



2 Kegelschnitte, Normalformen und Konstruktion

Aufgabe 2.1 bis 2.5: Parabeln

Aufgabe 2.6 bis 2.9: Kreis, Ellipse, Hyperbel

Aufgabe 2.10 bis 2.12: Ungleichungen

Aufgabe 2.13: Kurvendiskussion

Aufgabe 2.1:

Normalformen (F+H 2.3)^a :

nach rechts/links geöffnete Parabel: $(y - y_s)^2 = 2 \cdot p \cdot (x - x_s)$

nach oben/unten geöffnete Parabel: $(x - x_s)^2 = 2 \cdot p \cdot (y - y_s)$

(x_s, y_s) heisst der *Scheitelpunkt* und p die *Öffnung* der Parabel.

^a Formeln und Hilfen zur Höheren Mathematik, Verlag Binomi

2.1 Zeichnen und bestimmen Sie die Normalform der folgenden Parabeln

- a) durch die Punkte $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (2, 1)$ und $P_3 = (0, 1)$
- b) durch P_1 , P_2 und $P_4 = (2, -1)$
- c) durch P_1 , $P_5 = (2, -2)$ und $P_6 = (0, -2)$

2.2 Bestimmen Sie die Tangenten vom Punkt $P_7 = (3, 3)$ an die Parabel durch P_1 , P_2 und P_3 .

2.3 Bestimmen Sie die Normalen vom Punkt $P_7 = (3, 3)$ auf die Parabel durch P_1 , P_2 und P_3 .

2.4 Bestimmen Sie für die Parabel K durch P_1 , P_2 und P_3 eine Gerade L (die *Leitlinie* der Parabel) und einen Punkt F (den *Brennpunkt* der Parabel) so, dass gilt:

Die Parabel K ist die Menge aller Punkte P , die zu der Leitlinie L und dem Brennpunkt jeweils gleichen Abstand haben. (siehe auch F+H 17.9)

2.5 Zeigen Sie: Zur Symmetrieachse einer Parabel einfallende parallele Strahlen werden an der Parabel derart reflektiert, dass sie durch den Brennpunkt verlaufen.

Lösung Aufgabe 2.1:**Tangentenbedingung**

Eine Tangente, die den Graphen der Funktion $y = f(x)$ in einem Berührungspunkt $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ trifft, hat die Gleichung

$$y = m \cdot x + n \quad \text{mit} \quad m = f'(\bar{x}) \quad \text{und} \quad f(\bar{x}) = m \cdot \bar{x} + n$$

also

$$y = f'(\bar{x}) \cdot x + (f(\bar{x}) - f'(\bar{x}) \cdot \bar{x}) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \quad (1)$$

Wenn diese Tangente durch einen Punkt $P = (x_0, y_0)$ gehen soll, muss die folgende „Tangentenbedingung“ erfüllt sein:

$$y_0 = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x_0 - \bar{x}) \quad \text{oder} \quad f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) - y_0}{\bar{x} - x_0} \quad (2)$$

Normalenbedingung

Eine Normale, die den Graphen der Funktion $y = f(x)$ in einem Berührungspunkt $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ trifft, hat die Gleichung

$$y = m \cdot x + n \quad \text{mit} \quad m = -\frac{1}{f'(\bar{x})} \quad \text{und} \quad f(\bar{x}) = m \cdot \bar{x} + n$$

also

$$y = -\frac{1}{f'(\bar{x})} \cdot x + \left(f(\bar{x}) + \frac{1}{f'(\bar{x})} \cdot \bar{x} \right) = -\frac{1}{f'(\bar{x})} \cdot (x - \bar{x}) + f(\bar{x}) \quad (3)$$

Wenn diese Normale durch einen Punkt $P = (x_0, y_0)$ gehen soll, muss die folgende „Normalenbedingung“ erfüllt sein:

$$y_0 = -\frac{1}{f'(\bar{x})} \cdot (x_0 - \bar{x}) + f(\bar{x}) \quad \text{oder} \quad f'(\bar{x}) = -\frac{\bar{x} - x_0}{f(\bar{x}) - y_0} \quad (4)$$

Lösung Aufgabe 2.1 (Normalformen):

- a) Parabel durch die Punkte $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (2, 1)$ und $P_3 = (0, 1)$
 Die Gleichung der Parabel lautet $(x - 1)^2 = y$ mit $(x_s, y_s) = (1, 0)$ und $p = \frac{1}{2}$.
- b) Parabel durch die Punkte P_1 , P_2 und $P_4 = (2, -1)$
 Die Gleichung der Parabel lautet $y^2 = (x - 1)$ mit $(x_s, y_s) = (1, 0)$ und $p = \frac{1}{2}$.
- c) Parabel durch die Punkte P_1 , $P_5 = (2, -2)$ und $P_6 = (0, -2)$
 Die Gleichung der Parabel lautet $(x - 1)^2 = -\frac{1}{2} \cdot y$ mit $(x_s, y_s) = (1, 0)$ und $p = -\frac{1}{4}$.

Lösung Aufgabe 2.2 (Tangenten):

Tangenten vom Punkt $P_7 = (3, 3)$ an die Parabel durch P_1 , P_2 und P_3

Es ist nach 2.1a) $y = (x - 1)^2$ die Gleichung der Parabel durch die drei Punkte P_1 , P_2 und P_3 .
 Folglich gilt für einen Punkt $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ auf dieser Parabel $f(\bar{x}) = (\bar{x} - 1)^2$. Ferner ist $f'(x) = 2 \cdot (x - 1)$ und folglich $f'(\bar{x}) = 2 \cdot (\bar{x} - 1)$. In der Gleichung (2) ist mit $(x_0, y_0) = P_7 = (3, 3)$ dann

$$2 \cdot (\bar{x} - 1) = \frac{(\bar{x} - 1)^2 - 3}{\bar{x} - 3}$$

Hieraus ergibt sich

$$2 \cdot (\bar{x} - 1) \cdot (\bar{x} - 3) = \bar{x}^2 - 2 \cdot \bar{x} + 1 - 3 \text{ oder } \bar{x}^2 - 6 \cdot \bar{x} + 8 = 0$$

Damit ergeben sich folgende Berührungspunkte auf der Parabel für Tangenten von dem Punkt P_7 an die Parabel:

$$P_8 = (4, 9) \text{ und } P_9 = (2, 1).$$

Lösung Aufgabe 2.3 (Normalen):

Normalen vom Punkt $P_7 = (3, 3)$ auf die Parabel durch P_1 , P_2 und P_3

Es ist nach 2.1a) $y = (x - 1)^2$ die Gleichung der Parabel durch die drei Punkte P_1 , P_2 und P_3 .
 Folglich gilt für einen Punkt $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ auf dieser Parabel $f(\bar{x}) = (\bar{x} - 1)^2$. Ferner ist $f'(x) = 2 \cdot (x - 1)$ und folglich $f'(\bar{x}) = 2 \cdot (\bar{x} - 1)$. In der Gleichung (4) ist mit $(x_0, y_0) = P_7 = (3, 3)$ dann

$$2 \cdot (\bar{x} - 1) = -\frac{\bar{x} - 3}{(\bar{x} - 1)^2 - 3}$$

Hieraus ergibt sich

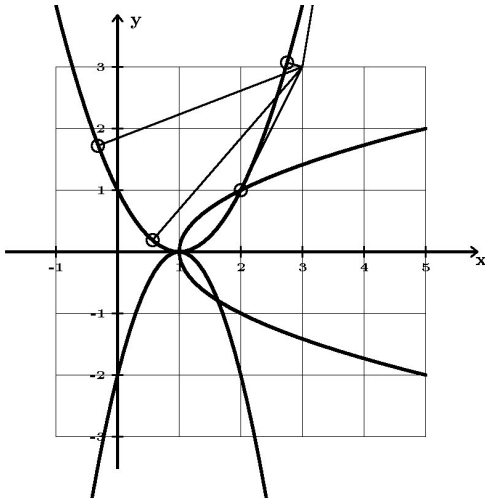
$$2 \cdot (\bar{x} - 1) \cdot [(\bar{x} - 1)^2 - 3] = -\bar{x} + 3 \text{ oder } 2 \cdot \bar{x}^3 - 6 \cdot \bar{x}^2 + \bar{x} + 1 = 0$$

Damit ergibt sich zunächst folgende Wertetabelle für die Kurve $y = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + x + 1$ zur Bestimmung der Lösungen dieser Gleichung:

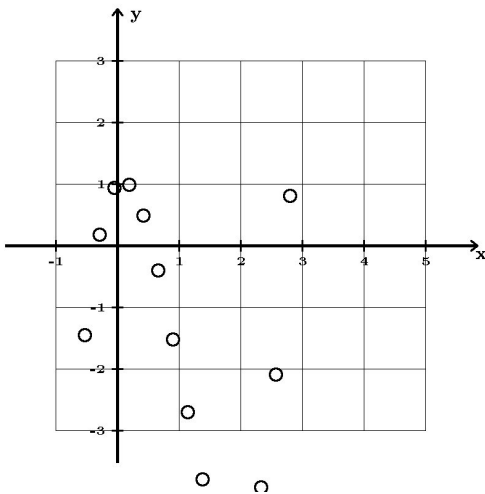
x	y	x	y	x	y
-0.76	-4.13	-0.52	-1.46	-0.29	0.18
-0.05	0.94	0.19	0.99	0.43	0.48
0.67	-0.41	0.90	-1.53	1.14	-2.71
1.38	-3.79	1.62	-4.62	1.86	-5.03
2.10	-4.85	2.33	-3.93	2.57	-2.10
2.81	0.80	3.05	4.93	3.29	10.45
3.52	17.53	3.76	26.33	4.00	37.00

Daraus ergeben sich folgende Schnittpunkte auf der Parabel für Normalen von dem Punkt P_7 an die Parabel:

$P_{10} = (2.75, 3.07)$, $P_{11} = (0.57, 0.19)$ und $P_{12} = (-0.32, 1.72)$.

