



18 Kurvenintegral, Vektorfeld und Potentialfeld

Altes Projekt „Urlaubswanderung“: Wenn eine Funktion bekannt ist, die die Temperaturverteilung auf einer Fläche (oder im Raum) beschreibt, dann wissen wir jetzt, auf welche Temperaturen wir uns auf einem vorgegebenen Weg in der Fläche (oder im Raum) einstellen müssen. Wir kennen den Temperaturverlauf in Abhängigkeit von dem Weg - und auch Maxima und Minima längs dieses Weges.

Neues Projekt „Paddler“: Wenn eine Funktion bekannt ist, die die Strömung (zwei- oder dreidimensional) in einem Gewässer beschreibt, dann wollen wir wissen, welche Arbeit wir zu leisten haben, wenn wir als Paddler auf einem vorgegebenen Weg durch dieses strömende Gewässer paddeln.

Kurvenintegral in einem Skalarfeld

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ (oder $G \subseteq \mathbb{R}^3$) ein einfach zusammenhängendes Gebiet, d.h. jede geschlossene Kurve aus G lässt sich auf einen Punkt aus G zusammenziehen.

Für ein Skalarfeld $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ und einen glatten Weg $C = \{\vec{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$ in G ist das **Kurvenintegral in dem Skalarfeld f** definiert durch

$$\int_C f \, ds := \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot |\dot{\vec{r}}(t)| \cdot dt$$

Aufgabe 18.1: Kurvenintegral in einem Skalarfeld

a) Es sei $G = \mathbb{R}^3$ und $C = \{\vec{r}(t) \mid 0 \leq t \leq 10\}$ mit $\vec{r}(t) = (t, 0, 0)$ und $f(x, y, z) = 2 \cdot x$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C f \, ds$.

Interpretation: Wenn f die Temperatur an dem Ort (x, y, z) beschreibt und ein Wanderer auf der Kurve C wandert, ist das Kurvenintegral die „Summe aller Temperaturen auf diesem Weg“.

Wie ist diese Summe zu bestimmen?

1. glatter Weg in $\mathbb{R}^3$

Zeichne den Weg auf der x -Achse, also von $x = 0$ bis $x = 10$.

Dann ist hier $\vec{r}(t) = (t, 0, 0)$ für $0 \leq t \leq 10$, also $a = 0$ und $b = 10$.

2. Skalarfeld f

Zu jedem Punkt (x, y, z) des Raumes $\mathbb{R}^3$ ist die Temperatur (als skalare Größe) bekannt:

Es ist $f(x, y, z) = 2 \cdot x$, also insbesondere $f(x, 0, 0) = 2 \cdot x$.

3. Kurvenintegral

Dann ist der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Weg und der Temperatur diese „Summe aller Temperaturen“:

Wegen $\dot{\vec{r}}(t) = (1, 0, 0)$ ist $|\dot{\vec{r}}(t)| = 1$

$$\text{ist } \int_C f \, ds = \int_{t=0}^{t=10} f(t, 0, 0) \cdot 1 \cdot dt = \int_{t=0}^{t=10} 2 \cdot t \cdot dt = [t^2]_{t=0}^{t=10} = 100$$

Interessanter wäre es vielleicht, den Mittelwert bezüglich des Weges zu berechnen, aber dann müsste noch durch die Länge des Weges dividiert werden:

Zeigen Sie, dass $\frac{\int_C f ds}{\int_C 1 ds}$ der Mittelwert der Temperaturen auf diesem Weg ist.

Lösung von Aufgabe 18.1a) Wegen $\vec{r}(t) = (t, 0, 0)$ ist $f(\vec{r}(t)) = f(t, 0, 0) = 2 \cdot t$.

Wegen $\vec{r}(t) = (t, 0, 0)$ ist $\dot{\vec{r}}(t) = (1, 0, 0)$ und damit $|\dot{\vec{r}}(t)| = |(1, 0, 0)| = 1$.

Also ist $\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_0^{10} (2 \cdot t) \cdot 1 dt = [t^2]_{t=0}^{t=10} = 100$

Zum Mittelwert:

Weg von bis		mittlere Temperatur auf diesem Stück Weg	Weg von bis		mittlere Temperatur auf diesem Stück Weg
0	1	1	5	6	11
1	2	3	6	7	13
2	3	5	7	8	15
3	4	7	8	9	17
4	5	9	9	10	19

Die Summe dieser mittleren Temperaturen beträgt 100, also ist der Mittelwert 10.

Die Summe dieser Temperaturen pro Weeinheit beträgt - wie oben gerechnet, 100.

Andererseits ist $\int_C 1 ds = \int_0^{10} (1) \cdot 1 dt = [t]_{t=0}^{t=10} = 10$ und damit $\frac{\int_C f ds}{\int_C 1 ds} = 10$, und das ist genau der Mittelwert.

18.1b) Die Aufgabe 18.1a) ist zu einfach. Sie zeigt nur den Umgang mit der Definition des Kurvenintegrals. Also wird die Temperaturverteilung etwas komplizierter:

Es sei $G = \mathbb{R}^3$ und $C = \{\vec{r}(t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ mit $\vec{r}(t) = (2 \cdot t, 0, 0)$ und $f(x, y, z) = 3 \cdot x^2$.

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C f ds$ und zeigen Sie, dass $\frac{\int_C f ds}{\int_C 1 ds}$ der Mittelwert der Temperaturen auf diesem Weg ist.

18.1c) Nun wird auch noch der Weg verändert:

Es sei $G = \mathbb{R}^3$ und $C = \{\vec{r}(t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ mit $\vec{r}(t) = (0, 2 \cdot t, 0)$ und $f(x, y, z) = 3 \cdot x^2$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C f ds$.

