



20 Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Trennung der Veränderlichen (TdV) (REP S.426)

Eine DGL der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ läßt sich mit der Methode „Trennung der Veränderlichen“ lösen:

Wegen $y' = \frac{dy}{dx}$ führt eine Trennung der Veränderlichen x und y im Falle $g(y) \neq 0$ zu

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \quad \text{oder} \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

Im Falle $g(y) = 0$ ist die DGL direkt zu prüfen.

Aufgabe 20.1:

Ein Fluß strömt im Streifen $0 < y < 1$ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{w} = (v, 0)$. Es sei Frankreich durch $y < 0$ und England durch $y > 1$ charakterisiert, und der Streifen beschreibt (idealisiert) den Kanal.

Ein Fahrzeug, das mit einer Geschwindigkeit $|\vec{f}|$ fahren kann, soll den Kanal

a) in der kürzesten Zeit

b) auf dem kürzesten Weg quer.

Als Lösung fordert England, dass der (gefarene) Kurs $\vec{f}(t)$ des Fahrzeuges, das von Frankreich nach England fahren will, stets senkrecht auf der Uferlinie stehen soll (also $\vec{f}(t) = (0, |f(t)|)$).

Als Lösung fordert Frankreich, dass das von England nach Frankreich fahrende Fahrzeug von einem Startpunkt $S = (a, 1)$ stets in Richtung Süd zu fahren hat - auch dann, wenn es infolge der Stömung $\vec{w}$ nicht den Ort $Z = (a, 0)$ erreicht.

Was passt zusammen, was ist falsch und was wäre sinnvoll?

Lösung von Aufgabe 20.1:

Zunächst ist ersichtlich, dass ein Fahrzeug, dessen maximale Fahrgeschwindigkeit geringer ist als die Strömungsgeschwindigkeit des Kanals (also bei $|\vec{f}| < |\vec{w}| = v$), keine Möglichkeit besteht, senkrecht zur Uferlinie zu fahren. - Folglich ist die englische Lösung nicht für alle Fahrzeuge anwendbar und daher ungeeignet.

Und die französische Lösung? Sie ist akzeptabel, denn sie lässt sich auch von langsamen Fahrzeugen anwenden.

Aufgabe 20.2:

Skizzieren Sie das Richtungsfeld für

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \text{mit} \quad y > 0$$

und lösen Sie diese Differentialgleichung nach dem Verfahren TdV.

Lösung von Aufgabe 20.2 (BEI 16.1):

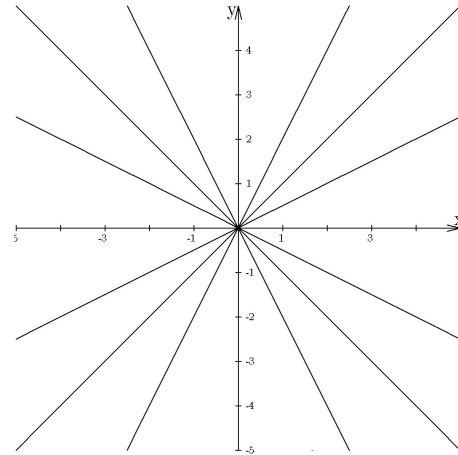
Es ist $y' = -\frac{x}{y}$.

Für eine Konstante k erhalten wir aus $y' = k$ jeweils die zu k gehörige Isokline (Linie gleicher Steigung):

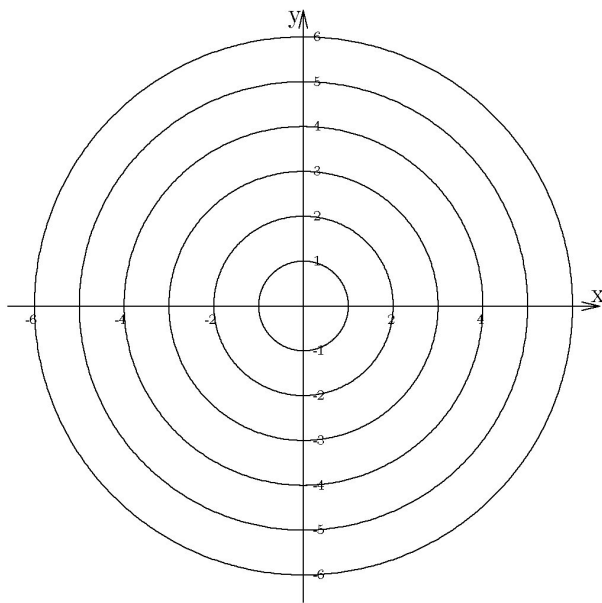
$$-\frac{x}{y} = k \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{R},$$