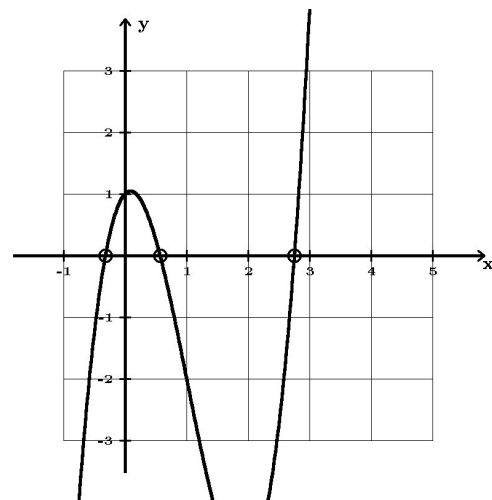


Aufgabe 2.1 Parabeln



Aufgabe 2.3 Wertetabelle

$$y = 2 \cdot \bar{x}^3 - 6 \cdot \bar{x}^2 + \bar{x} + 1$$



Aufgabe 2.3 Nullstellen

$$y = 2 \cdot \bar{x}^3 - 6 \cdot \bar{x}^2 + \bar{x} + 1$$

Lösung Aufgabe 2.4 (Geometrischer Ort: Leitlinie und Brennpunkt):

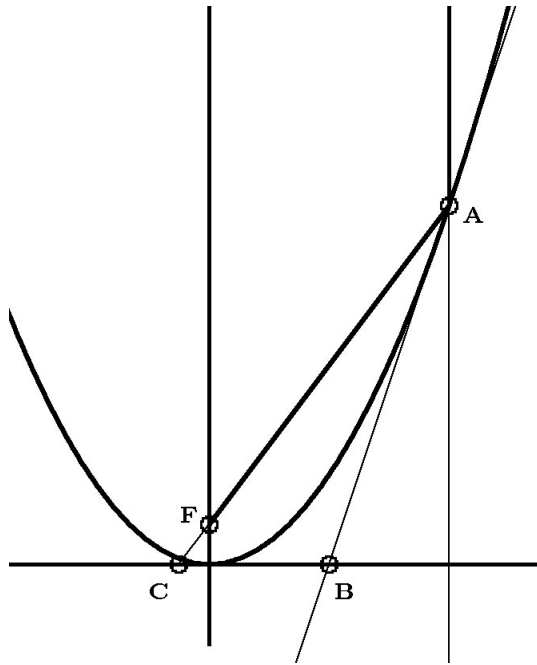
Es seien L die durch die Gleichung $y = -\frac{1}{4}$ beschriebene Gerade und F der Punkt

$F = (x_F, y_F) = (1, \frac{1}{4})$. Ferner sei $P = (x_p, y_p)$ ein beliebiger Punkt auf der nach Aufgabe 2.1a bestimmten Parabel $y = (x - 1)^2$ durch die Punkte P_1 , P_2 und P_3 , also $y_p = (x_p - 1)^2$. Der Abstand d_G zwischen der Geraden L und dem Punkt P ist dann $d_G = y_p + \frac{1}{4}$.

Entsprechend wird der Abstand d_F zwischen der dem Punkt F und dem Punkt P bestimmt:

$$\begin{aligned} d_F &= \sqrt{(x_p - x_F)^2 + (y_p - y_F)^2} = \sqrt{(x_p - 1)^2 + \left(y_p - \frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{y_p + \left(y_p^2 - \frac{1}{2} \cdot y_p + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)} = \sqrt{y_p^2 + \frac{1}{2} \cdot y_p + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(y_p + \frac{1}{4}\right)^2} \\ &= y_p + \frac{1}{4} = d_G \end{aligned}$$

Also ist L die gesuchte Leitlinie und F der Brennpunkt.

Lösung der Aufgabe 2.5 (Brennpunkteigenschaft der Parabel):

Es treffen Strahlen parallel zur y -Achse auf eine parabolisch geformte Schale mit der Gleichung $y = x^2$. Die Strahlen werden an der Parabel reflektiert

(Einfallswinkel = Ausfallswinkel).

Es werde der Strahl $x = a$ für ein $a > 0$ betrachtet. Er trifft auf die Parabel im Punkt $A = (a, a^2)$. Für die Tangente in A an die Parabel beträgt die Steigung $m_A = 2 \cdot a$; sie schneide die x -Achse im Punkt B . - Die Abhängigkeit des Einfallswinkels α (zwischen einfallendem Strahl und der Tangente an die Parabel) von der Lage des Punktes A läßt sich beschreiben durch

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = m_A = 2 \cdot a \quad (1)$$

Aufgabe 2.5 Brennpunkteigenschaft

Der Strahl werde nun in A an der Parabel reflektiert. Sein Austrittswinkel ist α , der Schnittpunkt mit der x -Achse werde mit C bezeichnet. Zu bestimmen ist dann zunächst die Steigung m_R des aus A austretenden reflektierten Strahles.

Dazu werde der Winkel, unter dem dieser Strahl die x -Achse trifft, mit γ bezeichnet. Es gilt dann also

$$m_R = \tan(\gamma) \quad (2)$$

In jedem Dreieck ist die Winkelsumme gleich π , also auch in dem Dreieck $\triangle ABC$:

$$\gamma + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \alpha = \pi \quad \text{oder} \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \alpha$$

und damit nach (2)

$$m_R = \tan(\gamma) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \alpha\right) = \frac{1}{\tan(2 \cdot \alpha)} = \frac{1}{\frac{2 \cdot \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}} = \frac{1 - \tan^2(\alpha)}{2 \cdot \tan(\alpha)}$$

Einsetzen von (1) in diese Gleichung ergibt

$$m_R = \frac{1 - \left(\frac{1}{2 \cdot a}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{2 \cdot a}} = \frac{4 \cdot a^2 - 1}{4 \cdot a} \quad (3)$$

Nun soll der Schnittpunkt $(0, n)$ des reflektierten Strahles mit der y -Achse bestimmt werden. Von dem reflektierten Strahl mit der Gleichung $y = m_R \cdot x + n$ sind bekannt:

1. die Steigung m_R (in Abhängigkeit von $A = (a, a^2)$ nach (3)).
2. der Punkt A , der nach Konstruktion auf dieser Geraden liegt.

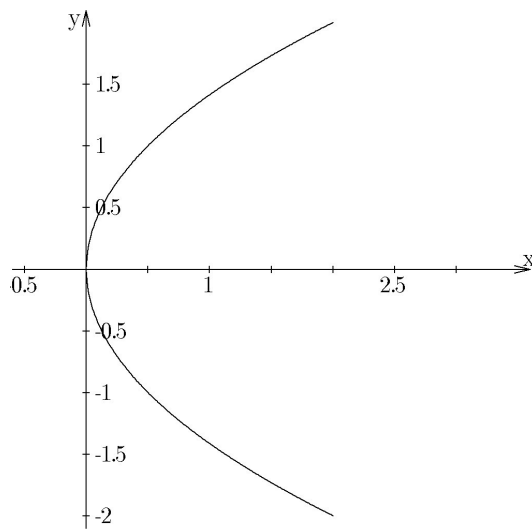
Damit läßt sich n berechnen:

$$n = y - m_R \cdot x = a^2 - \frac{4 \cdot a^2 - 1}{4 \cdot a} \cdot a = a^2 - a^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

Aus (4) ist deutlich, daß n unabhängig ist von a : also gehen für jedes beliebige a die an der Parabelschale reflektierten Strahlen durch den Punkt $(0, \frac{1}{4})$. Dieser Punkt heißt daher der *Brennpunkt* der Parabel.

Aufgabe 2.6: Kegelschnitte

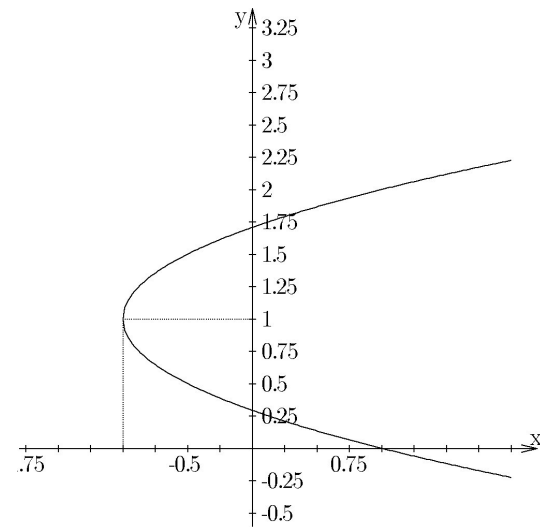
Untersuchen Sie, welche Kegelschnitte durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden, und skizzieren Sie die Kurven in der x,y-Ebene :



Aufgabe 2.6a) $y^2 = 2 \cdot x$

Lösung Aufgabe 2.6a):

Parabel mit Scheitel $(0,0)$ und Öffnung
 $p = 1$

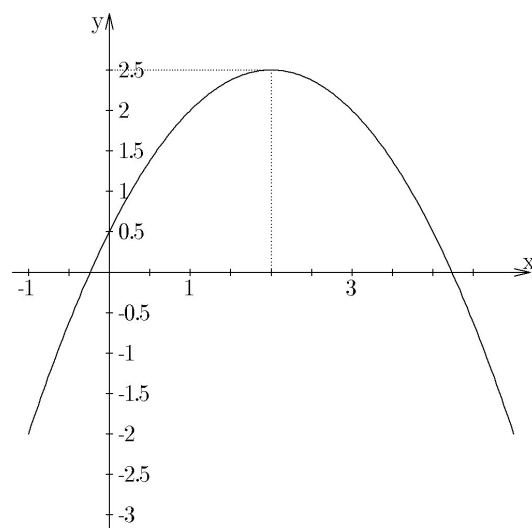


Aufgabe 2.6b) $2 \cdot y^2 - x - 4 \cdot y + 1 = 0$

Lösung Aufgabe 2.6b):

$$(y - 1)^2 = \frac{1}{2} \cdot (x + 1)$$

Parabel mit Scheitel $(-1, 1)$ und Öffnung
 $p = \frac{1}{4}$



Aufgabe 2.6c) $x^2 - 4 \cdot x + 2 \cdot y = 1$

Lösung Aufgabe 2.6c):

$$(x - 2)^2 = -2 \cdot \left(y - \frac{5}{2}\right)$$

Parabel mit Scheitel $(2, \frac{5}{2})$ und Öffnung
 $p = -1$

Aufgabe 2.6d) $y^2 = x \cdot y$

Lösung Aufgabe 2.6d):

$y = 0$ oder $y = x$

zwei Geraden.

Aufgabe 2.7 und 2.8: Kreise

Normalform:

Kreis mit Radius r um Mittelpunkt (x_m, y_m) : $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$ **Aufgabe 2.7a):**

Zeichnen und bestimmen Sie die Tangente im Punkt $B = (x_B, y_B) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3})$ an den Kreis $x^2 + y^2 = 1$.

Lösung Aufgabe 2.7a):

Nach F+H 17.5 lautet die Gleichung der Tangente $x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = r^2$.

Hier ist $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3})$ und $r = 1$, also $\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot y = 1$ oder $y = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$

Aufgabe 2.7b):

Zeigen Sie, dass der Punkt $P = (5, -\sqrt{3})$ auf der in 2.7a) bestimmten Tangente liegt.

Lösung Aufgabe 2.7b):

Nach Aufgabe 2.7a) lautet die Gleichung der Tangente $y = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$, also gilt für $x = 5$: $y = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{3}$, d.h. der Punkt $P = (5, -\sqrt{3})$ liegt auf dieser Tangente.

Aufgabe 2.7c):

Konstruieren Sie zu diesem Punkt P die zweite Tangente an den Kreis. Bestimmen Sie den Berührungspunkt R .

