \left[x^{\frac{4}{3} + 1}\right]_0^2 \\ &= \frac{3 \cdot \pi}{7} \cdot \left[x^{\frac{7}{3}}\right]_0^2 = \frac{3 \cdot \pi}{7} \cdot \left(2^{\frac{7}{3}} - 0^{\frac{7}{3}}\right) \approx \frac{3 \cdot \pi}{7} \cdot 5.04 \approx 6.79 \end{aligned}$$

Aufgabe 15.8:

Es wird versucht, für die beiden Kurven

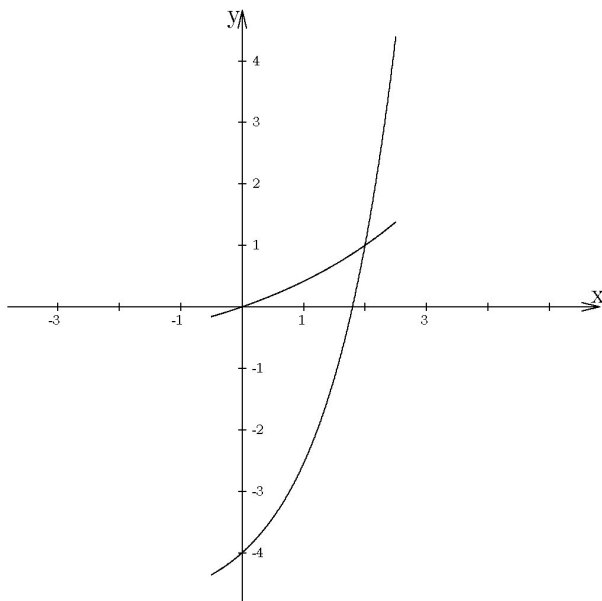
- **obere Kurve**

Kurve von $(0, 1)$ nach $(2, 1)$ mit $y = e^{\frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln(2)} - 1$, und

- **untere Kurve**

Kurve von $(0, -4)$ nach $(2, 1)$ mit $y = e^{\frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln(6)} - 5$

- jeweils die Bogenlänge L auszurechnen, um daraus den Umfang U zu bestimmen
- den Flächeninhalt F auszurechnen
- das Rotationsvolumen V bei Drehung der unteren Kurve um die y -Achse auszurechnen.

**Aufgabe 15.8a) (Bogenlänge):**

Die Bogenlänge L ist nach F+H, Seite 119, für eine in expliziter Darstellung gegebene Kurve der Form $y = f(x)$ mit $a \leq x \leq b$ definiert durch

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

Hier ist für die obere Kurve

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} \cdot \ln(2) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln(2)}\right)^2} \cdot dx \approx 2.43$$

Entsprechend ergibt sich für die untere Kurve:

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} \cdot \ln(6) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln(6)}\right)^2} \cdot dx \approx 5.73$$

Also beträgt der Umfang $U = 2.43 + 5.73 = 8.16$.

Aufgabe 15.8b) (Flächeninhalt):

Wir teilen die x -Achse auf:

$$F_1 = \int_0^{2 \cdot \frac{\ln((5))}{\ln(6)}} \left(e^{\frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln(6)} - 5\right) \cdot dx \approx -4.52$$

$$F_2 = \int_0^{2 \cdot \frac{\ln((5))}{\ln(6)}} \cdot \left(e^{\frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln(2)} - 1\right) \approx 0.70$$

$$F_3 = \int_{2 \cdot \frac{\ln((5))}{\ln(6)}}^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln(2)} - 1\right) \approx 0.18$$

Oder aber wir rechnen mit der Differenz der y -Werte auf dem gesamten Intervall von 0 bis 2:

$$F = \int_0^{2 \cdot \frac{\ln((5))}{\ln(6)}} \left[\left(e^{\frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln(2)} - 1\right) - \left(e^{\frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln(6)} - 5\right)\right] \cdot dx \approx 5.4 \text{ (nach MAPLE: 5.3)}$$

Aufgabe 15.8c) (Rotation um die y -Achse):

Der durch Rotation der Fläche, die zwischen einem Kurvenstück $y = f(x)$ mit $a \leq x \leq b$ und der x -Achse liegt, um die y -Achse entstehende Körper hat nach F+H, Seite 142, das Volumen

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx$$

Hier verschieben die untere Kurve so weit nach oben, dass sie die x -Achse nicht mehr schneidet:

$$y = f(x) = e^{\frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln(6)} - 1$$

und erhalten

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^2 x \cdot \left(e^{\frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln(6)} - 1 \right) \cdot dx \approx 45.02$$

Da das Kurvenstück zwischen

- der y -Achse
- der Kurve $y = f(x)$ und
- der x -Achse mit $a \leq x \leq b$

um die y -Achse gedreht wird, ergibt sich das folgende Volumen r x -Achse liegt die Numerische Integration ergibt

$$V \approx 62.83 - 45.02 = 17,81$$