18.1d) Auch die Aufgaben 18.1b) und 18.1c) sind zu einfach, denn die Temperaturverteilung ist nur von einer Komponente abhängig. Also wird die Temperaturverteilung noch komplizierter. Auch der Weg soll nun nicht mehr geradlinig verlaufen:

Es sei $G = \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie für das Skalarfeld

$$f(x, y, z) = \frac{(y - z)^2}{x}$$

das Kurvenintegral längs des Weges

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ \frac{1}{3} \cdot t^3 + t \\ \frac{1}{3} \cdot t^3 - t + 2 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Lösung Aufgabe 18.1d)

Es ist der Weg definiert durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ \frac{1}{3} \cdot t^3 + t \\ \frac{1}{3} \cdot t^3 - t + 2 \end{pmatrix}$$

und folglich

$$\begin{aligned} - \quad f(\vec{r}(t)) &= f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{(y(t) - z(t))^2}{x(t)} = \frac{\left(\left(\frac{1}{3} \cdot t^3 + t\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 - t + 2\right)\right)^2}{t^2 + 1} \\ &= \frac{\left(\left(\frac{1}{3} \cdot t^3 + t\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 - t + 2\right)\right)^2}{t^2 + 1} = \frac{(2 \cdot t - 2)^2}{t^2 + 1} \end{aligned}$$

$$- \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot t \\ t^2 + 1 \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} |\dot{\vec{r}}(t)| &= \sqrt{(2 \cdot t)^2 + (t^2 + 1)^2 + (t^2 - 1)^2} = \sqrt{4 \cdot t^2 + (t^4 + 2 \cdot t^2 + 1) + (t^4 - 2 \cdot t^2 + 1)} \\ &= \sqrt{4 \cdot t^2 + 2 \cdot t^4 + 2} = \sqrt{2} \cdot (t^2 + 1) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_C f \, ds &= \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot |\dot{\vec{r}}(t)| \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{(2 \cdot t - 2)^2}{t^2 + 1} \cdot \sqrt{2} \cdot (t^2 + 1) \, dt \\ &= 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \int_0^1 (t - 1)^2 \, dt \\ &= \frac{4}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot [(t - 1)^3]_{t=0}^{t=1} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{2} \approx 1.89 \end{aligned}$$

Um dem Projekt „Paddler“ näherzukommen, genügt es nun nicht mehr, Temperaturfelder (Skalarfelder) zu betrachten, denn die Strömung im Gewässer ist selten nur eindimensional: Es gibt Strömungen in verschiedene Richtungen, zumeist in alle drei Achsenrichtungen. Daher definieren wir nun neben den Skalarfeldern noch „Vektorfelder“. In einem Vektorfeld stellen wir uns vor, dass zu jedem Punkt einer Fläche (oder des Raumes) ein Vektor (in Richtung und Stärke) gegeben ist - wie etwa ein Wind oder eben eine Strömung. Unter den Vektorfeldern betrachten wir eine besondere Klasse, die „Potentialfelder“, denn in Potentialfeldern lässt sich die Arbeit eines Paddlers besonders einfach berechnen, weil die Arbeit zwar vom Anfang und Ende des Weges, ansonsten aber nicht vom Weg abhängig ist¹⁾).

Definition Potentialfeld

¹⁾ Für die Schwerkraft ist bekannt:

Wenn Sie an einem Ort mit der Höhe h über NN einen Koffer mit der Masse m um 20 cm anheben, diesen beliebig weit tragen und ihn dann auf Höhe $h + h_1$ wieder um 20 cm absetzen, dann beträgt die Arbeit unabhängig vom Weg stets $m \cdot g \cdot h_1$.

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ (oder $G \subseteq \mathbb{R}^3$) ein einfach zusammenhängendes Gebiet, d.h. jede geschlossene Kurve aus G lässt sich auf einen Punkt aus G zusammenziehen.

Ein Vektorfeld $\vec{\Phi} : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ (oder $\vec{\Phi} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$) heißt **Potentialfeld**, wenn es eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\vec{\Phi} = \text{grad}(f) \quad (1)$$

Aufgabe 18.2 Untersuchen Sie, ob das Vektorfeld

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \cdot y \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld ist.

Lösung Aufgabe 18.2

Es wird hier eine Funktion $g = g(x, y)$ gesucht mit der Eigenschaft

$$\begin{pmatrix} x \\ x \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$$

Folglich muss gelten

$$g(x, y) = \int x \cdot dx, \text{ also } g(x, y) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + C(y)$$

und für diese Funktion g muss gelten

$$g_y = x \cdot y, \text{ also } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + C(y) \right) = x \cdot y$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial y} C(y) = x \cdot y \text{ oder } C(y) = \int x \cdot y \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y^2 + C^*$$

d.h. $C(y)$ ist auch von x abhängig. Also ist $\vec{f}$ kein Potentialfeld.

Aufgabe 18.3: Untersuchen Sie, ob das Vektorfeld

$$\vec{\Phi}(\vec{x}) = \vec{\Phi} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x + y \\ x + 2 \cdot y \cdot z \\ y^2 + 2 \cdot z \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld ist.

Lösung Aufgabe 18.3:

Für $G := \mathbb{R}^3$ nehmen wir an, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion mit $\vec{\Phi}(\vec{x}) = \text{grad } (f(\vec{x}))$.

$$\begin{aligned} \text{Wegen } \text{grad } (f(\vec{x})) = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix} \text{ muss nach (1) für die Funktion } f(\vec{x}) \text{ dann gelten} \\ \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x + y \\ x + 2 \cdot y \cdot z \\ y^2 + 2 \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

1. Zeile

Wir versuchen, zunächst die erste Zeile von (2) auszuwerten:

$$u(x, y, z) = 2 \cdot x + y = f_x$$

Dann muss gelten

$$f(x, y, z) = \int f_x(x, y, z) dx = \int (2 \cdot x + y) dx = x^2 + x \cdot y + c(y, z) \quad (3)$$

wobei $c(y, z)$ eine beliebige Funktion von y und z sein darf - aber $c(y, z)$ darf keine Funktion von x sein.

