Stand: 18. August 2008

http://www.iazd.uni-hannover.de/~windelberg/teach/ing

19 Strömung und Differentialgleichung

Aufgabe 19.1:

Es sei bekannt, dass die Oberflächen-Strömungsverhältnisse auf einem (unbekannten) Meer gegeben sind durch das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y) = (y, x)$$

Auf diesem Meer befindet sich in der Position $B = (-3, 5)$ ein Boot, dessen Motor defekt ist und daher im Meer treibt.

a) Zeigen Sie, dass das treibende Boot nach endlich langer Zeit den Hafen in der Position $H = (3, 5)$ errreicht.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Zeiteinheiten, wenn das Boot mit einer Geschwindigkeit von $u = 0.5$ *Wegeinheiten pro Zeiteinheit* treibt.

Lösung Aufgabe 19.1: A. Geometrische (iterative) Lösung

Am Ort $B = (x_0, y_0) = (-3, 5)$ strömt das Wasser in Richtung $\vec{v} = (y_0, x_0) = (5, -3)$. Eine Wegeinheit (d.h. ein Weg der Länge 1) in dieser Richtung wird daher durch den Vektor

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot (y_0, x_0) = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2 + 5^2}} \cdot (5, -3) \approx (0.857, 0.514)$$

beschrieben.

Das Boot treibt langsamer als die Strömung; wir messen, dass die Geschwindigkeit

$$\boxed{u = 0.5 \text{ Wegeinheiten pro Zeiteinheit}}$$

beträgt. Daher kann der Ort (x_1, y_1) angegeben werden, an dem sich das Boot nach einer Zeiteinheit befindet:

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) + 0.5 \cdot \vec{v}_0 \approx (-3, 5) + 0.5 \cdot (0.857, 0.514) \approx (-3 + 0.429)\,,\ 5 - 0.257) \approx (-2.571, 4.743)$$

Ein kleines Programm würde dann etwa wie folgt aussehen:

```
u = .5
x0 = -3: y0 = 5
PRINT "Geschwindigkeit: u="; u;" Wegeinheiten pro Zeiteinheit"
PRINT i; x0; y0
FOR i = 1 TO 13
x1 = x0 + u / SQR(x0 ^ 2 + y0 ^ 2) * y0
y1 = y0 + u / SQR(x0 ^ 2 + y0 ^ 2) * x0
PRINT i; x1; y1
x0 = x1: y0 = y1
NEXT i
END
```

Dieses Programm liefert dann folgende 13 Punkte:
$u = .5$

i	x	y	i	x	y
0	-3	5	7	0.256	3.844
1	-2.571	4.743	8	0.755	3.877
2	-2.132	4.504	9	1.246	3.973
3	-1.680	4.291	10	1.723	4.123
4	-1.214	4.108	11	2.184	4.315
5	-0.735	3.967	12	2.630	4.541
6	-0.243	3.876	13	3.063	4.792

Im 13. Zeitschritt wird also etwa die Position des Hafens erreicht.

Wenn das Boot langsamer treibt, wird es den Hafen in der Position $H = (3, 5)$ besser treffen!

Wenn also das Boot z.B. nur mit einer Geschwindigkeit von $u = 0.01$ *Wegeinheiten pro Zeiteinheit* treibt, dann wird der Hafen sehr viel genauer erreicht: nach 641 Zeiteinheiten erreicht das Boot den Punkt $(3.005, 4.998)$.

Aufstellung einer Differentialgleichung:

Die Änderung der beiden Variablen x und y mit der Zeit(einheit) kann nun wie folgt beschrieben werden:

$$\frac{dx}{dt} = x_1 - x_0 = \frac{u}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot y_0 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = y_1 - y_0 = \frac{u}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot x_0$$

und folglich

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{u}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \cdot x_0}{\frac{u}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \cdot y_0} = \frac{x_0}{y_0}$$

Damit lautet die Differentialgleichung

$$\boxed{y' = \frac{x}{y}}$$

Diese Differentialgleichung hat die Form

$$\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)}$$

und soll daher mit dem Verfahren Trennung der Veränderlichen gelöst werden.

Lösung Aufgabe 19.1: B. Lösung der Differentialgleichung

Fall $g(y) = 0$: Es ist $g(y) = \frac{1}{y}$. Daher kommt dieser Fall nicht vor.

Fall $g(y) \neq 0$: Nach TdV gilt nun

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx = \int x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 + c$$

Wegen $g(y) = \dfrac{1}{y}$ gilt $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int y \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot y^2$

und damit insgesamt $\dfrac{1}{2} \cdot y^2 = \dfrac{1}{2} \cdot x^2 + c$ oder $y^2 - x^2 = c^*$

d.h. die Differentialgleichung beschreibt Hyperbeln, die zur y-Axchse geöffnet und deren Asymptoten die Winkelhabierenden sind.

Aufgabe 19.2:

Ein Fluß strömt im Streifen $0 < x < 1$ mit der Wassergeschwindigkeit

$$\vec{w} = (0, 2 \cdot x \cdot (1 - x)) \text{ pro Zeiteinheit } \Delta t$$

Zur Zeit $t = 0$ startet der Schwimmer im Punkt $(1, 0)$ zur Flußüberquerung. Dabei schwimmt er mit der konstanten Relativgeschwindigkeit $v = 1/10$ pro Zeiteinheit Δt und immer in Richtung auf einen Zielpunkt $(0, 0)$. Geben Sie die Bahnkurve des Schwimmers an.

