Mathematik für Ingenieure
Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik
Dr. Dirk Windelberg **Universität Hannover**

Stand: 18. August 2008
http://www.iazd.uni-hannover.de/∼windelberg/teach/ing

16 Kurven im Raum

Aufgabe 16.1:

Es soll auf dem Wanderweg $\vec{w}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot \cos(t) \\ t \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ für $-\pi \leq t \leq \pi$ zum Zeitpunkt $t = -\pi$ mit einer Wanderung begonnen werden. Die Temperaturen auf dem Wanderweg (und in seiner Umgebung) werden der Temperaturfunktion $F(x, y) = e^{x \cdot y^2}$, gültig für $-\pi \leq x \leq \pi$ und $0 \leq y \leq 2$, entnommen.

Die Wanderung beginnt also am Startpunkt S mit
$S = \vec{w}(-\pi) = (-\pi \cdot \cos(-\pi), -\pi \cdot \sin(-\pi)) = (\pi, 0)$
bei einer Temperatur von $F(\pi, 0) = e^{0 \cdot \pi^2} = 1$.

Gesucht ist die (auf den Wanderweg bezogene) Änderung der Temperatur zur Zeit $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

Aufgabe 16.1a) Berechnen Sie die (auf den Wanderweg bezogene) Änderung der Temperatur zur Zeit $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$ durch Bestimmung der Temperaturen an zwei Punkten in der Nähe von t_0.

Lösung von Aufgabe 16.1a) (Differenzenquotient)
Zusätzlich zu dem Zeitpunkt $t_0 = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ wird ein Zeitpunkt $t_1 = \dfrac{\pi}{3} + 0.01$ gewählt. Dann ist die Zeitdifferenz $\Delta(t) = 0.01$.

Es wird nun die entsprechende Temperaturdifferenz ausgerechnet:
Es ist $F(\vec{w}(t_0)) = F\left(\vec{w}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) \approx 1.5382$ und $F(\vec{w}(t_1)) = F\left(\vec{w}\left(\dfrac{\pi}{3} + 0.01\right)\right) \approx 1.5533$,
also ist $\Delta(F) = 0.01508$.

Die Steigung beträgt dann $\dfrac{\Delta(F)}{\Delta(t)} = \dfrac{0.01508}{0.01} = 1.508$.

Aufgabe 16.1b) Berechnen Sie die (auf den Wanderweg bezogene) Änderung der Temperatur zur Zeit $t_0 = \frac{\pi}{3}$ durch Einsetzen der Wanderwegfunktion in die Temperaturfunktion.

Lösung von Aufgabe 16.1b) (Einsetzen)

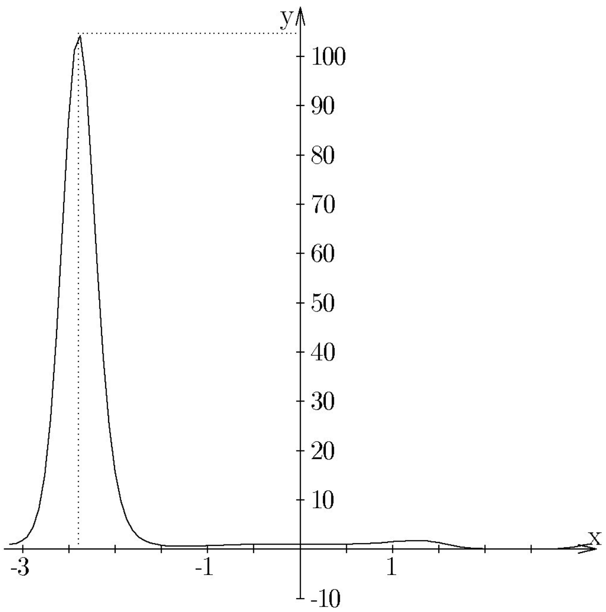

Bild 16.1.1 zu Aufgabe 16.1
Einsetzen der Wanderwegfunktion
in die Temperaturfunktion