2. Zeile

Nun kennen wir die Funktion $f(\vec{x})$ schon etwas und können mit dieser weiterrechnen:

$$\text{Aus } f(x, y, z) = x^2 + x \cdot y + c(y, z) \quad \text{folgt} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + x \cdot y + c(y, z)) = x + c_y(y, z)$$

Andererseits muss nach (2) gelten

$$v(x, y, z) = x + 2 \cdot y \cdot z = f_y$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich durch Vergleich, dass

$$c_y(y, z) = 2 \cdot y \cdot z$$

gelten muss. Folglich ist

$$c(y, z) = \int c_y(y, z) dy = \int 2 \cdot y \cdot z dy = y^2 \cdot z + d(z) \quad (4)$$

wobei $d(z)$ eine Funktion von z sein kann.

Nach (3) ist daher

$$f(x, y, z) = x^2 + x \cdot y + y^2 \cdot z + d(z) \quad (5)$$

3. Zeile

Nun kennen wir die Funktion $f(\vec{x})$ schon besser und können mit Gleichung (5) weiterrechnen:

$$\text{Aus } f(x, y, z) = x^2 + x \cdot y + y^2 \cdot z + d(z) \quad \text{folgt} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + x \cdot y + y^2 \cdot z + d(z)) = y^2 + d_z(z)$$

Andererseits muss nach (2) gelten

$$w(x, y, z) = y^2 + 2 \cdot z = f_z$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich durch Vergleich, dass

$$d_z(z) = 2 \cdot z$$

gelten muss. Folglich ist

$$d(z) = \int d_z(z) \cdot dz = \int 2 \cdot z \cdot dz = z^2 + e \quad (6)$$

Nach (5) ist daher

$$f(x, y, z) = x^2 + x \cdot y + y^2 \cdot z + z^2 + e \quad (7)$$

für $e = 0$ ist also $f(x, y, z) = x^2 + x \cdot y + y^2 \cdot z + z^2$ eine Potentialfunktion des Vektorfeldes $\vec{\Phi}$.
Damit ist $\vec{\Phi}$ ein Potentialfeld.

Integrabilitätsbedingung

Ist $\vec{\Phi} = (f_x, f_y, f_z)$ ein Potentialfeld in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^3$, so gilt dort

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x} \quad .$$

In der Ebene (also für $G \subseteq \mathbb{R}^2$) reduziert sich die Integrabilitätsbedingung auf $\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}$.

siehe auch Aufgabe 18.5

Kurvenintegral in einem Vektorfeld

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

Für ein Vektorfeld $\vec{\Phi} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ und einen glatten Weg $C = \{\vec{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$ in G ist das **Kurvenintegral in dem Vektorfeld $\vec{\Phi}$** definiert durch

$$\int_C \vec{\Phi} d\vec{r} := \int_a^b \vec{\Phi}(\vec{r}(t)) \circ \dot{\vec{r}}(t) dt$$

wobei $\circ$ das Skalarprodukt kennzeichnet.

Aufgabe 18.4:

Es sei $G = \mathbb{R}^3$.

Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{\Phi} : \begin{cases} G & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2 \cdot \pi \cdot x) \\ \cos(2 \cdot \pi \cdot x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

das Kurvenintegral $\int_C \vec{\Phi} d\vec{r}$

a) für die geradlinige Verbindung C vom Punkt $P = (0, 0, 0)$ zum Punkt $Q = (1, 0, 0)$

b) für die geradlinige Verbindung C vom Punkt $P = (0, 0, 0)$ zum Punkt $Q = (\frac{1}{2}, 0, 0)$

c) für die geradlinige Verbindung C vom Punkt $P = (\frac{1}{4}, 0, 0)$ zum Punkt $Q = (\frac{1}{4}, 1, 0)$

d) für den parabelförmigen Weg C vom Punkt $P = (0, 0, 0)$ zum Punkt $Q = (1, 0, 0)$ mit dem Parabelscheitel in dem Punkt $S = (\frac{1}{2}, 0, 1)$

e) für den parabelförmigen Weg C aus Aufgabe 18.4d) vom Punkt $P = (0, 0, 0)$ zum Parabelscheitel $S = (\frac{1}{2}, 0, 1)$

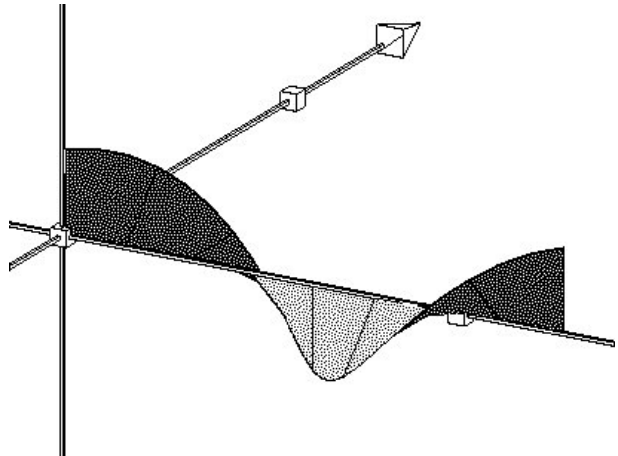
f) für den parabelförmigen Weg C aus Aufgabe 18.4d) vom Parabelscheitel $S = (\frac{1}{2}, 0, 1)$ zum Punkt $Q = (1, 0, 0)$.

