

17 Niveaufläche und Gradient

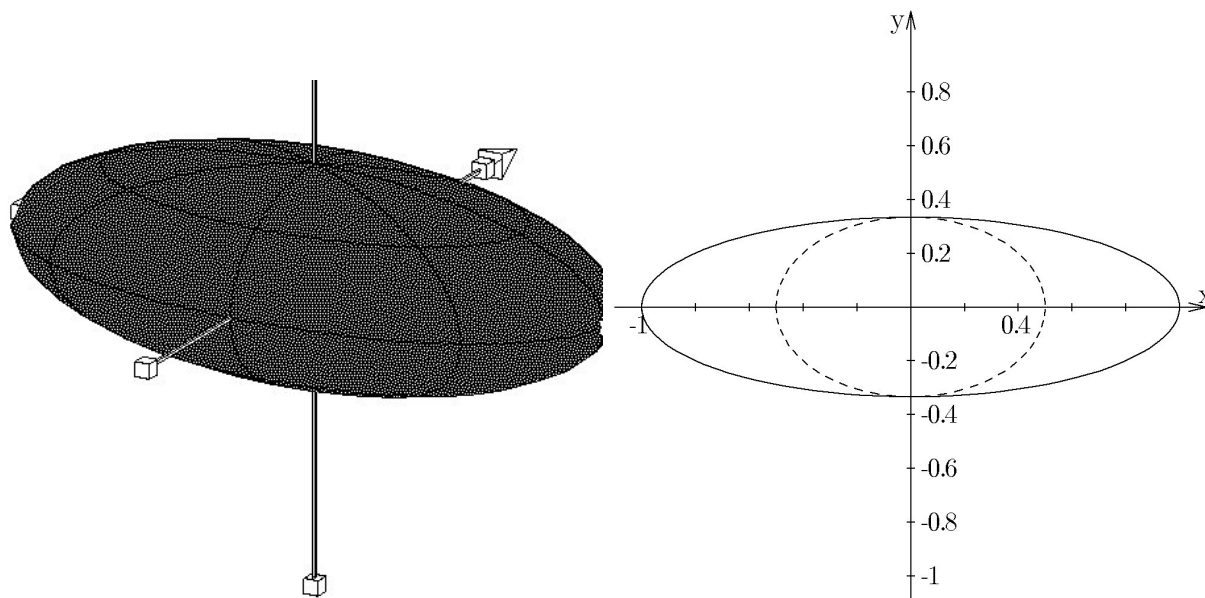
Aufgabe 17.1:

Es sei das Skalarfeld

$$S(x, y, z) = x^2 + 4 \cdot y^2 + 9 \cdot z^2$$

gegeben: jedem Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ wird ein „Skalar“ $S(x, y, z)$ zugeordnet. Zeichnen Sie die durch $S(x, y, z) = 1$ beschriebene Niveaufläche.

Lösung zu Aufgabe 17.1:



Aufgabe 17.1

Niveaufläche $x^2 + 4 \cdot y^2 + 9 \cdot z^2 = 1$

Aufgabe 17.1

Schnitt der Niveaufläche
mit der Ebene $y = 0$ (ausgezogen)
mit der Ebene $x = 0$ (gestrichelt)

Aufgabe 17.2: Bestimmen Sie den Gradienten im Punkt $P = (0.8, -0.24, 0.12)$ und zeigen Sie, dass dieser senkrecht auf der Tangentialebene in dem Punkt P steht.

Lösung zu Aufgabe 17.2:

$$\text{Es ist } \text{grad}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial x} \\ \frac{\partial S}{\partial y} \\ \frac{\partial S}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ 8 \cdot y \\ 18 \cdot z \end{pmatrix} \implies \text{grad}(0.80, -0.24, 0.12) = \begin{pmatrix} 1.60 \\ -1.92 \\ 2.16 \end{pmatrix}$$

Es soll gezeigt werden, dass dieser Vektor senkrecht auf der Tangentialebene in P steht.