Lösung Aufgabe 2.7c):

Der Punkt P muss auf der Tangente mit dem gesuchten Berührungspunkt R liegen, also muss nach der Tangentengleichung gelten

$$x_R \cdot 5 - y_R \cdot \sqrt{3} = 1$$

oder

$$y_R = \frac{5 \cdot x_R - 1}{\sqrt{3}}$$

Da R auf dem Kreis liegt, muss zusätzlich gelten

$$x_R^2 + y_R^2 = 1$$

Also muss insgesamt für x_R gelten:

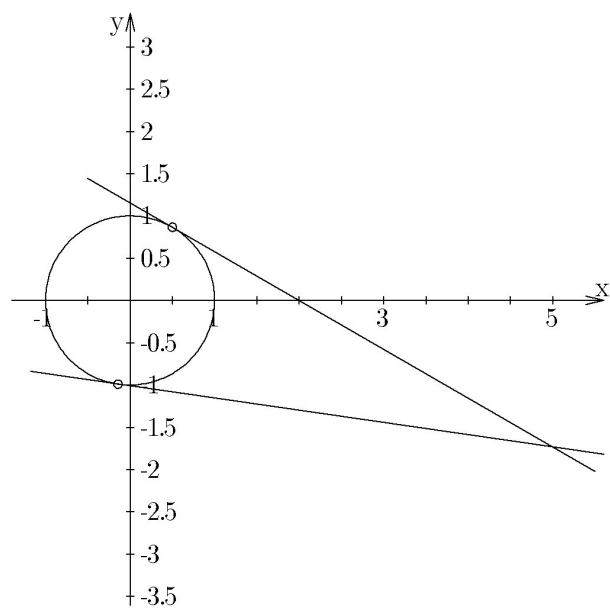
$$x_R^2 + \frac{(5 \cdot x_R - 1)^2}{3} = 1 \text{ oder}$$

$$3 \cdot x_R^2 + (25 \cdot x_R^2 - 10 \cdot x_R + 1) = 3$$

oder

$$28 \cdot x_R^2 - 10 \cdot x_R - 2 = 0 \text{ und damit}$$

$$x_R^2 - \frac{5}{14} \cdot x_R - \frac{1}{14} = 0.$$

**Aufgabe 2.7c) Tangente und Kreis**

Dann ergeben sich die beiden Werte $x_B = \frac{1}{2}$ und $x_R = -\frac{1}{7}$. (Der Wert x_B ist schon aus der Aufgabenstellung bekannt). Dann ist

$$y_{R,2} = -\sqrt{1 - x_{R,2}^2} = -\frac{1}{7} \cdot \sqrt{48} \approx -0.99$$

Aufgabe 2.8: Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Kreise $x^2 + y^2 = 9$ und $(x + 2 \cdot \sqrt{2})^2 + (y - 2 \cdot \sqrt{2})^2 = 4$ und überprüfen Sie die Rechnung an einer Zeichnung.

Lösung Aufgabe 2.8:

Durch Drehung des Koordinatensystems (siehe Bild) lässt sich die Aufgabe wesentlich vereinfachen

Nun lauten die Gleichungen der $x^2 + y^2 = 9$ und $(x - 4)^2 + y^2 = 4$, und deren Schnitte sind einfach zu bestimmen:

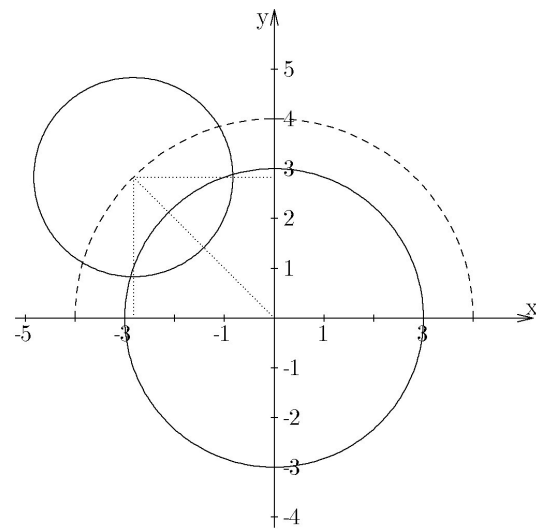
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9 \\ (x - 4)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

Die Differenz der beiden Gleichungen ergibt

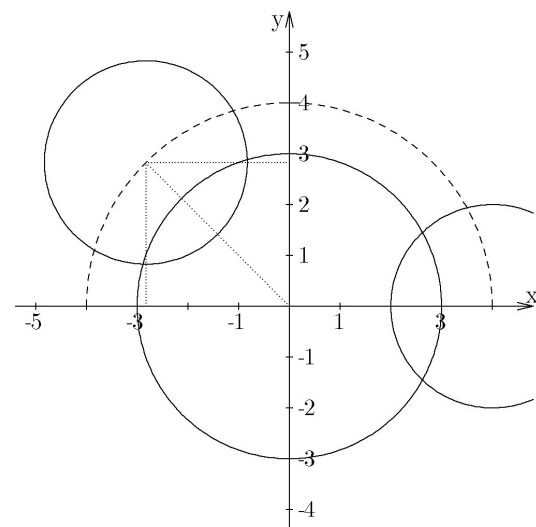
$$x^2 - (x - 4)^2 = 5$$

Hieraus ergibt sich $x^2 - (x^2 - 8 \cdot x + 16) = 5$ und damit $x = \frac{21}{8} \approx 2.6$. Die Schnittpunkte haben daher die Koordinaten

$$\begin{aligned} \left(\frac{21}{8}, \pm \sqrt{9 - \left(\frac{21}{8} \right)^2} \right) &= \left(\frac{21}{8}, \pm \frac{\sqrt{135}}{8} \right) \\ &\approx (2.6, \pm 1.45) \end{aligned}$$



Aufgabe 2.8: Lage der Kreise gemäss Aufgabenstellung



Aufgabe 2.8 Lage der Kreise nach Drehung um -135°

Werden diese nun wieder um 135° um den Nullpunkt gedreht, so ergeben sich die Koordinaten der „wirklichen“ Schnittpunkte.

(Das ist Thema der linearen Algebra: Die Drehung um 135° um den Nullpunkt wird beschrieben durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \cos(135^\circ) & -\sin(135^\circ) \\ \sin(135^\circ) & \cos(135^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

also lauten die Koordinaten der Schnittpunkte nach der Drehung

$$M \cdot \begin{pmatrix} \frac{21}{8} \\ \pm \frac{\sqrt{135}}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{21}{8} \\ \pm \frac{\sqrt{135}}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \cdot \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} -21 \mp \sqrt{135} \\ 21 \mp \sqrt{135} \end{pmatrix},$$

$$\text{also } S_1 = \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot \begin{pmatrix} -21 - \sqrt{135} \\ 21 - \sqrt{135} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.883 \\ 0.829 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } S_2 = \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot \begin{pmatrix} -21 + \sqrt{135} \\ 21 + \sqrt{135} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.829 \\ 2.883 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.9: Kreis, Ellipse und Hyperbel

Normalformen:

Ellipsemit Halbachsen a und b um einen Mittelpunkt (x_m, y_m) : $\frac{(x - x_m)^2}{a^2} + \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$ Hyperbel nach rechts/links geöffnetmit Halbachsen a und b um einen Mittelpunkt (x_m, y_m) : $\frac{(x - x_m)^2}{a^2} - \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$ Hyperbel nach oben/unten geöffnetmit Halbachsen a und b um einen Mittelpunkt (x_m, y_m) : $-\frac{(x - x_m)^2}{a^2} + \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$

Untersuchen Sie, welche Kegelschnitte durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden, und skizzieren Sie die Kurven in der x,y-Ebene:

2.9a): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

2.9b): $4 \cdot x^2 - 9 \cdot y^2 = 1$

2.9c): $x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y + 1 = 0$

2.9d): $x^2 + 2 \cdot y^2 - 2 = 0$

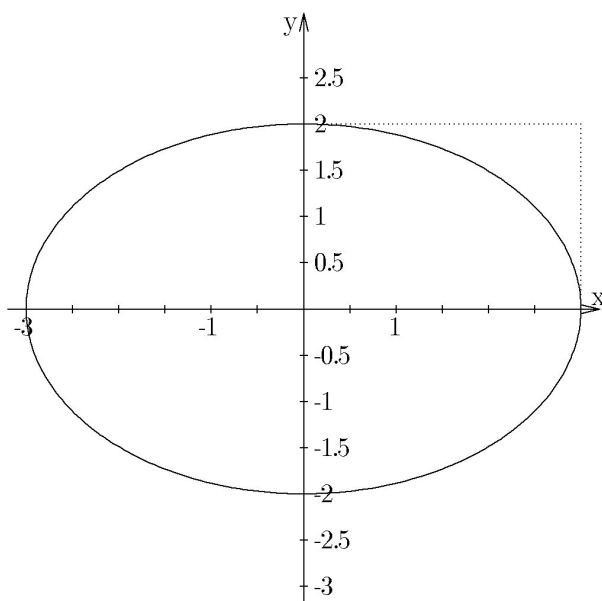
2.9e): $x^2 - 2 \cdot y^2 - 2 \cdot x = 0$

2.9f): $x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 = 1$

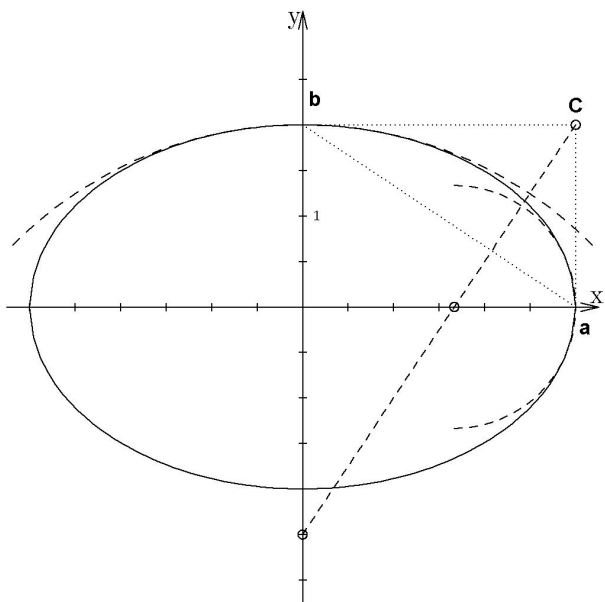
2.9g): $2 \cdot x^2 - y - x + 2 \cdot y^2 = 0$

Ellipsenkonstruktion:

- Zeichne Rechteck durch die Punkte $A := (-a, -b)$, $B := (a, -b)$, $C := (a, b)$ und $D := (-a, b)$.
- Fälle das Lot von C auf die Gerade durch $(0, b)$ und $(a, 0)$.
- das Lot schneidet die x -Achse in dem Krümmungskreismittepunkt des Krümmungskreises in $(a, 0)$.
- das Lot schneidet die y -Achse in dem Krümmungskreismittepunkt des Krümmungskreises in $(0, b)$.