Lösung von Aufgabe 18.4a)

Es ist $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$ und damit $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{\Phi}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \\ \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \end{pmatrix}$

Damit ist dann

$$\int_C \vec{\Phi} d\vec{r} = \int_{t=0}^{t=1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \\ \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$



Aufgabe 18.4

Vektorfeld

$$\vec{\Phi}(\vec{x}) = (0, \sin(2 \cdot \pi \cdot x), \cos(2 \cdot \pi \cdot x))$$

Lösung von Aufgabe 18.4b)

Es ist $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$ und damit $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{\Phi}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\pi \cdot t) \\ \cos(\pi \cdot t) \end{pmatrix}$

Damit ist dann $\int_C \vec{\Phi} d\vec{r} = \int_{t=0}^{t=1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\pi \cdot t) \\ \cos(\pi \cdot t) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$

Interpretation des Ergebnisses von Aufgabe 18.4b) Die durch das Vektorfeld Φ beschriebene Kraft (Strömung oder Wind) wirkt an jeder Stelle des Weges senkrecht zur Wegrichtung. Dann ist die Arbeit, die zum Zurücklegen des Weges erforderlich ist, gleich Null.

Was geschieht, wenn der Weg nicht senkrecht zur Kraftrichtung steht?

Lösung von Aufgabe 18.4c)

Es ist $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$ und damit $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

sowie $\vec{\Phi}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\frac{\pi}{2}) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Damit ist dann $\int_C \vec{\Phi} d\vec{r} = \int_{t=0}^{t=1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 1$

Interpretation des Ergebnisses von Aufgabe 18.4c): Es gibt Rückenwind: Die Kraft unterstützt das Fortkommen auf dem Weg und leistet dabei die Arbeit 1.

Lösung von Aufgabe 18.4d)

Es ist $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 - 4 \cdot (t - \frac{1}{2})^2 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$ und damit $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \cdot (t - \frac{1}{2}) \end{pmatrix}$

sowie $\vec{\Phi}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \\ \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \end{pmatrix}$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} \int_C \vec{\Phi} d\vec{r} &= \int_{t=0}^{t=0.5} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \\ \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \cdot (t - \frac{1}{2}) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^{t=1} \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \cdot \left(-8 \cdot (t - \frac{1}{2})\right) dt \\ &= -8 \cdot \int_{t=0}^{t=1} t \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) dt + 4 \cdot \int_{t=0}^{t=1} \cos(2 \cdot \pi \cdot t) dt \\ &= \left[-\frac{2}{\pi^2} \cdot (\cos(2 \cdot \pi \cdot t) + 2 \cdot \pi \cdot t \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)) \right]_{t=0}^{t=1} + \left[\frac{2}{\pi} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Interpretation des Ergebnisses von Aufgabe 18.4d): Dieses Ergebnis ist unerwartet.

Lösung von Aufgabe 18.4e)

Unter Verwendung der Ergebnisse aus Aufgabe 18.4d) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{\Phi} d\vec{r} &= \left[-\frac{2}{\pi^2} \cdot (\cos(2 \cdot \pi \cdot t) + 2 \cdot \pi \cdot t \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)) \right]_{t=0}^{t=0.5} + \left[\frac{2}{\pi} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \right]_{t=0}^{t=0.5} \\
 &= -\frac{2}{\pi^2} \cdot [\cos(\pi) + \pi \cdot \sin(\pi) - (\cos(0) + 0)] + \frac{2}{\pi} \cdot [\sin(\pi) - \sin(0)] \\
 &= -\frac{2}{\pi^2} \cdot [-1 - 1] + 0 = \frac{4}{\pi^2} \approx 0.405
 \end{aligned}$$

Interpretation des Ergebnisses von Aufgabe 18.4e): Und welche Arbeit ist dann auf dem Rest des Weges aus Aufgabe 18.4d), also von S bis Q , zu erwarten?

Lösung von Aufgabe 18.4f)

Unter Verwendung der Ergebnisse aus Aufgabe 18.4d) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{\Phi} d\vec{r} &= \left[-\frac{2}{\pi^2} \cdot (\cos(2 \cdot \pi \cdot t) + 2 \cdot \pi \cdot t \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)) \right]_{t=0.5}^{t=1} + \left[\frac{2}{\pi} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \right]_{t=0.5}^{t=1} \\
 &= -\frac{2}{\pi^2} \cdot [\cos(2 \cdot \pi) + 2 \cdot \pi \cdot \sin(2 \cdot \pi) - (\cos(\pi) + \pi \cdot \sin(\pi))] + \frac{2}{\pi} \cdot [\sin(2 \cdot \pi) - \sin(\pi)] \\
 &= -\frac{2}{\pi^2} \cdot [1 + 0 - (-1 + 0)] + \frac{2}{\pi} \cdot [0 - 0] \\
 &= -\frac{4}{\pi^2} + \frac{2}{\pi} \cdot 0 = -\frac{4}{\pi^2} \approx -0.405
 \end{aligned}$$

Interpretation des Ergebnisses von Aufgabe 18.4f): Vergleich der drei Ergebnisse [18.4d), 18.4e) und 18.4f)] bestätigt dann, dass diese Art der Formulierung der Arbeit richtig sein könnte.

Aufgabe 18.5:

Es seien

$$G = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z > 0\}$$

und

$$\vec{\Phi} : \begin{cases} G & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \rightarrow \begin{pmatrix} y^2 \cdot z^{-1} \\ 2 \cdot x \cdot y \cdot z^{-1} \\ 1 - x \cdot y^2 \cdot z^{-2} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

18.5a) Untersuchen Sie, ob das Vektorfeld $\vec{\Phi}$ auf G ein Potentialfeld ist.

18.5b) Berechnen Sie für das Vektorfeld aus Aufgabe 18.5a) für die geradlinige Verbindung C vom Punkt $P = (1, 1, 1)$ zum Punkt $Q = (2, 3, 4)$ das Kurvenintegral $\int_C \vec{\Phi} d\vec{r}$.