Bestimmung der Tangentialebene:

Wir wählen für die Fläche $S(x, y, z) = 1$ die Darstellung $z = f(x, y)$:

$$z = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 - x^2 - 4 \cdot y^2}$$

Dann ist

$$\left. \begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - 4 \cdot y^2}} \\ f_y(x, y) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-4 \cdot y}{\sqrt{1 - x^2 - 4 \cdot y^2}} \end{aligned} \right\} \implies \left\{ \begin{aligned} f_x(0.80, -0.24) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-0.80}{\sqrt{1 - 0.80^2 - 4 \cdot 0.24^2}} = \frac{-0.80}{3 \cdot 0.36} \approx -0.74 \\ f_y(0.80, -0.24) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 0.24}{\sqrt{1 - 0.80^2 - 4 \cdot 0.24^2}} = \frac{0.96}{3 \cdot 0.36} \approx 0.89 \end{aligned} \right.$$

Damit kann die Gleichung der Tangentialebene in dem Punkt P aufgestellt werden:

$$T = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0.12 - 0.74 \cdot (x - 0.80) + 0.89 \cdot (y + 0.24) \}$$

oder

$$T = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -0.74 \cdot x + 0.89 \cdot y - z = -0.12 - 0.74 \cdot 0.80 - 0.89 \cdot 0.24 = -0.93 \}$$

Die Tangentialebene in P hat daher die Normalenrichtung $\vec{n}_T = (-0.74, 0.89, -1)$.

Nun ist die Frage zu beantworten, ob die Tangentialebene senkrecht auf dem Gradienten steht. Dazu ist zu untersuchen, ob der Gradient und die Normalenrichtung parallel zueinander sind:

Wenn $\begin{pmatrix} -0.74 \\ 0.89 \\ -1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1.60 \\ -1.92 \\ 2.16 \end{pmatrix}$ gelten soll,

dann muss es eine reelle Zahl λ geben mit $\lambda \cdot \begin{pmatrix} -0.74 \\ 0.89 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.60 \\ -1.92 \\ 2.16 \end{pmatrix}$. Für $\lambda = -0.21$ ist diese Gleichung erfüllt - also sind der Gradient und die Normalenrichtung parallel zueinander.

Aufgabe 17.3: Beschreiben Sie die Niveauläche durch Kugelkoordinaten und bestimmen Sie für den Punkt P die zugehörigen Kugelkoordinaten-Komponenten r_0 , φ_0 und ϑ_0 .

Lösung zu Aufgabe 17.3:

Beschreiben Sie die Niveauläche durch Kugelkoordinaten und bestimmen Sie für den Punkt P die zugehörigen Kugelkoordinaten-Komponenten r_0 , φ_0 und ϑ_0 .

Wir wählen die folgende Beschreibung für die Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \\ \frac{1}{2} \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) \\ \frac{1}{3} \cdot \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \text{ mit } -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } 0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \text{ und } R = 1$$

Dann ist $x^2 + 4 \cdot y^2 + 9 \cdot z^2 = 1$.

Der Punkt P hat die Koordinaten $(0.80, -0.24, 0.12)$ und damit den Abstand r_0 vom Nullpunkt mit $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 0.712$ und damit $r_0 \approx 0.844$

Der Punkt P hat die Koordinate $z_0 = \frac{1}{3} \cdot \sin(\vartheta_0) = 0.12$.

Daraus folgt $3 \cdot z_0 = 0.36 = \sin(\vartheta_0)$, also $\vartheta_0 \approx 0.368 = 21.1^\circ$

Ferner hat der Punkt P die Koordinate $x_0 = \cos(\vartheta_0) \cdot \cos(\varphi_0) = 0.80$.

Mit $\sin(\vartheta_0) = 0.36$ folgt $\cos(\vartheta_0) = \sqrt{1 - 0.36^2} = 0.9330$ und damit

$x_0 = 0.8 = \cos(\vartheta_0) \cdot \cos(\varphi_0) = 0.9330 \cdot \cos(\varphi_0)$,

also $0.8575 = \cos(\varphi_0)$ und damit $\varphi_0 = -0.540 = -31.0^\circ$

Aufgabe 17.4: Zeigen Sie, dass der Gradient $\text{grad}(P)$ in die Richtung zeigt, in der S von P aus maximal ansteigt.

Lösung zu Aufgabe 17.4:

Wir schreiben ein kleines Programm

```
pi = 4 * ATN(1)
eps = .001
max = -1000
x0 = .8: y0 = -.24: z0 = .12
s0 = x0 ^ 2 + 4 * y0 ^ 2 + 9 * z0 ^ 2
gx = 1.6: gy = -1.92: gz = 2.16
q = SQR(gx ^ 2 + gy ^ 2 + gz ^ 2)
gxn = gx / q: gyn = gy / q: gzn = gz / q
x2 = x0 + gxn * eps: y2 = y0 + gyn * eps: z2 = z0 + gzn * eps
s2 = x2 ^ 2 + 4 * y2 ^ 2 + 9 * z2 ^ 2
FOR i = 0 TO 180
FOR j = 0 TO 360
u = -pi / 2 + i / 180 * pi
v = j / 360 * 2 * pi
x = x0 + eps * COS(u) * COS(v)
y = y0 + eps * COS(u) * SIN(v)
z = z0 + eps * SIN(u)
s = x ^ 2 + 4 * y ^ 2 + 9 * z ^ 2
ds = s - s0
IF ds > max THEN max = ds: x1 = x: y1 = y: z1 = z: s1 = s
NEXT j: NEXT i
END
```