Lösung Aufgabe 19.2: A. Geometrische (iterative) Lösung

Von einem Startpunkt $P_0 = (x_0, y_0)$ erreicht der Schwimmer während eines festzusetzenden Zeitintervalls Δt den Ort (x_2, y_2), wobei sich die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers und die Schwimmgeschwindigkeit des Schwimmers vektoriell addieren.

Wir wählen folgende Routine

1. Startpunkt: $P_0 = (x_0, y_0) = (1, 0)$

2. Schwimmbewegung: Während einer Zeiteinheit Δt schwimmt er in Richtung auf den Punkt $(0, 0)$ um das Stück

$$\overline{schwimm}^{>} = v \cdot \left(\frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \frac{-y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right) \cdot \Delta t = 0.1 \cdot \left(\frac{-1}{1}, \frac{0}{1} \right) = (-0.1, 0)$$

   Dann hätte der Schwimmer den Ort $x_1, y_1) = (1-0.1, 0)$ erreicht, wenn es keine Strömung gäbe.

3. Stromversetzung: Von diesem Ort (x_1, y_1) wird er während dieser Zeiteinheit Δt von der Strömung transportiert:

$$\overline{strom}^{>} = (0, w(x) \cdot \Delta t) = (0\,,\, 2 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1) \cdot 1) = (0\,,\, 2 \cdot 0.1 \cdot (1 - 0.1)) = (0\,,\, 0.18)$$

   Dann hat der Schwimmer nach Ablauf der ersten Zeiteinheit also den Ort $(x_2, y_2) = (0.9, 0.18)$ erreicht. (In „Wirklichkeit" würden die beiden Bewegungen gleichzeitig verlaufen.)

Wenn wir nun $(x_0, y_0) := (x_2, y_2)$ setzen, dann können wir die oben genannte Routine wiederholen und erhalten den Punkt, an dem sich der Schwimmer nach der 2. Minute befindet. ...

Ein kleines Programm würde dann etwa wie folgt aussehen:

```
v = 0.1: x0 = 1: y0 = 0
PRINT i, x0, y0
FOR i = 1 TO 6000
x1 = x0 - v * x0 / SQR(x0 * x0 + y0 * y0)
y1 = y0 - v * y0 / SQR(x0 * x0 + y0 * y0) + 2 * x0 * (1 - x0)
PRINT i, x1, y1
x0 = x1: y0 = y1
IF x0 < 0 THEN PRINT i: GOTO 1
NEXT i
1 END
```

Die ersten 10 Koordinaten lauten

i	x	y	i	x	y	i	x	y
0	1.000	0.000	5	0.604	1.603	10	0.485	3.604
1	0.900	0.180	6	0.568	2.000	11	0.472	4.004
2	0.802	0.478	7	0.541	2.400	12	0.460	4.401
3	0.716	0.833	8	0.519	2.802	13	0.450	4.797
4	0.651	1.212	9	0.501	3.203	14	0.441	5.190

Damit erhält man die Bahnkurve des Schwimmers als Ergebnis von 5747 Zeitintervall-Schritten. Diese Kurve hat ihr Maximum nach 2185 Schritten bei $x = 0.053$; an dieser Stelle beträgt der zugehörige $y-$Wert $y = 204.6$.

graphische Lösung von Aufgabe 19.2:

Wenn sich der Schwimmer an einem beliebigen Punkt (x_n, y_n) befindet, dann wird er von dort durch seine Schwimmbewegung zum Ort

$$(x_{n+1}, y_s) \;=\; (x_n, y_n) - v \cdot \left(\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \,,\, \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right) \cdot \Delta\, t$$

und durch die Strömung zum Ort

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) \;=\; (x_{n+1}, y_s) + (0\,,\, 2 \cdot x_{n+1} \cdot (1 - x_{n+1}))$$

befördert. Dann ist

$\lim_{\Delta\, t \to 0} \frac{\Delta\, y}{\Delta\, x}$

$$= \lim_{\Delta\, t \to 0} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$$

$$= \lim_{\Delta\, t \to 0} \frac{\frac{-v \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2 \cdot x \cdot (1-x)}{\frac{-v \cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$= \lim_{\Delta\, t \to 0} \frac{y}{x} - \frac{2}{v} \cdot x \cdot (1-x) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

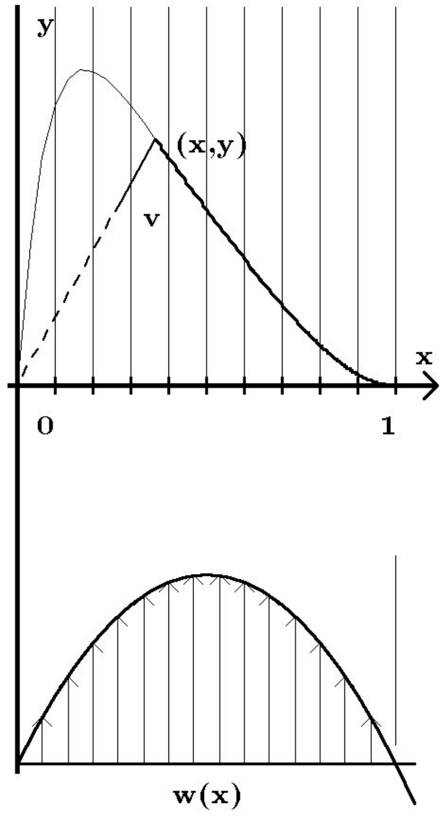

Bild zu Aufgabe 19.2

Aufstellung einer Differentialgleichung:
Dann gilt:

$$y' \;=\; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{y}{x} - \frac{2}{v} \cdot x \cdot (1-x) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Diese Differentialgleichung ist eine Ähnlichkeits-Differentialgleichung.
Wir werden sie als Aufgabe 20.5 lösen