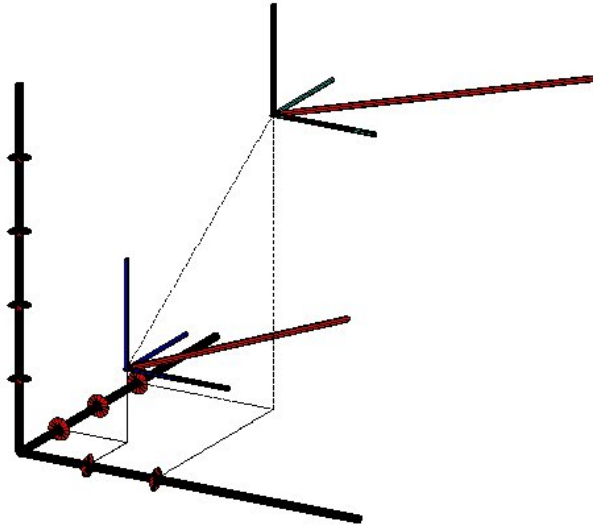


Bild zu Aufgabe 18.5

Lösung von Aufgabe 18.5 (direkte Rechnung):

$$\begin{aligned} C &= \{\vec{r}(t) \mid 0 \leq t \leq 1\} = \{(1, 1, 1) + t \cdot ((2, 3, 4) - (1, 1, 1)) \mid 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \mid x(t) = 1 + t, y(t) = 1 + 2 \cdot t, z(t) = 1 + 3 \cdot t, 0 \leq t \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1, 2, 3) \quad \text{und} \quad \vec{\Phi}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} (1 + 2 \cdot t)^2 \cdot (1 + 3 \cdot t)^{-1} \\ 2 \cdot (1 + t) \cdot (1 + 2 \cdot t) \cdot (1 + 3 \cdot t)^{-1} \\ 1 - (1 + t) \cdot (1 + 2 \cdot t)^2 \cdot (1 + 3 \cdot t)^{-2} \end{pmatrix}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \int_C \vec{\Phi} d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{\Phi}(\vec{r}(t)) \circ \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} (1 + 2 \cdot t)^2 \cdot (1 + 3 \cdot t)^{-1} \\ 2 \cdot (1 + t) \cdot (1 + 2 \cdot t) \cdot (1 + 3 \cdot t)^{-1} \\ 1 - (1 + t) \cdot (1 + 2 \cdot t)^2 \cdot (1 + 3 \cdot t)^{-2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(1 + 2 \cdot t)^2}{1 + 3 \cdot t} \right) + 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot (1 + t) \cdot (1 + 2 \cdot t)}{1 + 3 \cdot t} \right) + 3 \cdot \left(1 - \frac{(1 + t) \cdot (1 + 2 \cdot t)^2}{(1 + 3 \cdot t)^2} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5 + 16 \cdot t + 12 \cdot t^2}{1 + 3 \cdot t} - 3 \cdot t \cdot \frac{-1 - t + 4 \cdot t^2}{(1 + 3 \cdot t)^2} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5 + 34 \cdot t + 63 \cdot t^2 + 24 \cdot t^3}{(1 + 3 \cdot t)^2} \right) dt = \int_0^1 \left(\frac{8}{3} \cdot t + \frac{47}{9} - \frac{\frac{2}{9}}{(1 + 3 \cdot t)^2} \right) dt \\ &= \frac{4}{3} + \frac{47}{9} - \int_0^1 \frac{\frac{2}{9}}{(1 + 3 \cdot t)^2} dt = \frac{59}{9} - \left[\frac{2}{27} \cdot \frac{1}{1 + 3 \cdot t} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{59}{9} - \frac{1}{18} = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

Hilfssatz für eine alternative Lösung der Aufgabe 18.5:

(„Integrabilitätsbedingung und Potential“ aus REP Seite 543):

für $G \subseteq \mathbb{R}^2$:

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, d.h. jede geschlossene Kurve aus G lässt sich auf einen Punkt aus G zusammenziehen.

Ein Vektorfeld $\vec{\Phi} : \begin{cases} G & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \rightarrow \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \end{cases}$ besitzt auf dem Gebiet G genau dann eine Potentialfunktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, wenn u und v stetige partielle Ableitungen besitzen und die Bedingung

$$u_y = v_x \quad (1.2)$$

erfüllt ist. Dann ist die Potentialfunktion f definiert durch

$$f(x, y) = \int_{t=x_0}^{t=x} u(t, y) dt + \int_{t=y_0}^{t=y} v(x_0, t) dt$$

wobei (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt aus G ist.

für $G \subseteq \mathbb{R}^3$:

lautet die Bedingung (1.2)

$$w_y = v_z \quad \text{und} \quad u_z = w_x \quad \text{und} \quad u_y = v_x \quad (1.3)$$

und die Potentialfunktion f ist definiert durch

$$f(x, y, z) = \int_{t=x_0}^{t=x} u(t, y, z) dt + \int_{t=y_0}^{t=y} v(x_0, t, z) dt + \int_{t=z_0}^{t=z} w(x_0, y_0, t) dt$$

wobei (x_0, y_0, z_0) ein beliebiger Punkt aus G ist.