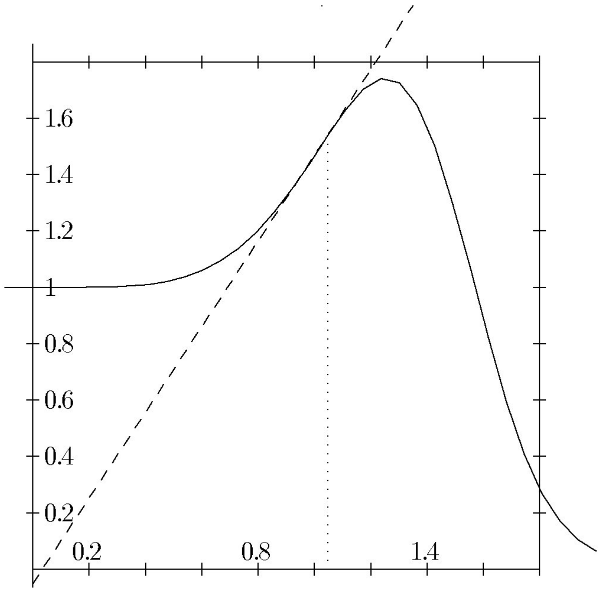

Bild 16.1.2 zu Aufgabe 16.1
Tangente:
$$F = F\left(\vec{w}\left(1.52 \cdot t + 1.54 - 1.52 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Es interessieren nur die Temperaturen längs des Wanderweges, also wird T als Funktion $R = R(t)$ von der Zeit t dargestellt:

$$R(t) = F\left(\vec{w}(t)\right) = e^{x(t)\cdot y(t)^2} = e^{t^3\cdot\cos(t)\cdot\sin^2(t)}$$

Die Ableitung $\frac{d\,R}{d\,t}$ dieser Funktion (nach der Zeit) ist dann gleich der Funktion $\frac{d\,T}{d\,t}$.

Es ist $\frac{d\,R}{d\,t}(t) = e^{t^3\cdot\cos(t)\cdot\sin^2(t)} \cdot \left(3 \cdot t^2 \cdot \sin^2(t) \cdot \cos(t) - t^3 \cdot \sin^3(t) + 2 \cdot t^3 \cdot \sin(t) \cdot \cos^2(t)\right)$
und folglich $\frac{d\,R}{d\,t}\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 1.52$.

Aufgabe 16.1c) Stellen Sie die Temperaturen als Fläche $z = F(x,y)$ im Raum dar und bestimmen Sie die Tangentialebene $z = E(x,y)$ an diese Fläche im Punkt $\vec{w}(t_0) = \vec{w}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Lösung von Aufgabe 16.1c) (Tangentialebene)

Der Wanderweg $\vec{w}(t)$ verläuft in der x,y-Ebene - er kann in einem 3-D-Bild dargestellt werden, in dem die z-Achse die Temperatur beschreiben soll (Bild 16.1.3).

$F(x,y)$ ist dann eine Fläche im Raum, die für jeden Ort (x,y) die Temperatur angibt (Bild 16.1.4).

Der Wanderweg kann auf der Temperaturfläche dargestellt werden (Bild 16.1.5).

In dem Punkt $P_0 = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{3}, e^{\frac{\pi^3}{72}}\right)$ soll nun die Tangentialebene betrachtet werden.
Es ist

$$\begin{aligned} z &= e^{\frac{\pi^3}{72}} + \frac{\pi^2}{12}\cdot e^{\frac{\pi^3}{72}}\cdot\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi^2}{18}\cdot\sqrt{3}\cdot e^{\frac{\pi^3}{72}}\cdot\left(y - \frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{3}\right) \\ &\approx 1.54 + 1.27\cdot(x - 0.52) + 1.46\cdot(y - 0.91) \\ &\approx 1.54 + 1.27\cdot x - 0.66 + 1.46\cdot y - 1.33 = -0.45 + 1.27\cdot x + 1.46\cdot y \end{aligned}$$

Aufgabe 16.1d) Berechnen Sie die (auf den Wanderweg bezogene) Änderung der Temperatur zur Zeit $t_0 = \frac{\pi}{3}$ mit Hilfe der allgemeinen Kettenregel.