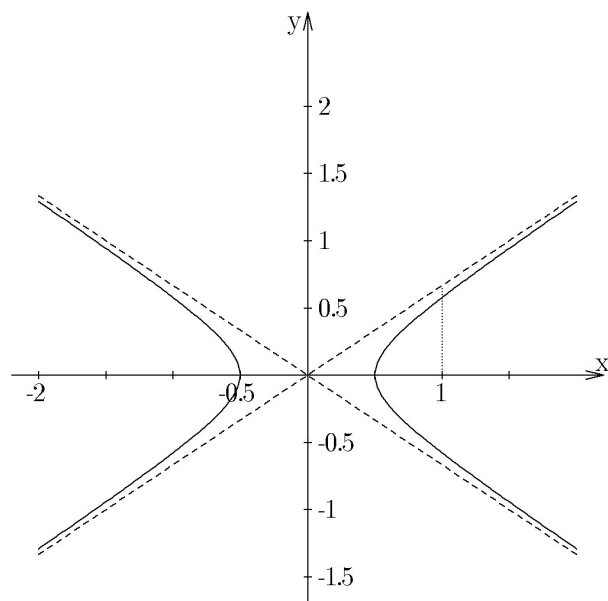


Aufgabe 2.9a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Lösung Aufgabe 2.9a):Ellipse mit den Halbachsen $a = 3$, $b = 2$ 

Aufgabe 2.9a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Lösung Aufgabe 2.9a):Ellipse mit den Halbachsen $a = 3$, $b = 2$ Krümmungsmittelpunkte: $(\frac{5}{3}, 0)$ und $(0, -\frac{5}{2})$

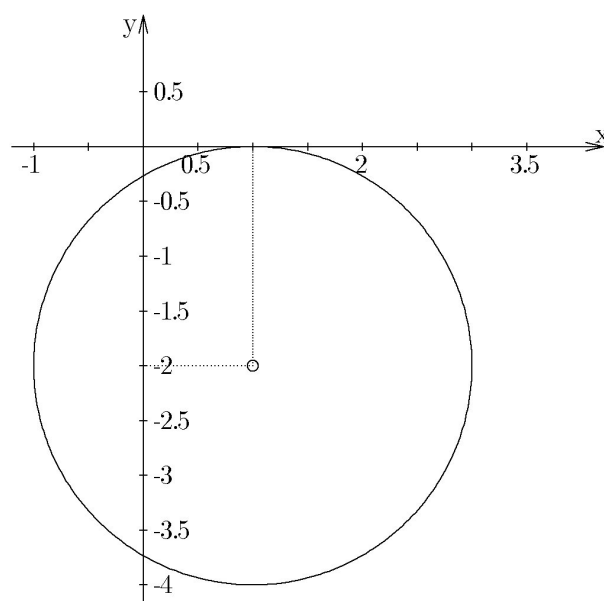


Aufgabe 2.9b) $4 \cdot x^2 - 9 \cdot y^2 = 1$

Lösung Aufgabe 2.9b):

Hyperbel mit den Halbachsen $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$

Asymptoten: $y = \pm \frac{2}{3} \cdot x$

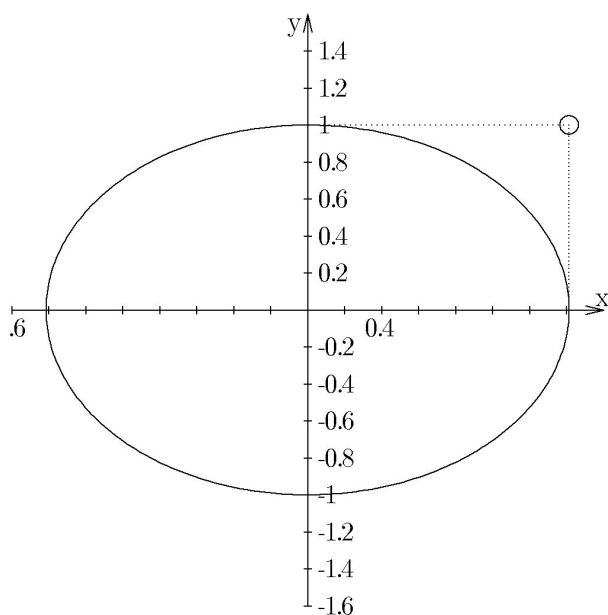


Aufgabe 2.9c) $x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y + 1 = 0$

Lösung Aufgabe 2.9c):

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

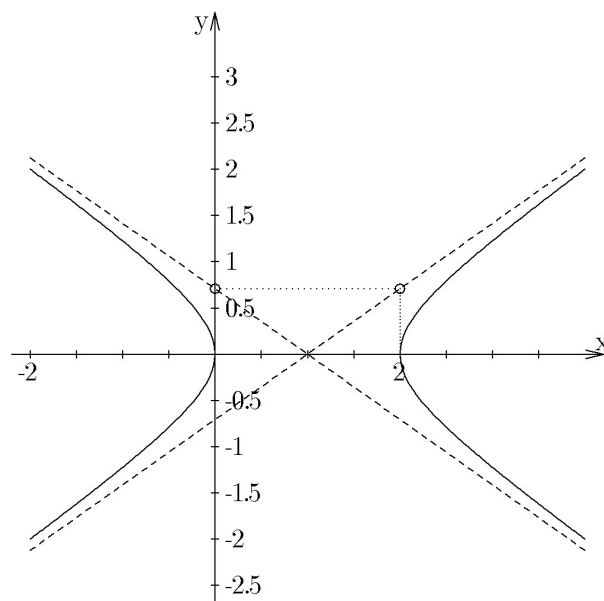
Kreis mit Mittelpunkt $(1, -2)$ und Radius 2



Aufgabe 2.9d) $x^2 + 2 \cdot y^2 - 2 = 0$

Lösung Aufgabe 2.9d):

Ellipse mit den Halbachsen $a = \sqrt{2}$, $b = 1$

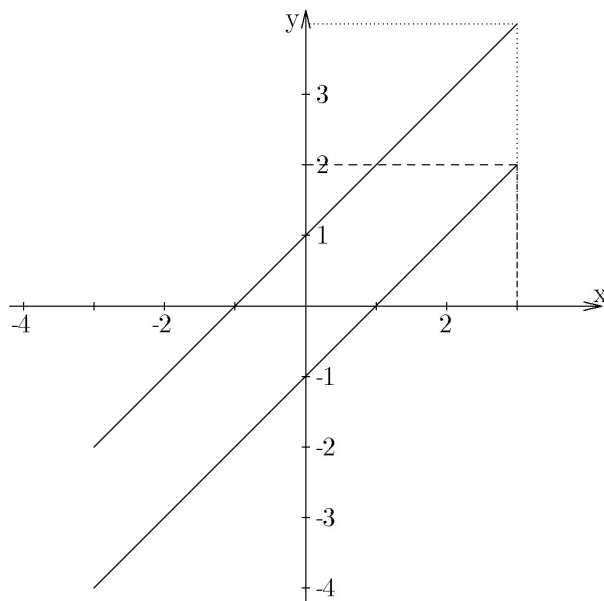


Aufgabe 2.9e) $x^2 - 2 \cdot y^2 - 2 \cdot x = 0$

Lösung Aufgabe 2.9e):

$$(x - 1)^2 - 2 \cdot y^2 = 1$$

Hyperbel mit den Halbachsen $a = 1$, $b = 1/\sqrt{2}$ und dem Mittelpunkt $(1, 0)$

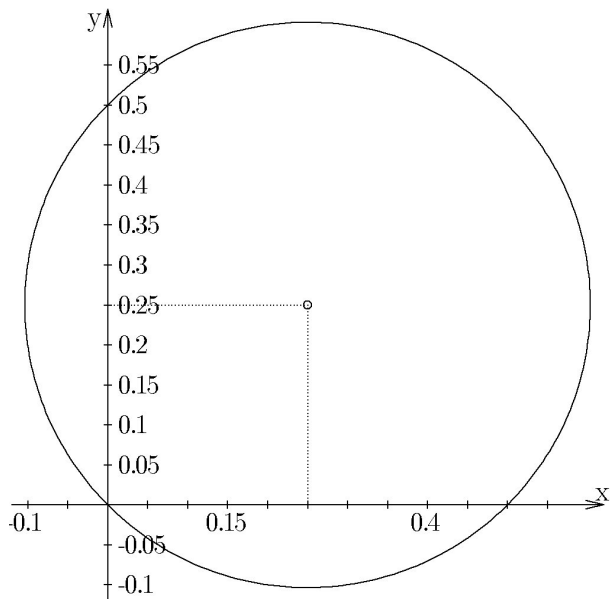


Aufgabe 2.9f) $x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 = 1$

Lösung Aufgabe 2.9f):

$$(x - y)^2 = 1$$

zwei zueinander parallele Geraden



Aufgabe 2.9g):

$$2 \cdot x^2 - y - x + 2 \cdot y^2 = 0$$

Lösung Aufgabe 2.9g):

$$2 \cdot x^2 - y - x + 2 \cdot y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2} \cdot x \right) + 2 \cdot \left(y^2 - \frac{1}{2} \cdot y \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2} \cdot x \right) + \left(y^2 - \frac{1}{2} \cdot y \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] + \left[y^2 - \frac{1}{2} \cdot y + \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{8}$$

also beschreibt diese Gleichung einen Kreis mit Mittelpunkt $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$ und Radius $r = \sqrt{\frac{1}{8}}$

Aufgabe 2.10: Ungleichungen, eindimensional

Produktsatz: $a \cdot b > 0$ und $a, b \in \mathbb{R} \longrightarrow (a > 0 \text{ und } b > 0) \text{ oder } (a < 0 \text{ und } b < 0)$

Produktsatz: $a \cdot b < 0$ und $a, b \in \mathbb{R} \longrightarrow (a < 0 \text{ und } b > 0) \text{ oder } (a > 0 \text{ und } b < 0)$

Vietascher Wurzelsatz

Fallunterscheidung

Regel (UB1): $a < b$ und $a, b, c \in \mathbb{R} \implies a + c < b + c$

Regel (UB2): $a < b$ und $c > 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R} \implies a \cdot c < b \cdot c$

Regel (UB3): $a < b$ und $c < 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R} \implies a \cdot c > b \cdot c$

Definition $||$: $|x| = x$ für $x \geq 0$ und $|x| = -x$ für $x < 0$.