Lösung der Aufgabe 18.5

Die Lösung des Kurvenintegrals ist wegunabhängig, da das Vektorfeld ein Potentialfeld ist, denn es gilt:

$$w_y = -2 \cdot x \cdot y \cdot z^{-2} = v_z,$$

$$u_z = -y^2 \cdot z^{-2} = w_x \text{ sowie}$$

$$u_y = 2 \cdot y \cdot z^{-1} = v_x.$$

Daher ist das Vektorfeld $\vec{\Phi}$ auf G ein Potentialfeld und es gilt für ein $(x_0, y_0, z_0) \in G$:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_{t=x_0}^{t=x} (y^2 \cdot z^{-1}) dt + \int_{t=y_0}^{t=y} (2 \cdot x_0 \cdot t \cdot z^{-1}) dt + \int_{t=z_0}^{t=z} (1 - x_0 \cdot y_0^2 \cdot t^{-2}) dt \\ &= [y^2 \cdot z^{-1} \cdot t]_{t=x_0}^{t=x} + [x_0 \cdot t^2 \cdot z^{-1}]_{t=y_0}^{t=y} + [t + x_0 \cdot y_0^2 \cdot t^{-1}]_{t=z_0}^{t=z} \\ &= (y^2 \cdot z^{-1} \cdot x - y^2 \cdot z^{-1} \cdot x_0) + (x_0 \cdot y^2 \cdot z^{-1} - x_0 \cdot y_0^2 \cdot z^{-1}) \\ &\quad + (z + x_0 \cdot y_0^2 \cdot z^{-1} - z_0 - x_0 \cdot y_0^2 \cdot z_0^{-1}) \\ &= y^2 \cdot z^{-1} \cdot x + z + C \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\int_C \vec{\Phi} d\vec{r} = f(2, 3, 4) - f(1, 1, 1) = \left(\frac{9}{4} + 4\right) - (1 + 1) = \frac{13}{2}$$

Physik: Definition von Arbeit

Aus der Physik ist bekannt:

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg}$$

(eindimensional). Wenn sich die Kraft mit dem Weg ändert, also z.B. $\text{Kraft} = K = K(x)$, und wenn der Weg längs der x -Achse verläuft von $x = x_a$ bis $x = x_e$, so wird die Arbeit entsprechend aufgeteilt:

$$\text{Arbeit} = \int_{x=x_a}^{x=x_e} K(x) dx$$

Wenn eine Kraft K als (zweidimensionaler) Vektor geschrieben werden soll, also $\vec{K} = \vec{K}(x, y)$, und wenn auch der Weg zweidimensional beschrieben wird, also $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ mit $t_a \leq t \leq t_e$, so ergibt sich obige Definition, d.h.

$$\text{Arbeit} = \int_{t=t_a}^{t=t_e} \vec{K}(x, y) \circ \dot{\vec{r}}(t) dt$$

Wenn daher eine Kraft $\vec{K}$ definiert wird durch $\vec{K} = \vec{K}(x, y) = (5, 0)$, dann ist diese Kraft an jeder Stelle in der Ebene, also in jedem Punkt (x, y) , konstant und zeigt in Richtung $(1, 0)$ in der Stärke 5 (z.B. in N).

Wenn dann ein Weg beschrieben wird durch $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = t \cdot (1, 0)$ mit $1 \leq t \leq 3$, dann soll die Kraft K auf diesem Weg angewandt werden. Da $\dot{\vec{r}}(t) = 1 \cdot (1, 0)$ ist, ergibt sich für die Arbeit

$$\text{Arbeit} = \int_{t=1}^{t=3} (5, 0) \circ (1, 0) dt = \int_{t=1}^{t=3} 5 dt = [5 \cdot t]_{t=1}^{t=3} = 10$$

Anwendung:

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n = 2$ oder $n = 3$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

Die Arbeit A , die notwendig ist, um ein Fahrzeug der Masse 1 durch ein Vektorfeld $\vec{\Phi} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ längs des glatten Weges $C = \{\vec{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$ von $\vec{r}(a)$ nach $\vec{r}(b)$ zu schieben, ergibt sich in der Physik als $A = \int_C \vec{\Phi} d\vec{r}$.

Aufgabe 18.6: Paddler

Ein Paddler umkreist mit Abstand R zunächst einen Strudel (Nullpunkt), der links von ihm liegt, und anschliessend eine Boje (im Punkt $B = (2 \cdot R, 0)$), die ebenfalls zu seiner Linken liegt.

Die Strömung sei gegeben durch das Vektorfeld $\vec{\Phi} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{cases}$.

Berechnen Sie die Arbeit, die die Strömung dem Paddler bei seinen Umrundungen abnimmt.

Lösung der Aufgabe 18.6:

Der Strudel erzeugt das in der Aufgabe beschriebene Vektorfeld

$$\vec{\Phi}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Nach obigen Betrachtungen wird die Arbeit, die die Strömung dem Paddler bei der Umkreisung des Strudels auf dem Weg $C = \{\vec{x}(t) = R \cdot (\cos(t), \sin(t)) \mid 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi\}$ im Uhrzeigersinn abnimmt, bestimmt durch das Kurvenintegral

$$A = \int_C \vec{\Phi} \cdot d\vec{r}$$

also

$$A = \int_a^b \vec{\Phi}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) \cdot dt$$

Hier ist $\vec{x}(t) = R \cdot (\cos(t), \sin(t))$ und folglich

1. $\vec{\Phi}(\vec{x}(t)) = \vec{\Phi}(R \cdot \cos(t), R \cdot \sin(t)) = \frac{1}{R^2} \cdot (-R \cdot \sin(t), R \cdot \cos(t))$
2. $\dot{\vec{x}}(t) = R \cdot (-\sin(t), \cos(t))$

Damit kann dann das Integral A berechnet werden:

$$A = \int_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} \frac{1}{R^2} \cdot \begin{pmatrix} -R \cdot \sin(t) \\ R \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -R \cdot \sin(t) \\ R \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \cdot dt = \int_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} 1 \cdot dt = 2 \cdot \pi$$

(d.h. die Arbeit ist unabhängig vom Abstand R von dem Strudel.)

Nun soll noch um die Boje gepaddelt werden, die sich im Punkt $(2 \cdot R, 0)$ befindet.