also

$$\begin{cases} x = 0 & \text{für } c = 0 \\ y = -\frac{1}{k} \cdot x & \text{für } c \neq 0 \end{cases}$$



Zu Aufgabe 20.2:
Isokline für die Steigungen
 $k = \frac{1}{2}, 1, 2, -2, -1, -\frac{1}{2}$, und 0



Zu Aufgabe 20.2
Lösung der Differentialgleichung
 $2 \cdot c = 1, 2, 3, 4, 5$ und 6

Nach der Methode TdV kann diese DGL gelöst werden:

Wir setzen $f(x) := -x$ und $g(y) = \frac{1}{y}$. Dann ist $g(y) \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und somit

$$\int \frac{dy}{y} = - \int x dx$$

Daher gilt $\frac{1}{2} \cdot y^2 = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + c$ oder $x^2 + y^2 = 2 \cdot c$,
d.h. jeder Kreis um $(0,0)$ ist eine Lösung dieser DGL.

Aufgabe 20.3:

Skizzieren Sie das Richtungsfeld für die Differentialgleichung $y' = x^2 \cdot y - y$ im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ für die Steigungen $k = -1.0, -0.5, 0.0, 0.5, 1.0, 2.0$ und zeichnen Sie näherungsweise die Lösungskurven durch die Punkte

$P_1 = (1,0)$ bzw. $P_2 = (0,1)$ ein.

Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

Zeichnen Sie die Lösungskurven für verschiedene Konstante im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ (z.B. für $c = -1.0, -0.5, 0.0, 0.5, 1.0$).

Lösung von Aufgabe 20.3:

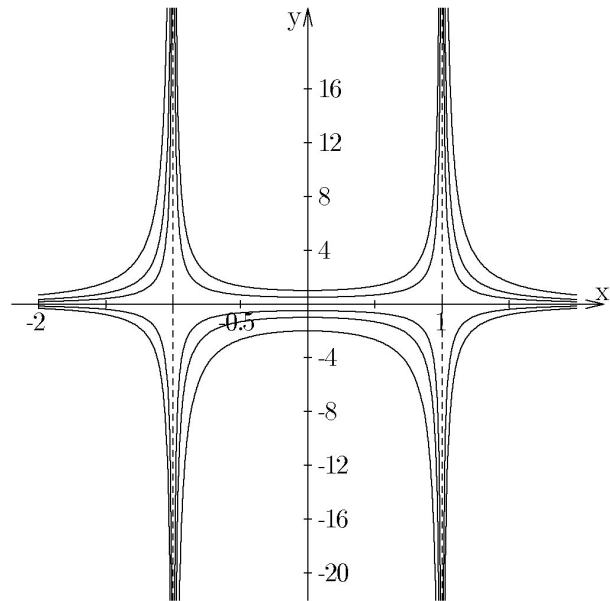
Es ist $y' = x^2 \cdot y - y = (x^2 - 1) \cdot y$.

Für eine Konstante k erhalten wir aus $y' = k$ jeweils die zu k gehörige Isokline (Linie gleicher Steigung):

$$y \cdot (x^2 - 1) = k \quad \text{mit } k \in \mathbb{R},$$

also $x = 1$ und $x = -1$ für $k = 0$,

$$\text{und } y = \frac{k}{x^2 - 1} \quad \text{für } k \neq 0.$$



Aufgabe 20.3 Isoklinen (Linien gleicher Steigung)
für $k = -1.0, -0.5, 0.5, 1.0, 2.0$
(ausgezogen)
und für $k = 0$ (gestrichelt).

Berechnung der allgemeinen Lösung:

$y' = (x^2 - 1) \cdot y$ ist eine Differentialgleichung vom Typ $y' = f(x) \cdot g(y)$.