Lösung von Aufgabe 16.1d)

Zunächst wird der Punkt (x,y) bestimmt, an dem die Änderung der Temperatur bestimmt werden soll, also der Punkt $\vec{w}(t_0)$.
Es ist

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = t\cdot\cos(t) \\ y(t) = t\cdot\sin(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \approx 0.52 \\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{3} \approx 0.91 \end{array}\right.$$

und folglich $\vec{w}(t_0) = \vec{w}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(x\left(\frac{\pi}{3}\right), y\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{3}\right) \approx (0.52, 0.91)$

Allgemeine Kettenregel für eine Funktion $F = F(x,y)$ mit $\vec{w}(t) = (x(t), y(t))$ und $R(t) := F(\vec{w}(t))$ (siehe REP S.380 oder F+H S.131)

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = F_x\cdot\dot{x}(t) + F_y\cdot\dot{y}(t)$$

Hier ist

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y) = e^{x\cdot y^2} \\ \frac{\partial F}{\partial x} = F_x = y^2\cdot e^{x\cdot y^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = F_y = 2\cdot x\cdot y\cdot e^{x\cdot y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_0 := F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{3}\right) = e^{\frac{\pi^3}{72}} \approx 1.54 \\ F_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{3}\right) = y^2\cdot e^{x\cdot y^2} = \frac{\pi^2}{12}\cdot e^{\frac{\pi^3}{72}} \approx 1.27 \\ F_y\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{3}\right) = 2\cdot x\cdot y\cdot e^{x\cdot y^2} = \frac{\pi^2}{18}\cdot\sqrt{3}\cdot e^{\frac{\pi^3}{72}} \approx 1.46 \end{array}\right.$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}(t) = \cos(t) - t\cdot\sin(t) \\ \dot{y}(t) = \sin(t) + t\cdot\cos(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{3} \approx -0.41 \\ \dot{y}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 1.39 \end{array}\right.$$

Damit ist nach der allgemeinen Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= F_x\cdot\dot{x}(t) + F_y\cdot\dot{y}(t) = \frac{\pi^2}{12}\cdot e^{\frac{\pi^3}{72}}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{3}\right) + \frac{\pi^2}{18}\cdot\sqrt{3}\cdot e^{\frac{\pi^3}{72}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{6}\cdot e^{\frac{\pi^3}{72}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{3}\right) + \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) \approx 1.52 \end{aligned}$$

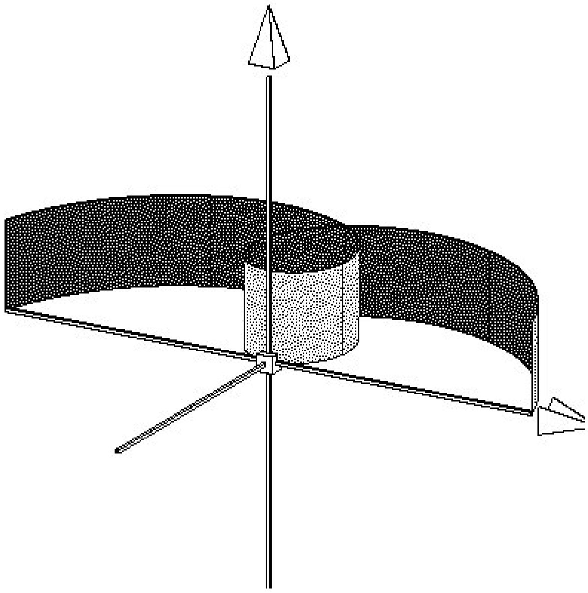

Bild 16.1.3 zu Aufgabe 16.1
Wanderweg in Abhängigkeit von der Zeit t:
$\vec{w}(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \cos(t) \\ t \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ für $-\pi \leq t \leq \pi$