In diesem Fall ist

$$C = \{\vec{x}(t) = (2 \cdot R + R \cdot \cos(t), R \cdot \sin(t)) \mid 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi\}$$

und folglich

$$\dot{\vec{x}}(t) = (-R \cdot \sin(t), R \cdot \cos(t))$$

Dann ist

$$\begin{aligned} A &= \int_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} \frac{1}{(2 \cdot R + R \cdot \cos(t))^2 + R^2 \cdot \sin^2(t)} \cdot \begin{pmatrix} -R \cdot \sin(t) \\ 2 \cdot R + R \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -R \cdot \sin(t) \\ R \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \cdot dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} \frac{1}{5 + 4 \cdot \cos(t)} \cdot (1 + 2 \cdot \cos(t)) \cdot dt \end{aligned}$$

Wie soll dieses Integral gelöst werden?

Wir machen uns zunächst eine Zeichnung.

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \int_{t=0}^{t=\pi} \frac{1 + 2 \cdot \cos(t)}{5 + 4 \cdot \cos(t)} \cdot dt \\ &= \left[-\arctan \left(\frac{1}{3} \cdot \tan \left(\frac{1}{2} \cdot t \right) \right) \right]_{t=0}^{t=\pi} \\ &\quad + \left[\arctan \left(\tan \left(\frac{1}{2} \cdot t \right) \right) \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0 \end{aligned}$$

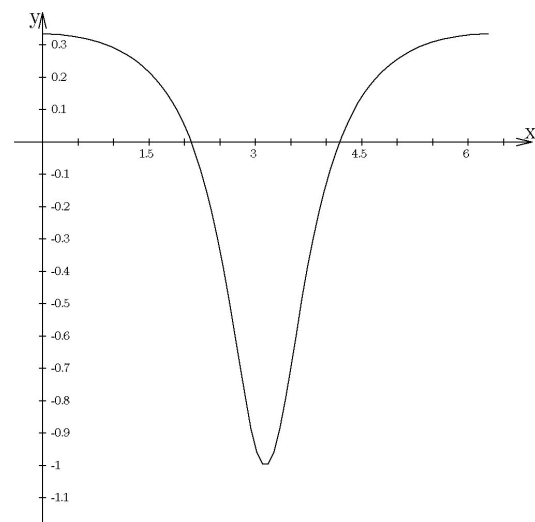


Bild zu Aufgabe 18.6 (Paddler)

Wie würde die „schulmäßige“ Bearbeitung dieses Problems lauten?

Auch nach F+H gibt es zwei Möglichkeiten:

a) **Tabelle unbestimmter Integrale (F+H 8.3)**

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \frac{1}{5+4\cdot\cos(t)} \cdot (1+2\cdot\cos(t)) \cdot dt \\
 &= \int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \frac{1}{5+4\cdot\cos(t)} \cdot dt + 2 \cdot \underbrace{\int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \frac{\cos(t)}{5+4\cdot\cos(t)} \cdot dt}_{F+H\,216 \text{ mit } a=1, b=5, c=4} \\
 &= \int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \frac{1}{5+4\cdot\cos(t)} \cdot dt \\
 &\quad + 2 \cdot \left(\left[\frac{t}{4} \right]_{t=0}^{t=2\cdot\pi} - \frac{5}{4} \cdot \int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \frac{1}{5+4\cdot\cos(t)} \cdot dt \right) \\
 &= -\frac{6}{4} \cdot \underbrace{\int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \frac{1}{5+4\cdot\cos(t)} \cdot dt}_{F+H\,215 \text{ mit } a=1, b=5, c=4, b>c} + \pi \\
 &= -\frac{6}{4} \cdot \left[\frac{2}{1\cdot\sqrt{25-16}} \cdot \arctan \left(\frac{(5-4)\cdot\tan\left(\frac{1\cdot t}{2}\right)}{\sqrt{25-16}} \right) \right]_{t=0}^{t=2\cdot\pi} + \pi \\
 &= -\frac{6}{4} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \arctan \left(\frac{1}{3} \cdot \tan \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right]_{t=0}^{t=2\cdot\pi} + \pi = - \left[\arctan \left(\frac{1}{3} \cdot \tan \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right]_{t=0}^{t=2\cdot\pi} + \pi \\
 &= -(\arctan(0) - \arctan(0)) + \pi = \pi
 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist - nach Vergleich mit der Zeichnung - falsch!

Nach MAPLE ist

$$\int \frac{1}{5+4\cdot\cos(t)} \cdot dt = \frac{2}{3} \cdot \arctan \left(\frac{1}{3} \cdot \tan \left(\frac{t}{2} \right) \right)$$

und

$$\int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \frac{1}{5+4\cdot\cos(t)} \cdot dt = \frac{2\cdot\pi}{3}$$

Andererseits ist (auch nach MAPLE)

$$\left[\frac{2}{3} \cdot \arctan \left(\frac{1}{3} \cdot \tan \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right]_{t=0}^{t=2\cdot\pi} = 0$$

Also zeigt MAPLE zwei verschiedene Ergebnisse; ist eines davon richtig?

b) **Generalsubstitution (F+H 8.1.5)**

$$\begin{aligned}
A &= \int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \frac{1}{5 + 4 \cdot \cos(t)} \cdot (1 + 2 \cdot \cos(t)) \cdot dt \\
x &= \tan\left(\frac{t}{2}\right) \\
\cos(t) &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\
dt &\stackrel{=}{=} \frac{2 \cdot dx}{1+x^2} \\
&= \int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \frac{1 + 2 \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}}{5 + 4 \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{2 \cdot dx}{1+x^2} \\
&= \int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \frac{(1+x^2) + 2 \cdot (1-x^2)}{5 \cdot (1+x^2) + 4 \cdot (1-x^2)} \cdot \frac{2}{1+x^2} \cdot dx \\
&= \int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \frac{6 - 2 \cdot x^2}{(9+x^2) \cdot (1+x^2)} \cdot dx \\
&\stackrel{\text{Partialbruchzerlegung}}{=} \int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \left(\frac{-3}{9+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) \cdot dx \\
&= \underbrace{\int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \frac{-3}{9+x^2} \cdot dx}_{F+H \text{ Integral 29, } X=3^2+x^2} + \int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \frac{1}{1+x^2} \cdot dx \\
&= \left[-3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \right]_{t=0}^{t=2\cdot\pi} + [\arctan(x)]_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \\
&= \left[\arctan(x) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \right]_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \\
&\stackrel{x=\tan(\frac{t}{2})}{=} \arctan(\tan(\pi)) - \arctan\left(\frac{\tan(\pi)}{3}\right) \\
&\quad - (\arctan(\tan(0)) - \arctan(\tan(0))) = 0
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist richtig!