Regel (UB4): $|a| < b$ und $b > 0$ mit $a, b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -b < a < b$

Regel (UB5): $|a| > b$ und $b > 0$ mit $a, b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a < -b \text{ oder } b < a$

Untersuchen Sie, für welche reellen Zahlen x die folgenden Ungleichungen erfüllt sind, und skizzieren Sie jeweils die Lösungsmengen auf der Zahlengeraden:

2.10a): $2 \cdot x + 3 < 13 + 6 \cdot x$

2.10b): $2 \cdot (x + 1) < x \cdot (x + 1)$

2.10c): $x^2 + 1 < 5 \cdot (x - 1)$

2.10d): $\frac{9 \cdot x - 14}{x - 2} - \frac{5}{x + 1} > 9$

Lösungen: Aufgabe 2.10a): $2 \cdot x + 3 < 13 + 6 \cdot x$

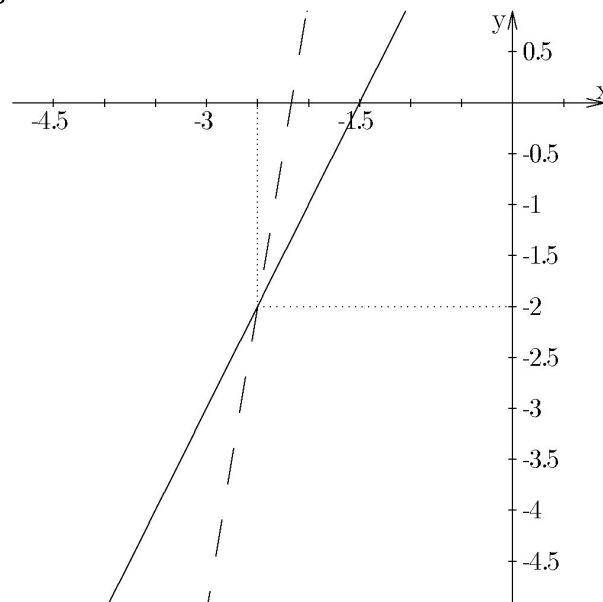
Standardlösung:

Nach Regel (UB1) mit $c = -13$: $2 \cdot x - 10 < 6 \cdot x$

Nach Regel (UB1) mit $c = -2 \cdot x$: $-10 < 4 \cdot x$

Nach Regel (UB2) mit $c = \frac{1}{4}$: $-\frac{5}{2} < x$

Graphische Lösung:



Aufgabe 2.10a): $y = 2 \cdot x + 3$ (ausgezogen) und $y = 13 + 6 \cdot x$ (gestrichelt)

Schnittpunkt: $x = -2.5$

Gestrichelte Gerade liegt **oberhalb** der ausgezogenen Geraden für $x > -\frac{5}{2}$.

Aufgabe 2.10b): $2 \cdot (x + 1) < x \cdot (x + 1)$ **Standardlösung:**

ausmultiplizieren:

$$2 \cdot x + 2 < x^2 + x$$

Nach Regel (UB1) mit $c = -2 \cdot x - 2$:

$$0 < x^2 - x - 2$$

Nach Vieta'schem Wurzelsatz:

$$0 < (x - 2) \cdot (x + 1)$$

Nach Produktsatz: entweder

$$x - 2 > 0 \text{ und } x + 1 > 0$$

$$\longrightarrow x > 2 \text{ und } x > -1$$

$$x > 2$$

oder

$$x - 2 < 0 \text{ und } x + 1 < 0$$

$$\longrightarrow x < 2 \text{ und } x < -1$$

$$x < -1$$

Lösung mit Fallunterscheidung:Fall $(x + 1) > 0$:Nach Regel (UB2) mit $c = \frac{1}{x+1}$:

$$2 < x$$

In diesem Fall also

$$(x + 1) > 0 \text{ und } 2 < x$$

$$x > -1 \text{ und } 2 < x$$

$$-1 < x \text{ und } 2 < x \quad \Leftrightarrow \quad 2 < x$$

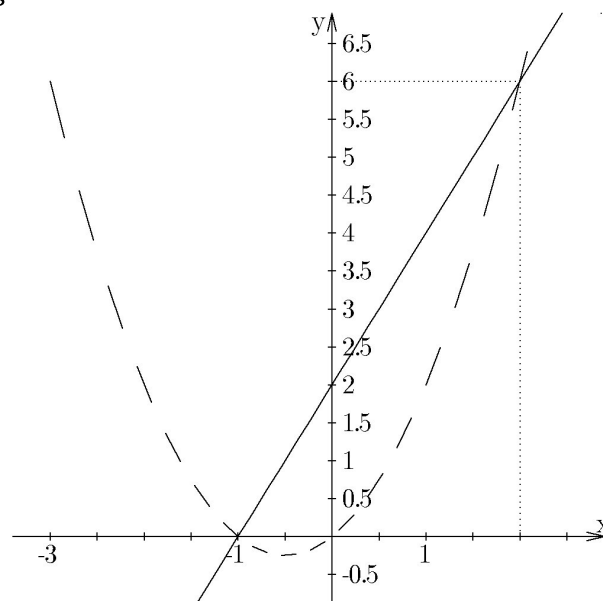
Fall $(x + 1) < 0$:Nach Regel (UB3) mit $c = \frac{1}{x+1}$:

$$2 > x$$

In diesem Fall also

$$(x + 1) < 0 \text{ und } 2 > x$$

$$x < -1 \text{ und } 2 > x \quad \Leftrightarrow \quad x < -1$$

Graphische Lösung:*Aufgabe 2.10b):* $y = 2 \cdot (x + 1)$ (ausgezogen) und Parabel $y = x \cdot (x + 1)$ (gestrichelt)Schnittpunkte: $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ Gestrichelte Parabel liegt **oberhalb** der ausgezogenen Geraden für $x < -1$ und für $x > 2$.

Aufgabe 2.10c): $x^2 + 1 < 5 \cdot (x - 1)$ **Standardlösung:**Nach Regel (UB1) mit $c = -5 \cdot (x - 1)$: $x^2 - 5 \cdot x + 6 < 0$ Vietascher Wurzelsatz: $(x - 2) \cdot (x - 3) < 0$

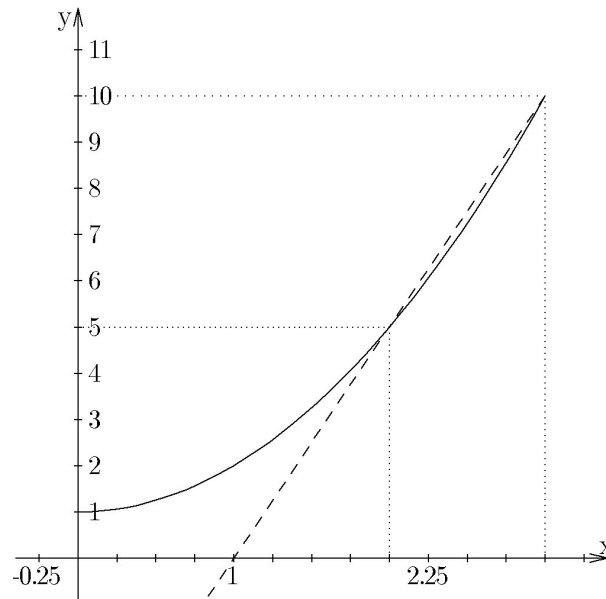
Nach Produktsatz: entweder

 $x - 2 > 0$ und $x - 3 < 0$ $\longrightarrow x > 2$ und $x < 3$ $2 < x < 3$

oder

 $x - 2 < 0$ und $x - 3 > 0$ $\longrightarrow x < 2$ und $x > 3$

gibt es nicht

Graphische Lösung:*Aufgabe 2.10c):* Parabel $y = x^2 + 1$ (ausgezogen) und $y = 5 \cdot (x - 1)$ (gestrichelt)Schnittpunkte: $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ Gestrichelte Gerade liegt **oberhalb** der ausgezogenen Geraden für $2 < x < 3$.

Aufgabe 2.10d): $\frac{9 \cdot x - 14}{x - 2} - \frac{5}{x + 1} > 9$

Standardlösung:

Trick: Auf eine Seite „0“

Nach Regel (UB1) mit $c = -9$: $\frac{9 \cdot x - 14}{x - 2} - \frac{5}{x + 1} - 9 > 0$

Hauptnenner: $\frac{(9 \cdot x - 14) \cdot (x + 1) - 5 \cdot (x - 2) - 9 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)}{(x - 2) \cdot (x + 1)} > 0$

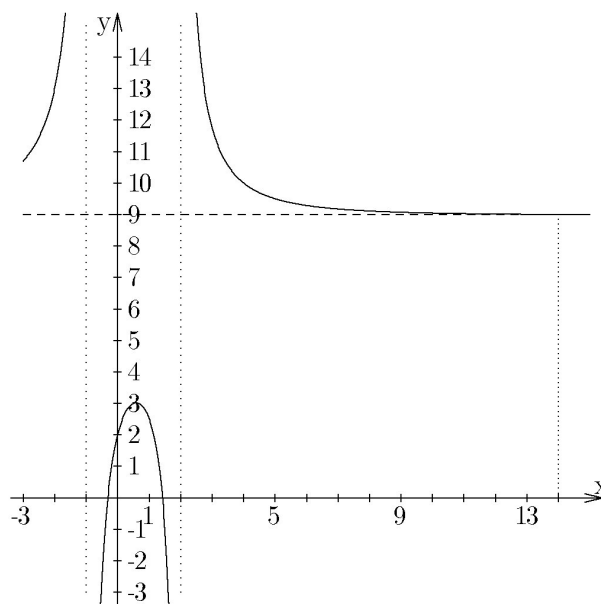
$$\frac{-x + 14}{(x - 2) \cdot (x + 1)} > 0$$

Vorzeichentabelle:

	$-\infty$	-1	2	14	∞
$(x + 1)$		-	+	+	+
$(x - 2)$		-	-	+	+
$(-x + 14)$		+	+	+	-
$\frac{-x + 14}{(x - 2) \cdot (x + 1)}$		+	-	+	-

Da $\frac{-x + 14}{(x - 2) \cdot (x + 1)} > 0$ gelten soll, ist nach obiger Tabelle die Ungleichung gültig für $x < -1$ und für $2 < x < 14$.

Graphische Lösung:



Aufgabe 2.10d): Kurve $y = \frac{9 \cdot x - 14}{x - 2} - \frac{5}{x + 1}$ (ausgezogen) und $y = 9$ (gestrichelt)

Schnittpunkte: $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ und $x_3 = 14$

Ausgezogene Kurve liegt **oberhalb** der gestrichelten Geraden für $x < -1$ und für $2 < x < 14$.

Aufgabe 2.11: Ungleichungen und Beträge, eindimensional

Untersuchen Sie, für welche reellen Zahlen x die folgenden Ungleichungen erfüllt sind, und skizzieren Sie jeweils die Lösungsmengen auf der Zahlengeraden:

a) $|x + 5| < 3$ b) $|x - 5| \geq 3$ c) $||x| - 5| < 3$

Lösung 2.11a) ($|x + 5| < 3$):**Standardlösung:**

Nach Regel (UB4) mit $a = x + 5$ und $b = 3$: $-3 < x + 5 < 3$

Nach Regel (UB1) mit $c = -5$: $-8 < x < -2$

Lösung 2.11b) ($|x - 5| \geq 3$):**Standardlösung:**

Nach Regel (UB5) mit $a = x - 5$ und $b = 3$: $x - 5 \leq -3$ oder $x - 5 \geq 3$

Nach Regel (UB1) mit $c = 5$: $x \leq 2$ oder $x \geq 8$

Lösung 2.11c) ($||x| - 5| < 3$):**Allgemeiner Ansatz:**

Nach Regel (UB4) mit $a = |x| - 5$ und $b = 3$: $-3 < |x| - 5 < 3$

Nach Regel (UB1) mit $c = 5$: $2 < |x| < 8$

Standardlösung:

Daraus werden zwei Ungleichungen, die beide erfüllt sein müssen:

$$2 < |x|$$

Nach Regel (UB5) mit $a = x$ und $b = 2$: $x < -2$ oder $x > 2$

$$|x| < 8$$

Nach Regel (UB4) mit $a = x$ und $b = 8$: $-8 < x < 8$

Insgesamt gilt die Ungleichung also für $-8 < x < -2$ und für $2 < x < 8$

Alternativer Ansatz:**Trick:**

Fall $x \geq 0$

Dann ist nach Definition des Betrages $|x| = x$.