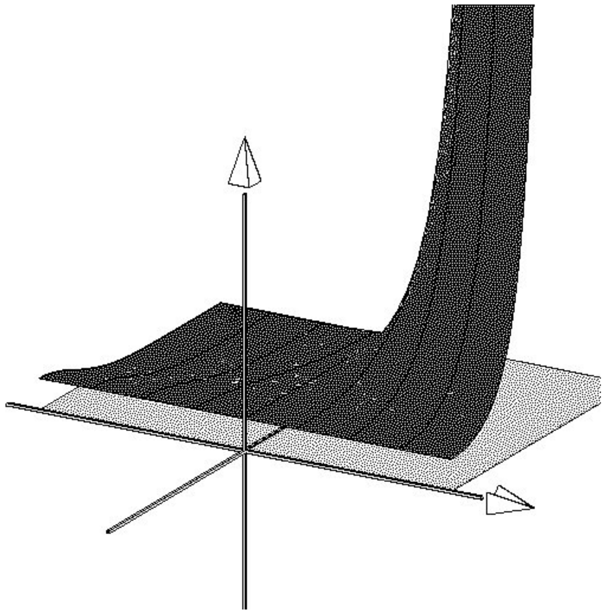

Bild 16.1.4 zu Aufgabe 16.1
Temperaturen $F(x,y) = e^{x \cdot y^2}$, dargestellt für $-\pi \leq x \leq \pi$ und $0 \leq y \leq 2$

Aufgabe 16.1e) Bestimmen Sie die Temperatur im Punkt $\vec{w}(t_1)$ für $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$:

- als $F_1 := F\left(\vec{w}(t_1)\right)$
- als Extrapolation der (aus dem Teil a), b) oder c) berechneten, auf den Wanderweg bezogenen) Änderung der Temperatur zur Zeit t_0
  (es ist die Temperatur und ihre Änderung zur Zeit t_0 bekannt!)
- als Punkt auf der Tangentialebene: $z_1 := E\left(\vec{w}(t_1)\right)$
  (wir hatten $z := E\left(\vec{w}(t)\right)$ allgemein berechnet!)

Lösung von Aufgabe 16.1e) (Vergleich mit linearer Rechnung)

- Für $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$ ist $F_1 := F\left(\vec{w}(t_1)\right) = F\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) = e^0 = 1$
- Wegen der Zeitdifferenz $t_1 - t_0 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$ kann aus der (auf den Wanderweg bezogenen) Änderung der Temperatur zur Zeit t_0, also aus $\dfrac{dR}{dt}(t_0) = 1.52$ nach 16.1d), die Temperatur zur Zeit t_1 berechnet werden:
  Es ist $1.52 = \dfrac{dR}{dt}(t_0) = \dfrac{F_1 - F_0}{t_1 - t_0} = 6 \cdot \dfrac{F_1 - 1.54}{\pi}$
  und daher $F_1 = \dfrac{1.52 \cdot \pi + 6 \cdot 1.54}{6} \approx 2.33$
- $z_1 := E\left(\vec{w}(t_1)\right) = E\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) = -0.45 + 1.46 \cdot \dfrac{\pi}{2} = 1.84$