1) $y = 0$ ist Lösung;

2) für $y \neq 0$ wird das Verfahren Trennung der Veränderlichen angewandt:

$$\int \frac{dy}{y} = \int (x^2 - 1) dx \quad \Rightarrow \quad \ln |y| = \frac{1}{3} \cdot x^3 - x + \ln(c) \quad \text{mit } c > 0,$$

$$|y| = c \cdot e^{\frac{1}{3}x^3 - x} \quad \text{mit } c > 0, \quad y = c \cdot e^{\frac{1}{3}x^3 - x} \quad \text{mit } c \neq 0;$$

$$1), 2) \quad \Rightarrow \quad \underline{y = c \cdot e^{\frac{1}{3}x^3 - x}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

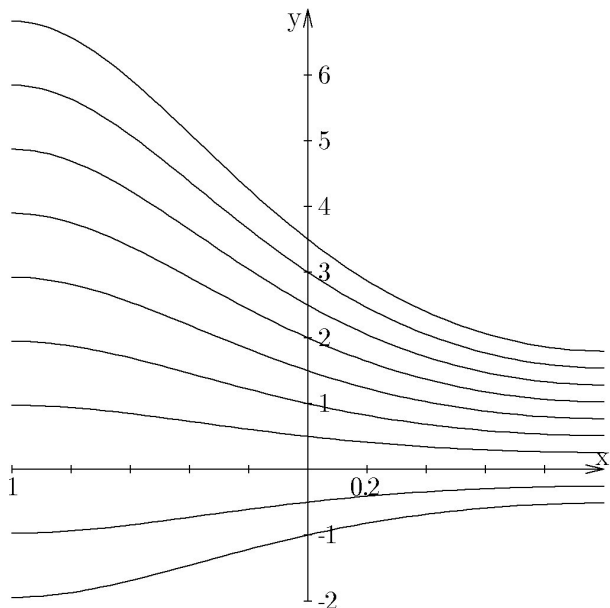
ist die allgemeine Lösung.

Spezielle Lösung y_1 durch $P_1 = (1, 0)$:

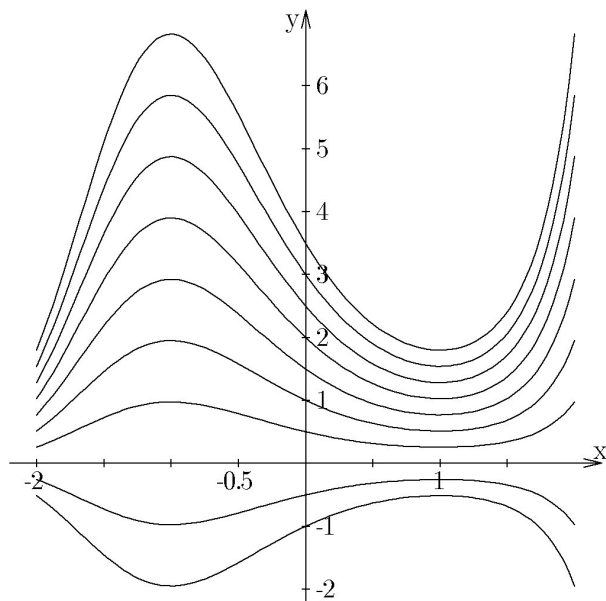
$$0 = c_1 \cdot e^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{y_1 = 0}$$

Spezielle Lösung y_2 durch $P_2 = (0, 1)$:

$$1 = c_2 \cdot e^0 \Rightarrow c_2 = 1 \Rightarrow \underline{y_2 = e^{\frac{1}{3}x^3 - x}}$$