Dann lautet das Ergebnis:

Punkt P = (.8 , -.24 , .12)
Temperatur im Punkt P : 1

Gradient in P : $\text{grad}(P) = (1.6 , -1.92 , 2.16)$
(normierter) Gradient in P : $\text{grad}(P) = (.4843595 , -.5812314 , .6538853)$
Punkt P2 = P + .001 * $\text{grad}(P) = (.8004844 , -.2405812 , .1206539)$
Temperatur im Punkt P2: s2= 1.003309

Berechnung maximaler Temperatur in der Umgebung von P:
Im Punkt P1 = (.8004851 , -.2405781 , .1206561) ist die Temperatur maximal:
Temperatur im Punkt P1 : 1.003309

Richtung maximaler Steigung = (.4851222 , -.5781353 , .6560609)

Vergleich:

Es sollten parallel sein:

- Richtung maximaler Steigung
- Gradient in P

Es ist $\text{grad}(P) = (.4843595, -.5812313, .6538853) \approx (.4851222, -.5781353, .6560609)$.

Aufgabe 17.5:

Wir betrachten die Niveauläche

$$f(x, y, z) = x^3 + e^y \cdot \sin(z) = \frac{5}{2}$$

a) Zeichnen Sie in der Umgebung des Punktes $Q_0 = (1, \ln(3), \frac{\pi}{6})$ die ungefähre Lage der Niveauläche $f(x, y, z) = \frac{5}{2}$

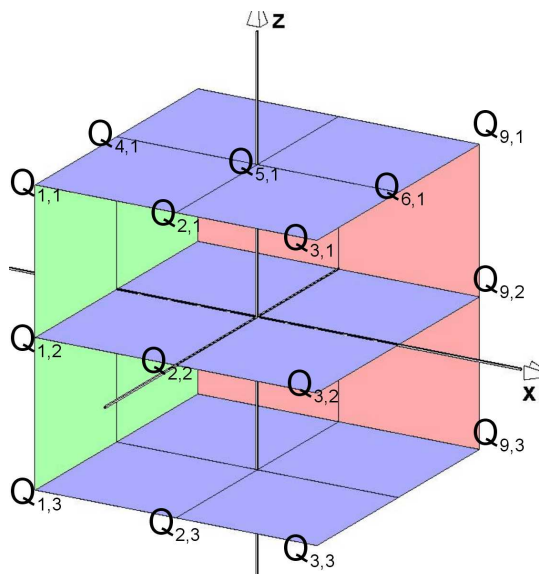
Hinweis:: Definieren Sie um den Punkt Q herum 9+8+9 Punkte und bestimmen Sie für diese Punkte jeweils den Funktionswert f .

Lösung zu Aufgabe 17.5:a)Um den Punkt Q herum werden 9+8+9 Punkte definiert:Wähle $\varepsilon = 0.1$ und setze