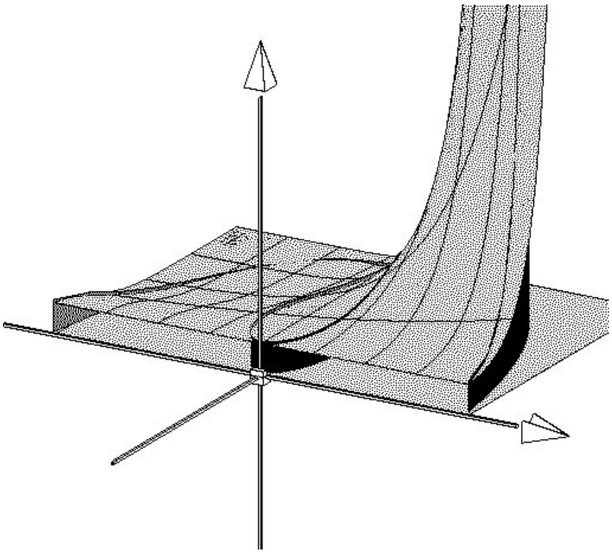

Bild 16.1.5 zu Aufgabe 16.1
Wanderweg und Temperaturen

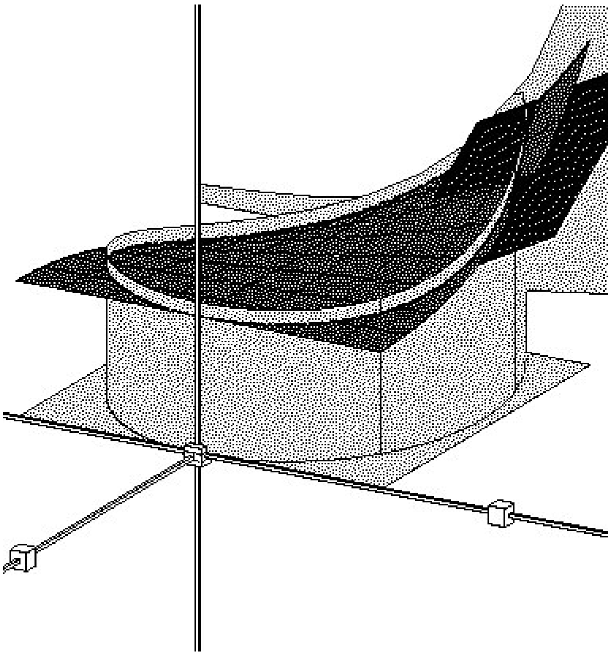

Bild 16.1.6 zu Aufgabe 16.1
Tangentialebene in $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \cdot \sqrt{3}\right)$

Aufgabe 16.1f) Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_2, an dem die Temperatur maximal ist, und zeichnen Sie diesen Wert in die Fläche $z = F(x, y)$ ein.

Lösung von Aufgabe 16.1f): (Extremwerte)

Bild 16.1.5 zeigt den Wanderweg und die zugehörigen Temperaturen.

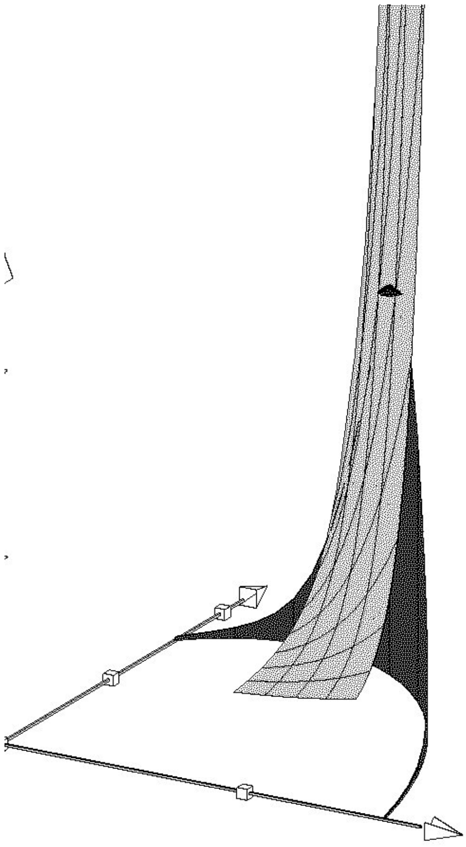

Bild 16.1.7 zu Aufgabe 16.1
Maximum

Ein kleines Programm liefert das Ergebnis:

```
pi = 4 * ATN(1)
max = 0
FOR i = 0 TO 1000
t = -pi + i / 1000 * pi / 2
temp = EXP(t ^ 3 * COS(t) * (SIN(t)) ^ 2)
IF temp > max THEN max = temp: t2 = t
NEXT i
PRINT "t2="; t2;
PRINT "   maximale Temperatur="; max
END
```

Dann ist $t_2 = -2.40$ und die maximale Temperatur beträgt $R(t_2) = 105$.