Bemerkung zur Partialbruchzerlegung: Es gibt reelle Zahlen A, B, C, D mit

$$\frac{6 - 2 \cdot x^2}{(9+x^2) \cdot (1+x^2)} = \frac{A + B \cdot x}{9+x^2} + \frac{C + D \cdot x}{1+x^2}$$

denn durch die „Hauptnennermethode“ (d.h. dadurch, dass die rechte Seite auf den Hauptnenner gebracht wird), erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{6 - 2 \cdot x^2}{(9+x^2) \cdot (1+x^2)} &= \frac{A + A \cdot x^2 + B \cdot x + B \cdot x^3 + 9 \cdot C + C \cdot x^2 + 9 \cdot D \cdot x + D \cdot x^3}{(9+x^2) \cdot (1+x^2)} \\
&= \frac{(A + 9 \cdot C) + (B + 9 \cdot D) \cdot x + (A + C) \cdot x^2 + (B + D) \cdot x^3}{(9+x^2) \cdot (1+x^2)}
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich der Zähler ergibt sich

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} A + 9 \cdot C = 6 \\ A + C = -2 \end{array} \Rightarrow A = -2 - C \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} B + 9 \cdot D = 0 \\ B + D = 0 \end{array} \Rightarrow B = -D \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2 - C + 9 \cdot C = 6 \Rightarrow C = 1 \\ A = -3 \\ -D + 9 \cdot D = 0 \Rightarrow D = 0 \\ B = 0 \end{array} \right.$$

Also ist

$$\frac{6 - 2 \cdot x^2}{(9+x^2) \cdot (1+x^2)} = \frac{-3 + 0 \cdot x}{9+x^2} + \frac{1 + 0 \cdot x}{1+x^2}$$

Aufgabe 18.7:

Es sei das folgende Vektorfeld $\vec{v}$ gegeben:

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x \cdot \sin(y) - z^2 \cdot \sin(x) \\ x^2 \cdot \cos(y) \\ 2 \cdot z \cdot \cos(x) \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie eine Potentialfunktion f von $\vec{\Phi}$ an, falls eine solche existiert.

b) Ferner sei ein Weg in $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} e^t + t^{20} \\ t^5 \\ t^{17} + 1 \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \vec{\Phi} \cdot d\vec{r}$.

Lösung von Aufgabe 18.7a)

Wenn es ein Potential $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ von $\vec{\Phi}$ gibt, dann gilt:

$$\vec{v} = \text{grad}(f) = (f_x, f_y, f_z)$$

oder

$$\begin{cases} f(x, y, z) = \int v_1 \cdot dx = x^2 \cdot \sin(y) + z^2 \cdot \cos(x) + C(y, z) \\ f(x, y, z) = \int v_2 \cdot dy = x^2 \cdot \sin(y) + C(x, z) \\ f(x, y, z) = \int v_3 \cdot dz = z^2 \cdot \cos(x) + C(x, y) \end{cases}$$

Also gibt es eine Stammfunktion f : es gilt

$$f(x, y, z) = \int v_1 \cdot dx = x^2 \cdot \sin(y) + z^2 \cdot \cos(x) + K$$

(40)

Lösung von Aufgabe 18.7b)

Das Kurvenintegral ist definiert durch

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{t=0}^{t=1} \vec{v}(x(t), y(t), z(t)) \circ \dot{\vec{C}}(t) \cdot dt$$

Da $\vec{v}$ eine Stammfunktion besitzt, ist das Kurvenintegral wegunabhängig und es gilt

$$\int_{t=0}^{t=1} \vec{v}(x(t), y(t), z(t)) \circ \dot{\vec{C}}(t) \cdot dt = f(x(1), y(1), z(1)) - f(x(0), y(0), z(0))$$

$$\text{Hier ist } \begin{cases} x(1) = e^1 + 1^{20} = e + 1 & y(1) = 1^5 = 1 & z(1) = 1^{17} + 1 = 2 \\ x(0) = e^0 + 0^{20} = 1 & y(0) = 0^5 = 0 & z(0) = 0^{17} + 1 = 1 \end{cases}$$

also ist wegen

$$f(x(t), y(t), z(t)) = x(t)^2 \cdot \sin(y(t)) + z(t)^2 \cdot \cos(x(t))$$

einerseits

$$f(x(1), y(1), z(1)) = (e + 1)^2 \cdot \sin(1) + 4 \cdot \cos(e + 1) + 2 \cdot e + 2$$

und andererseits

$$f(x(0), y(0), z(0)) = 1 \cdot \sin(0) + 1 \cdot \cos(1) = \cos(1) \approx 0.54,$$

also

$$f(x(1), y(1), z(1)) - f(x(0), y(0), z(0)) = (e + 1)^2 \cdot \sin(1) + 4 \cdot \cos(e + 1) - \cos(1).$$

Damit ist dann das Kurvenintegral berechnet:

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = (e + 1)^2 \cdot \sin(1) + 4 \cdot \cos(e + 1) - \cos(1) \approx 13.8 \cdot 0.84 - 4 \cdot 0.84 - 0.54 \approx 7.69$$