$$\begin{aligned} Q_{1,1} &= (1 - \varepsilon, \ln(3) - \varepsilon, \frac{\pi}{6} + \varepsilon), & Q_{2,1} &= (1, \ln(3) - \varepsilon, \frac{\pi}{6} + \varepsilon), & Q_{3,1} &= (1 + \varepsilon, \ln(3) - \varepsilon, \frac{\pi}{6} + \varepsilon), \\ Q_{4,1} &= (1 - \varepsilon, \ln(3), \frac{\pi}{6} + \varepsilon), & Q_{5,1} &= (1, \ln(3), \frac{\pi}{6} + \varepsilon), & Q_{6,1} &= (1 + \varepsilon, \ln(3), \frac{\pi}{6} + \varepsilon), \\ Q_{7,1} &= (1 - \varepsilon, \ln(3) + \varepsilon, \frac{\pi}{6} + \varepsilon), & Q_{8,1} &= (1, \ln(3) + \varepsilon, \frac{\pi}{6} + \varepsilon), & Q_{9,1} &= (1 + \varepsilon, \ln(3) + \varepsilon, \frac{\pi}{6} + \varepsilon), \\ Q_{1,2} &= (1 - \varepsilon, \ln(3) - \varepsilon, \frac{\pi}{6}), & Q_{2,2} &= (1, \ln(3) - \varepsilon, \frac{\pi}{6}), & Q_{3,2} &= (1 + \varepsilon, \ln(3) - \varepsilon, \frac{\pi}{6}), \\ Q_{4,2} &= (1 - \varepsilon, \ln(3), \frac{\pi}{6}), & Q_0 &= (1, \ln(3), \frac{\pi}{6}), & Q_{6,2} &= (1 + \varepsilon, \ln(3), \frac{\pi}{6}), \\ Q_{7,2} &= (1 - \varepsilon, \ln(3) + \varepsilon, \frac{\pi}{6}), & Q_{8,2} &= (1, \ln(3) + \varepsilon, \frac{\pi}{6}), & Q_{9,2} &= (1 + \varepsilon, \ln(3) + \varepsilon, \frac{\pi}{6}), \\ Q_{1,3} &= (1 - \varepsilon, \ln(3) - \varepsilon, \frac{\pi}{6} - \varepsilon), & Q_{2,3} &= (1, \ln(3) - \varepsilon, \frac{\pi}{6} - \varepsilon), & Q_{3,3} &= (1 + \varepsilon, \ln(3) - \varepsilon, \frac{\pi}{6} - \varepsilon), \\ Q_{4,3} &= (1 - \varepsilon, \ln(3), \frac{\pi}{6} - \varepsilon), & Q_{5,3} &= (1, \ln(3), \frac{\pi}{6} - \varepsilon), & Q_{6,3} &= (1 + \varepsilon, \ln(3), \frac{\pi}{6} - \varepsilon), \\ Q_{7,3} &= (1 - \varepsilon, \ln(3) + \varepsilon, \frac{\pi}{6} - \varepsilon), & Q_{8,3} &= (1, \ln(3) + \varepsilon, \frac{\pi}{6} - \varepsilon), & Q_{9,3} &= (1 + \varepsilon, \ln(3) + \varepsilon, \frac{\pi}{6} - \varepsilon), \end{aligned}$$

Dann ergeben sich folgende Funktionswerte

i,j	$f(Q_{i,j})$	i,j	$f(Q_{i,j})$	i,j	$f(Q_{i,j})$
$Q_{1,1}$	2.31	$Q_{2,1}$	2.59	$Q_{3,1}$	2.92
$Q_{4,1}$	2.48	$Q_{5,1}$	2.75	$Q_{6,1}$	3.08
$Q_{7,1}$	2.67	$Q_{8,1}$	2.94	$Q_{9,1}$	3.27
$Q_{1,2}$	2.09	$Q_{2,2}$	2.36	$Q_{3,2}$	2.69
$Q_{4,2}$	2.23	Q_0	2.50	$Q_{6,2}$	2.83
$Q_{6,2}$	2.39	$Q_{7,2}$	2.66	$Q_{8,2}$	2.99
$Q_{1,3}$	1.84	$Q_{2,3}$	2.12	$Q_{3,3}$	2.45
$Q_{4,3}$	1.96	$Q_{5,3}$	2.23	$Q_{6,3}$	2.56
$Q_{7,3}$	2.09	$Q_{8,3}$	2.36	$Q_{9,3}$	2.69

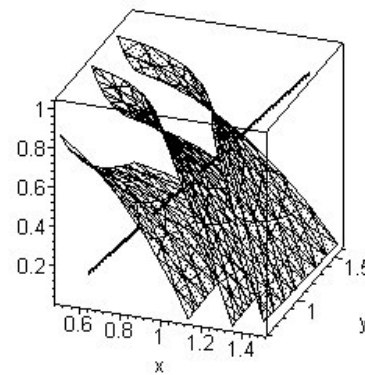
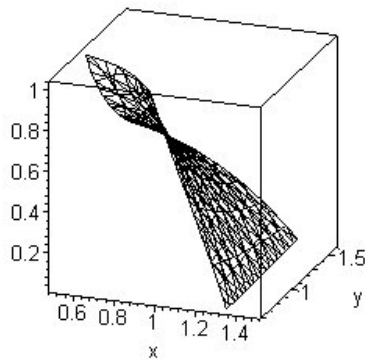


Aufgabe 17.5

Also schneidet die Fläche den Quader aus diesen 27 Punkten

1. zwischen $Q_{4,1}$ und $Q_{7,1}$
2. zwischen $Q_{4,1}$ und $Q_{5,1}$
3. in Q_0
4. zwischen $Q_{3,3}$ und $Q_{6,3}$
5. zwischen $Q_{5,3}$ und $Q_{6,3}$
6. zwischen $Q_{8,3}$ und $Q_{9,3}$