Dann folgt aus $2 < |x| < 8$ sofort $2 < x < 8$, in diesem Fall ($x \geq 0$) also $2 < x < 8$.

Fall $x < 0$

Dann ist nach Definition des Betrages $|x| = -x$.

Dann folgt aus $2 < |x| < 8$ sofort $2 < -x < 8$ oder nach (UB3) $-2 > x > -8$, in diesem Fall ($x < 0$) also $-8 < x < -2$.

Aufgabe 2.12: Ungleichungen und Beträge, zweidimensional

Untersuchen Sie, für welche Punkte (x, y) der reellen Zahlenebene die folgenden Ungleichungen erfüllt sind, und skizzieren Sie jeweils die Lösungen:

2.12a) $x - y < 1$

2.12b): $|x| \leq |y|$

2.12c): $|x| + |y| < 2$

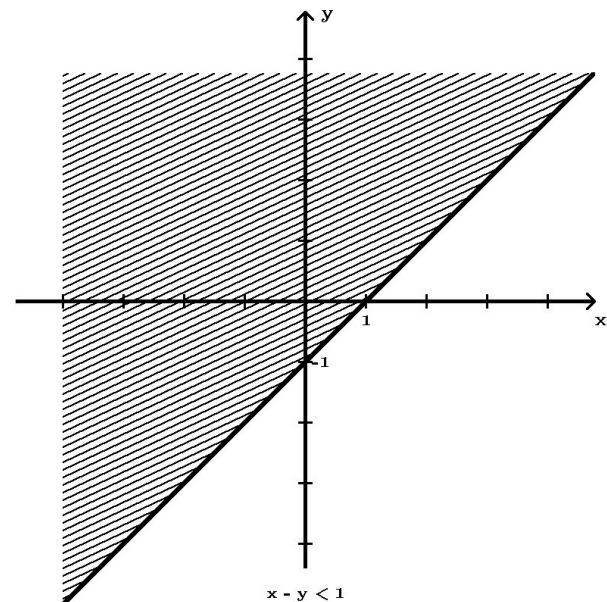
Lösungen:

2.12a): $x - y < 1$

Die Grenzkurve ist eine Gerade. Daher ist die Ungleichung auf die Normalform einer Geraden umzuformen:

Nach Regel (UB1) mit $c = y - 1$:

$$x - 1 < y \quad \Leftrightarrow \quad y > x - 1$$



$$x - y < 1$$

Aufgabe 2.12a): $x - y < 1$

2.12b): $|x| \leq |y|$

Fallunterscheidung:

Fall $x \geq 0$ und $y \geq 0$:

Dann ist $|x| = x$ und $|y| = y$; folglich lautet die Ungleichung $x \leq y \Leftrightarrow y \geq x$.

Fall $x < 0$ und $y \geq 0$:

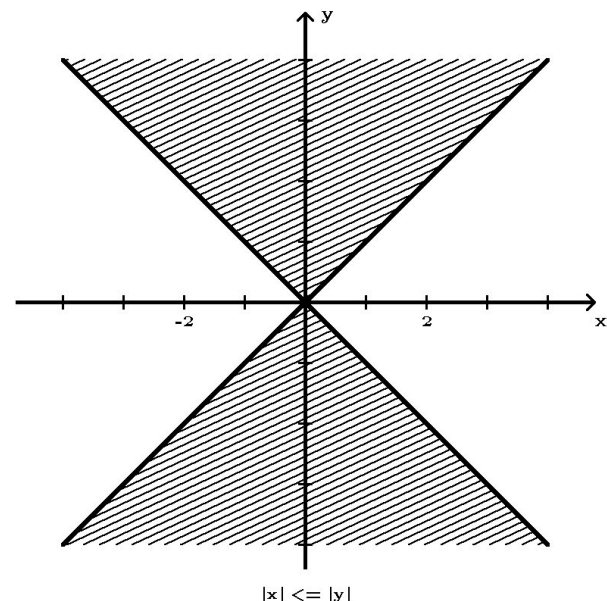
Dann ist $|x| = -x$ und $|y| = y$; folglich lautet die Ungleichung $-x \leq y \Leftrightarrow y \geq -x$.

Fall $x < 0$ und $y < 0$:

Dann ist $|x| = -x$ und $|y| = -y$; folglich lautet die Ungleichung $-x \leq -y \Leftrightarrow y \leq x$.

Fall $x \geq 0$ und $y < 0$:

Dann ist $|x| = x$ und $|y| = -y$; folglich lautet die Ungleichung $x \leq -y \Leftrightarrow y \leq -x$.



$$|x| \leq |y|$$

Aufgabe 2.12b): $|x| \leq |y|$

2.12c): $|x| + |y| < 2$

Fallunterscheidung:

Fall $x \geq 0$ und $y \geq 0$:

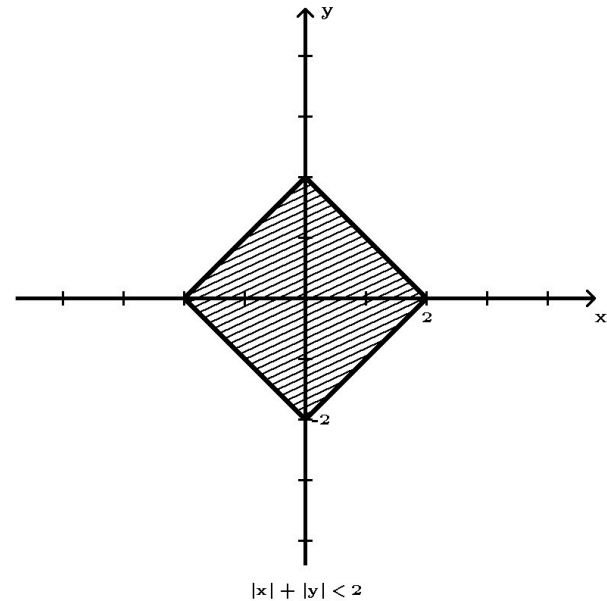
Dann ist $|x| = x$ und $|y| = y$; folglich lautet die Ungleichung

$$x + y < 2 \quad \Leftrightarrow \quad y < -x + 2$$

Fall $x < 0$ und $y \geq 0$:

Dann ist $|x| = -x$ und $|y| = y$; folglich lautet die Ungleichung

$$-x + y < 2 \quad \Leftrightarrow \quad y < x + 2$$



Aufgabe 2.12c): $|x| + |y| < 2$

Fall $x < 0$ und $y < 0$:

Dann ist $|x| = -x$ und $|y| = -y$; folglich lautet die Ungleichung

$$-x - y < 2 \quad \Leftrightarrow \quad y > -x - 2$$

Fall $x \geq 0$ und $y < 0$:

Dann ist $|x| = x$ und $|y| = -y$; folglich lautet die Ungleichung

$$x - y < 2 \quad \Leftrightarrow \quad y > x - 2$$

2.12d): $|2 \cdot x| \leq x^2 + y^2 \leq |2 \cdot y|$

2.13 Kurvendiskussion

a) Nullstellen, Pole und Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Eine gebrochen rationale Funktion f hat die Form

$$f(x) = \frac{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0}{b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + b_1 \cdot x + b_0}$$

wobei

- n und m natürliche und

- $a_0, a_1, \dots, a_n$ und $b_0, b_1, \dots, b_m$ reelle

Zahlen sind.

- Wenn daher eine gebrochen rationale Funktion in $x_0 = 2$ und in $x_1 = 0$ eine Nullstelle besitzt, dann muss der Zähler die Faktoren $x - x_0 = x - 2$ und $x - x_1 = x$ enthalten.
- Und wenn eine gebrochen rationale Funktion in $x_2 = 1$ und in $x_3 = -3$ einen Pol besitzt, dann muss der Nenner die Faktoren $x - x_2 = x - 1$ und $x - x_3 = x + 3$ enthalten.
- Wenn dann $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{3}{2}$ gelten soll, dann muss einerseits der höchste Grad im Zähler (hier also n) gleich dem höchsten Grad im Nenner (hier also m) sein, [d.h. $m = n$], und für die Koeffizienten a_n bzw. b_m muss gelten $\frac{a_n}{b_m} = \frac{3}{2}$.

Wir wählen daher

$$f(x) = \frac{3 \cdot x \cdot (x - 2)}{2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)} = \frac{3 \cdot x^2 - 6 \cdot x}{2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 6}$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{6}{x}}{2 + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2}} = \frac{3}{2}$$

Und die Asymptote?

Dazu führen wir eine Polynomdivision durch:

$$f(x) = \begin{array}{r} (3 \cdot x^2 \quad - \quad 6 \cdot x) \\ -(3 \cdot x^2 \quad + \quad 6 \cdot x \quad - \quad 9) \\ \hline \quad \quad \quad - \quad 12 \cdot x \quad + \quad 9 \end{array} : (2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 6) = \frac{3}{2} + \frac{-12 \cdot x + 9}{2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 6}$$

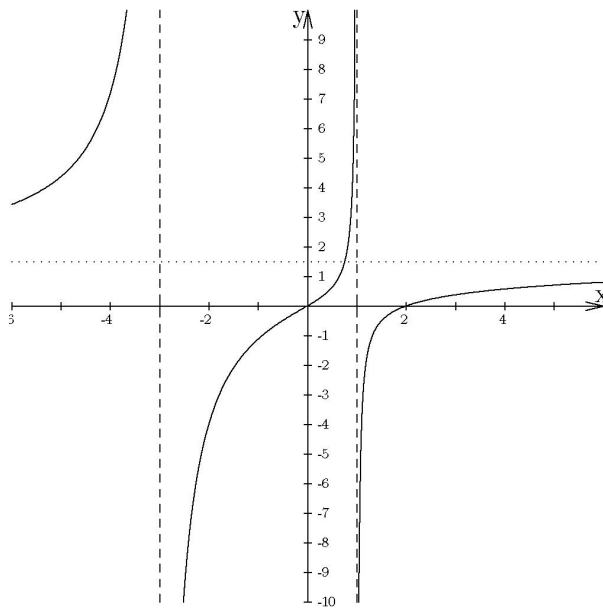
Darin ist $y = a(x) = \frac{3}{2}$ die Asymptote $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = a(x)\}$.

Ferner können die Schnittpunkte (x_s, y_s) zwischen Kurve und Asymptote bestimmt werden, denn für diese muss gelten

$$f(x_s) = a(x_s), \text{ also hier } f(x_s) = \frac{3}{2}$$

Nach dem Ergebnis der Polynomdivision muss also $\frac{-12 \cdot x_s + 9}{2 \cdot x_s^2 + 4 \cdot x_s - 6} = 0$ sein,

d.h. $-12 \cdot x_s + 9 = 0$ oder $\boxed{x_s = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}}$ - und dies ist der einzige Schnittpunkt zwischen Asymptote und Kurve.