Mit Hilfe von MAPLE ergeben sich folgende Darstellungen:



Aufgabe 17.5

Niveaufläche $x^3 + e^y \cdot \sin(z) = \frac{5}{2}$
 $Q = (1, \ln(3), \frac{\pi}{6})$

Aufgabe 17.5:

Niveauflächen und $\text{grad}(Q)$

$$\begin{aligned} x^3 + e^y \cdot \sin(z) &= \frac{3}{2} \\ x^3 + e^y \cdot \sin(z) &= \frac{5}{2} \\ x^3 + e^y \cdot \sin(z) &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 17.6: Berechnen Sie die Richtungsableitung von Q in Richtung des Vektors $(1, 1, 1)$.

Lösung zu Aufgabe 17.6:

Vom Punkt Q_0 aus in Richtung $(1, 1, 1)$ befindet sich der Punkt $Q_{9,1}$.

Es ist $\Delta S := f(Q_{9,1}) - f(Q_0) = 3.27 - 2.5 = 0.77$

und $\Delta Q = |Q_0 - Q_{9,1}| = \sqrt{3} \cdot \varepsilon = 0.17$

Also ist die Steigung $\frac{\Delta S}{\Delta Q} \approx \frac{0.77}{0.17} \approx 4.5$.

Nach Definition (z.B. REP S.524) ist die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(Q_0)$ von f in Richtung $\vec{a}$ an der Stelle Q_0 definiert durch

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(Q_0) := \text{grad } f(Q_0) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

falls f in Q_0 differenzierbar ist.

Hier ist $\text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 \cdot x^2 \\ e^y \cdot \sin(z) \\ e^y \cdot \cos(z) \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; damit ist $|\vec{a}| = \sqrt{3}$.

Also ist insgesamt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 \cdot x^2 \\ e^y \cdot \sin(z) \\ e^y \cdot \cos(z) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (3 \cdot x^2 + e^y \cdot \sin(z) + e^y \cdot \cos(z)).$$

und damit

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(Q_0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(3 \cdot 1^2 + e^{\ln(3)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + e^{\ln(3)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \right) \approx 4.1.$$

Aufgabe 17.7:

Aus Aufgabe 16.1 ist die Temperatur in der Höhe $z = 0$ bekannt: $F(x, y) = e^{x \cdot y^2}$. Nun wird eine allgemeinere Beschreibung der Temperatur gesucht: Es soll die Temperatur $G(x, y, z)$ so beschrieben werden, dass gilt $G(x, y, 0) = F(x, y)$.

Lösung zu Aufgabe 17.7:

Dazu wird folgender Ansatz gewählt:

$$G(x, y, z) = e^{x \cdot y^2} + z \cdot (x^2 + y^2)$$

Aufgabe 17.8:

Gegeben seien die Funktion $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ und die Punkte $(1, 0)$ und $(0, 2)$.

Bestimmen Sie einen Punkt (x, y) auf der Strecke zwischen $(1, 0)$ und $(0, 2)$, für den gilt

$$f((0, 2)) - f((1, 0)) = \text{grad } f(x, y) \circ ((0, 2) - (1, 0))$$

Lösung von Aufgabe 17.8:

Für $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist

$$f((0, 2)) - f((1, 0)) = 2^2 - 1^2 = 3$$

und es ist

$$\text{grad } f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (2 \cdot x, 2 \cdot y)$$

sowie

$$((0, 2) - (1, 0)) = (-1, 2)$$

Damit ist dann

$$\text{grad } f(x, y) \circ ((0, 2) - (1, 0)) = (2 \cdot x, 2 \cdot y) \circ (-1, 2) = -2 \cdot x + 4 \cdot y$$

Nun kann die Frage beantwortet werden, für welchen Punkt (x, y) auf der Strecke zwischen $(1, 0)$ und $(0, 2)$ die Eigenschaft

$$f((0, 2)) - f((1, 0)) = \text{grad } f(x, y) \circ ((0, 2) - (1, 0))$$

gilt:

Wenn der Punkt (x, y) auf der Strecke zwischen $(1, 0)$ und $(0, 2)$ liegt, dann gilt

$$y = -2 \cdot x + 2$$

Also sollen die beiden Gleichungen

$$y = -2 \cdot x + 2$$

$$3 = -2 \cdot x + 4 \cdot y$$

erfüllt sein.

Diese 2 Gleichungen mit zwei Unbestimmten haben als einzige Lösung den Punkt

$$P = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$