Zur Kurvendiskussion a)
Asymtote: gepunktet
Pole: gestrichelt

Der Definitionsbereich D ist dann

$$D = \mathbb{R} - \{1, -3\}$$

Das Verhalten der links- und rechtsseitigen Grenzwerte kann wie folgt beschrieben werden:

Für den Pol $x_2 = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} = -\infty$$

Für den Pol $x_3 = -3$:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} = -\infty$$

b) Nullstellen, Pole und Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Wieder betrachten wir eine gebrochen rationale Funktion f , diesmal

$$f(x) = \frac{x^4 - 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - x}{x^4 - 4 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2}$$

Zunächst suchen wir Nullstellen:

Nullstellen einer gebrochen rationalen Funktion sind Nullstellen des Zählers, die nicht gleichzeitig Nullstellen des Nenners sind:

Also suchen wir im Zähler nach Nullstellen:

Der Leitkoeffizient ist 1 und das absolute Glied des Zählers ist -1, also suchen wir unter den Teilern von -1, d.h. in der Menge $\{1, -1\}$, nach dem Horner Schema:

$x_0 = 1$	1	-3	3	-1	0	also $x^4 - 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - x = (x - 1) \cdot (x^3 - 2 \cdot x^2 + x)$
		1	-2	1	0	
$x_1 = 1$		1	-1	0	<u>0</u>	
		1	-1	0	<u>0</u>	also $x^4 - 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - x = (x - 1)^2 \cdot (x^2 - x)$

Die Nullstellen x_2 und x_3 der verbleibenden quadratischen Gleichung $x^2 - x = x \cdot (x - 1)$ lassen sich erraten:

$$x_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_3 = 1$$

also gilt

$$x^4 - 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - x = (x - 1)^3 \cdot x$$

Dann suchen wir Pole:

Pole einer gebrochen rationalen Funktion sind Nullstellen des Nenners, die nicht gleichzeitig Nullstellen des Zählers sind.

Also suchen wir im Nenner nach Nullstellen $x_{p,i}$:

„Man“ kann erkennen:

$$x^4 - 4 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 4 \cdot x + 3)$$

d.h. $x_{p,1} = 0$ und $x_{p,2} = 0$, und es bleibt die quadratische Gleichung $x^2 - 4 \cdot x + 3$ übrig mit $x_{p,3} = 1$ und $x_{p,4} = 3$, also

$$x^4 - 4 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 = x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$$

Die Funktion f lässt sich also schreiben in der Form

$$f(x) = \frac{x^4 - 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - x}{x^4 - 4 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2} = \frac{(x - 1)^3 \cdot x}{x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)} = \frac{(x - 1)^2}{x \cdot (x - 3)} = \frac{x^2 - 2 \cdot x + 1}{x^2 - 3 \cdot x}$$

Auch das Vorzeichenverhalten kann man prüfen:

Da sich das Vorzeichen einer gebrochen rationalen Funktion höchstens an Nullstellen oder Polen ändern kann, gibt es also nur die x -Werte $x_0 = 1$ und $x_{p,1} = 0$ sowie $x_{p,4} = 3$, an denen so etwas geschehen kann. Wir wählen die Produktdarstellung und schreiben folgendes Diagramm:

	$\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$(x - 1)^2$	+	+	+	+
x	-	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	+
$f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x \cdot (x - 3)}$	+	-	-	+

d.h.

- im Intervall $\infty < x < 0$ ist die Funktion $f(x)$ positiv und daher verläuft die Kurve oberhalb der x -Achse,
- im Intervall $0 < x < 1$ ist die Funktion $f(x)$ negativ und daher verläuft die Kurve unterhalb der x -Achse ...

Und nun suchen wir die Asymptote:

Dazu führen wir eine Polynomdivision durch:

$$f(x) = \begin{array}{r} (x^2 - 2 \cdot x + 1) : (x^2 - 3 \cdot x) = 1 + \frac{x+1}{x^2-3 \cdot x} \\ -(x^2 - 3 \cdot x) \\ \hline x + 1 \end{array}$$

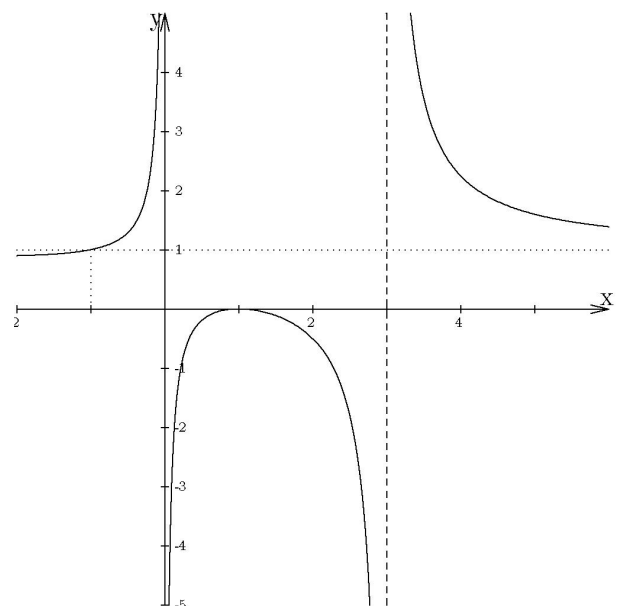
Darin ist $y = a(x) = 1$ die Asymptote
 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = a(x)\}$.

Ferner können die Schnittpunkte (x_s, y_s) zwischen Kurve und Asymptote bestimmt werden, denn für diese muss gelten

$$f(x_s) = a(x_s), \text{ also hier } f(x_s) = 1$$

Nach dem Ergebnis der Polynomdivision muss also $\frac{x+1}{x^2-3 \cdot x} = 0$ sein,

d.h. $x_s = -1$ - und dies ist der einzige Schnittpunkt zwischen Asymptote und Kurve.



Zur Kurvendiskussion b)

Asymtote: gepunktet

Pole: gestrichelt

c) Nullstellen, Pole und Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

c1) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

c2) $g(x) = \frac{x^4+4}{x^2-1}$

Lösung c:

Aufgabe c1: $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

Nullstellen des Zählers: $x_Z = 2$ Nullstellen des Nenners: $x_N = 1$ Nullstellen der Funktion: $x_n = 2$ Pole der Funktion: $x_p = 1$

Bestimmung der Asymptote:

$$f(x) = (x-2) : (x-1) = \underbrace{1}_{a(x)} - \frac{1}{x-1}$$

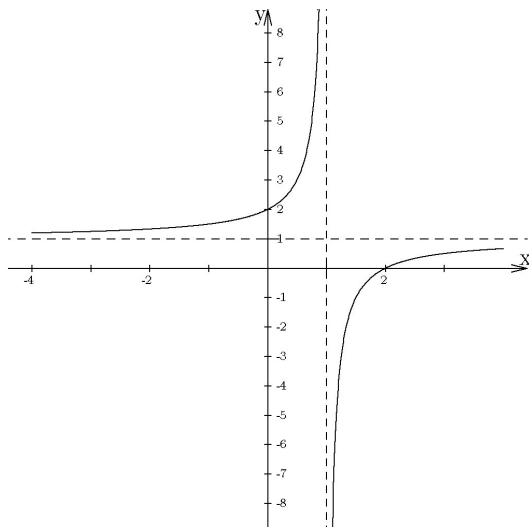
Asymptote: $a(x) = 1$ $f(x) - a(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

also keine Schnittpunkte

zwischen Asymptote und Funktion.

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2},$$

also keine relativen Extremwerte.



Aufgabe c1: $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

Aufgabe c2: $g(x) = \frac{x^4+4}{x^2-1}$

Nullstellen des Zählers: $x_{Z,1} = 1+i$, $x_{Z,2} = 1-i$, $x_{Z,3} = -1+i$, $x_{Z,4} = -1-i$ Nullstellen des Nenners: $x_{N,1} = 1$, $x_{N,2} = -1$

Nullstellen der Funktion: Keine

Pole der Funktion: $x_{p,1} = 1$, $x_{p,2} = -1$

Bestimmung der Asymptote:

$$g(x) = (x^4+4) : (x^2-1) = \underbrace{x^2+1}_{a(x)} + \frac{5}{x^2-1}$$

Asymptote: $a(x) = x^2+1$ $g(x) - a(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ also keine Schnittpunkte

zwischen Asymptote und Funktion

Bestimmung möglicher Extrema:

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{x \cdot (x^4 - 2 \cdot x^2 - 4)}{(x^2-1)^2}$$

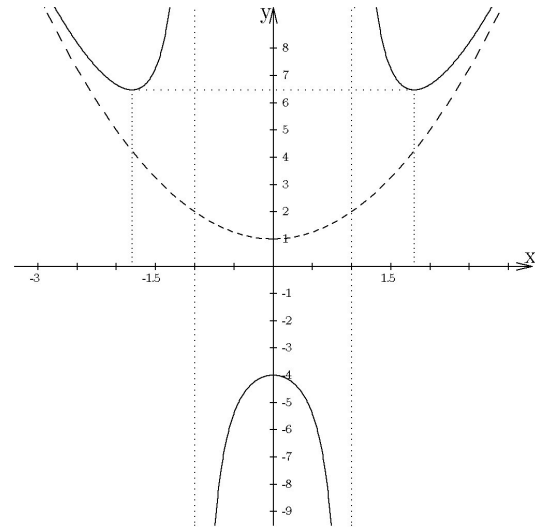
Mögliche relative Extremwerte:

$$x_{e,1} = 0, \quad x_{e,2} = \sqrt{1+\sqrt{5}} \approx 1.7989,$$

$$x_{e,3} = -\sqrt{1+\sqrt{5}} \approx -1.7989,$$

$$x_{e,4} = \sqrt{1-\sqrt{5}} \approx 1.1118 \cdot i,$$

$$x_{e,5} = -\sqrt{1-\sqrt{5}} \approx -1.1118 \cdot i$$



Aufgabe c2: $g(x) = \frac{x^4+4}{x^2-1}$

d) Nullstellen, Pole und Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

d1) $h(x) = \frac{x^3 - 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 8}{x^3 + x^2}$

d2) $k(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$

Aufgabe d1:

$$h(x) = \frac{x^3 - 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 8}{x^3 + x^2}$$

Nullstellen des Zählers:

$$x_{Z,1} = -2, x_{Z,2} = 2, x_{Z,3} = 2$$

Nullstellen des Nenners:

$$x_{N,1} = 0, x_{N,2} = 0, x_{N,3} = -1,$$

Nullstellen der Funktion:

$$x_{n,1} = -2, x_{n,2} = 2 \text{ (} x_{n,2} \text{ doppelt)}$$

Pole der Funktion:

$$x_{p,1} = -1, x_{p,2} = 0, \text{ (} x_{p,2} \text{ doppelt)}$$

Bestimmung der Asymptote:

$$h(x) = (x^3 - 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 8) : (x^3 + x^2) \\ = \underbrace{1}_{a(x)} + \frac{-3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 8}{x^3 + x^2}$$

Asymptote: $a(x) = 1$

$$h(x) - a(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \cdot (\pm\sqrt{28} - 2)$$

also folgende Schnittpunkte

zwischen Asymptote und Funktion:

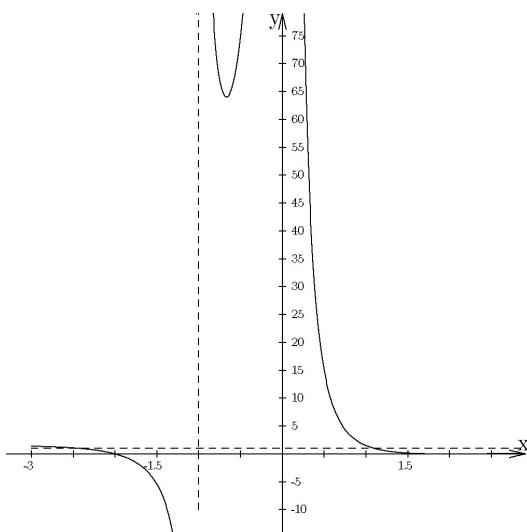
$$\Leftrightarrow x_1 \approx 1.1 \text{ und } x_2 \approx -2.4$$

Bestimmung möglicher Extrema:

$$h'(x) = \frac{3 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 - 20 \cdot x - 16}{x^3 \cdot (x + 1)^2}$$

mögliche relative Extremwerte:

$$x_{e,1} = -4, x_{e,2} = -\frac{2}{3} \approx -0.667, x_{e,3} = 2$$

**Aufgabe d1:**

$$h(x) = \frac{x^3 - 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 8}{x^3 + x^2}$$

Aufgabe d2: $k(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$

Nullstellen des Zählers:

$$x_{Z,1} = -1, x_{Z,2} = i, x_{Z,3} = -i$$

Nullstellen des Nenners:

$$x_{N,1} = 1, x_{N,2} = -1, x_{N,3} = i, x_{N,4} = -i$$

Nullstellen der Funktion: keine

Pole der Funktion: $x_p = 1$

Bestimmung der Asymptote:

$$k(x) = \frac{(x+1) \cdot (x^2+1)}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)} = \frac{1}{x-1}$$

Asymptote: $y = 0$

$$k(x) - a(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

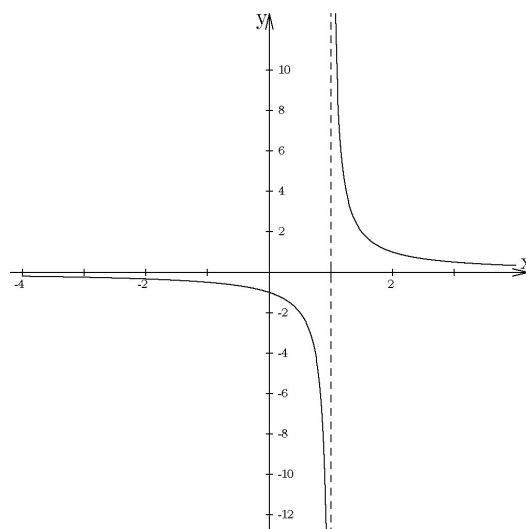
also keine Schnittpunkte

zwischen Asymptote und Funktion

Bestimmung möglicher Extrema:

$$k'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2},$$

also keine relativen Extremwerte



Aufgabe d2: $k(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$

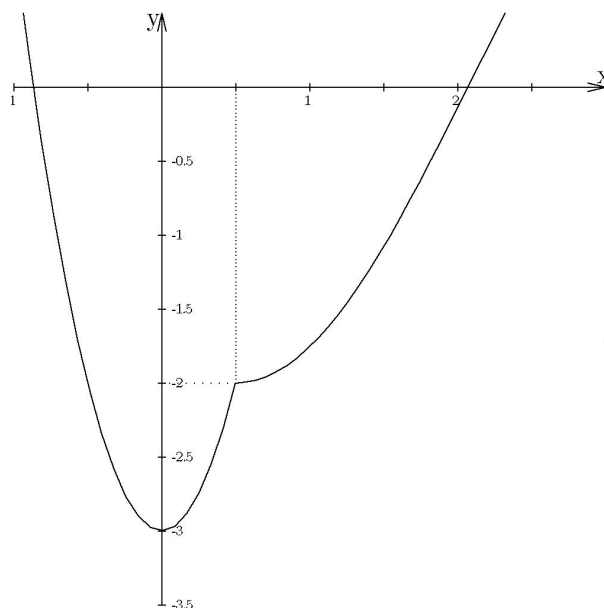
links- und rechtsseitiger Grenzwert

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cdot x^2 - 3 & \text{für } x < \frac{1}{2} \\ -2 \cdot \cos\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{für } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

an der Stelle $x = \frac{1}{2}$

Sinnvoll ist stets eine Zeichnung:



Zu links- und rechtsseitigen Grenzwerten

Natürlich sieht man bereits, dass die Kurve stetig ist in diesem Punkt.

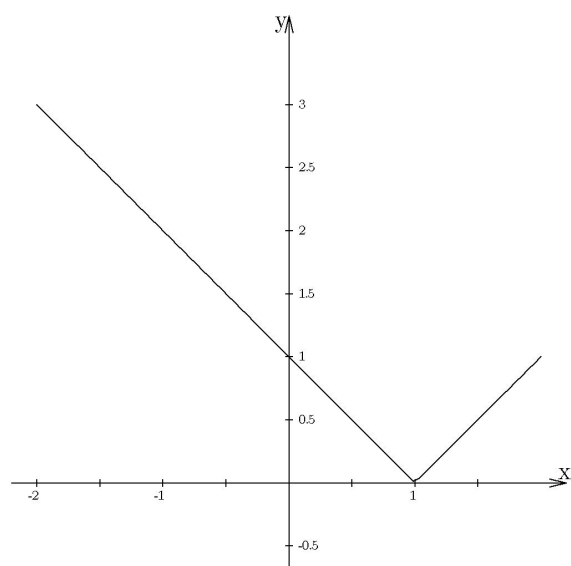
Aber wir können auch rechnen:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} 4 \cdot x^2 - 3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 = -2$$

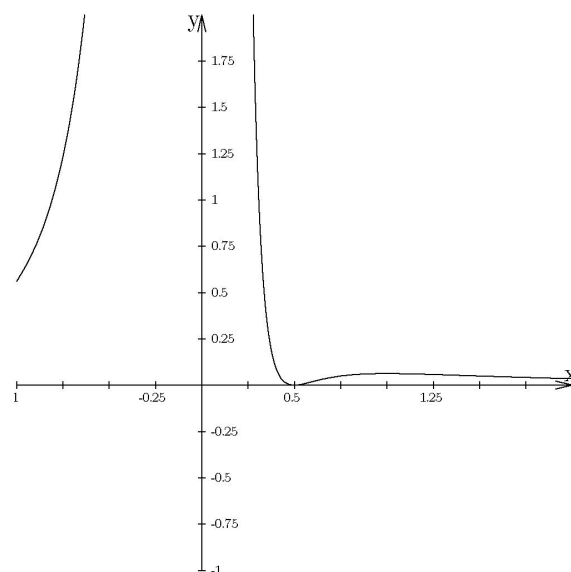
und

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} -2 \cdot \cos\left(x - \frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -2$$

also stimmen links- und rechtsseitiger Grenzwert überein (und es ist $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$ definiert).

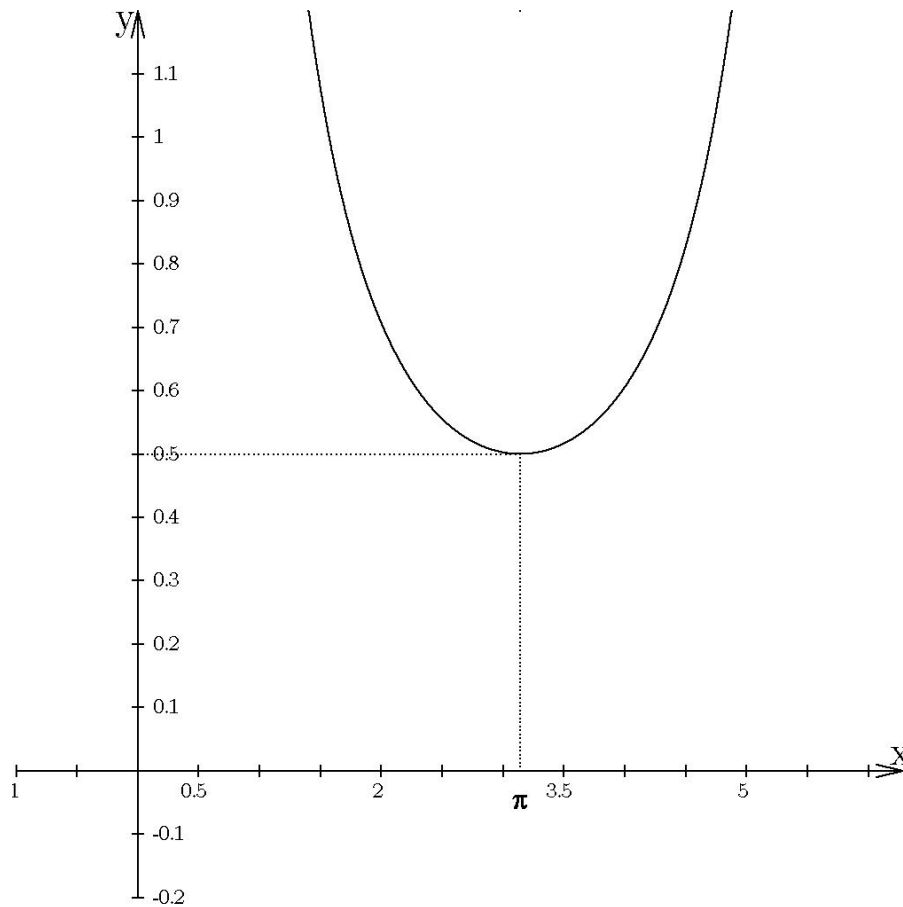
Untersuchungen zur Stetigkeit

$$f(x) = \max_{x \in \mathbb{R}} \{x - 1, -x + 1\}$$



$$f(x) = \left| \frac{x^2 - x + \frac{1}{4}}{4 \cdot x^4} \right|$$

$x_0 = 0$ ist eine Polstelle,
daher nicht stetig fortsetzbar



$$f(x) = \frac{\cos(x) + 1}{(\sin(x))^2}$$

Diese Funktion kann mit einigen Tricks auch umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\cos(x) + 1}{(\sin(x))^2} \\
 &\stackrel{\sin^2(\heartsuit) + \cos^2(\heartsuit) = 1}{=} \frac{\cos(x) + 1}{1 - (\cos(x))^2} \\
 &\stackrel{a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)}{=} \frac{\cos(x) + 1}{(1 + \cos(x)) \cdot (1 - \cos(x))} \\
 &= \frac{1}{1 - \cos(x)}
 \end{aligned}$$

Also ist f in $x_0 = \pi$ stetig und es ist $f(\pi) = \frac{1}{2}$.

Nullstellen des Nenners: $x = 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$