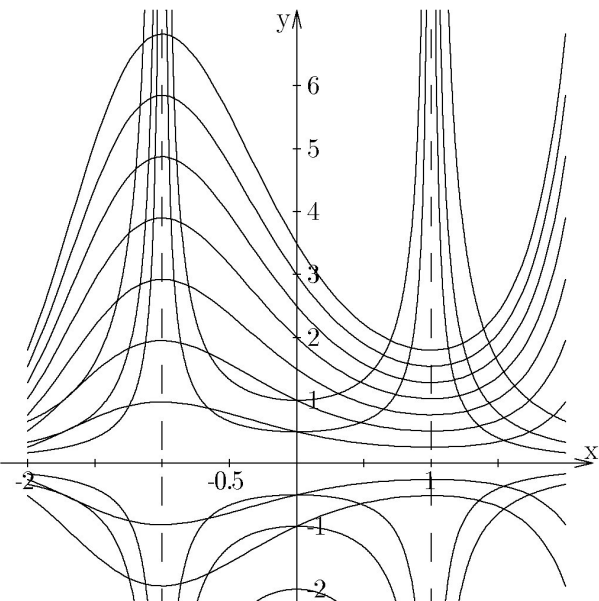


Aufgabe 20.3 Schar der Lösungen für $c = \pm 1.0, \pm 0.5, 0.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5$.



Zu Aufgabe 20.3

Schar der Lösungen für
 $c = \pm 1.0, \pm 0.5, 0.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5$
 im Intervall $[-2, 2]$



Zu Aufgabe 20.3

Isoklinen und Schar der Lösungen für
 $c = \pm 1.0, \pm 0.5, 0.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5$
 im Intervall $[-2, 2]$

Aufgabe 20.4:

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$(x^2 - 1) \cdot y' - x \cdot (y^2 - 2 \cdot y) = 0$$

durch Trennung der Veränderlichen. Zeichnen Sie mehrere Lösungskurven und bestimmen Sie die Lösung durch den Punkt $P = (2, 0.5)$.

Lösung von Aufgabe 20.4:

$$y' = \frac{x \cdot (y^2 - 2 \cdot y)}{x^2 - 1} = \frac{x}{x^2 - 1} \cdot (y^2 - 2 \cdot y)$$

ist eine Differentialgleichung vom Typ $y' = f(x) \cdot g(y)$.

a) $g(y) = y^2 - 2 \cdot y = y \cdot (y - 2) = 0$ gilt für $y_1 = 0$ und für $y_2 = 2$.

wenn $y_1 = 0$, dann gilt auch $y'_1 = 0$, also ist die DGL erfüllt, d.h. y_1 ist eine Lösung der DGL.

wenn $y_2 = 2$, dann gilt auch $y'_2 = 0$, also ist die DGL erfüllt, d.h. y_2 ist eine Lösung der DGL.

b) Für $g(y) \neq 0$ wird das Verfahren Trennung der Veränderlichen angewandt:

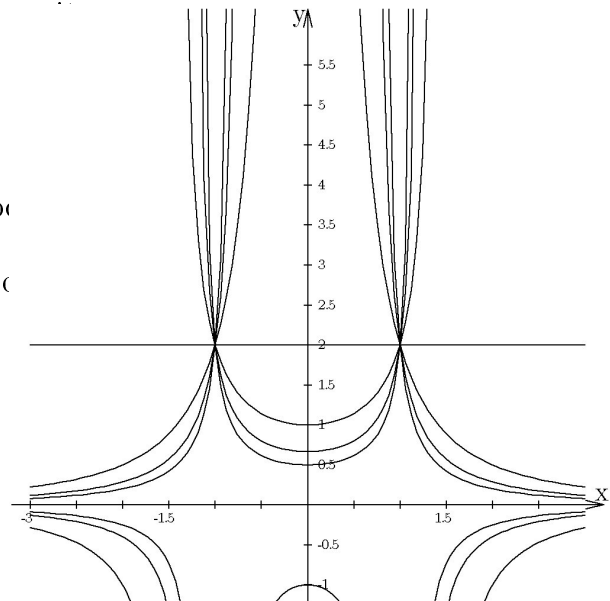
$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y \cdot (y-2)} &= \int \frac{x}{x^2-1} dx \quad \text{oder} \\ \int \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} \right) dy &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot x}{x^2-1} dx \quad \text{oder} \\ \int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} \right) dy &= \int \frac{2 \cdot x}{x^2-1} dx \quad \text{oder} \\ \int \frac{1}{y-2} dy - \int \frac{1}{y} dy &= \ln |x^2-1| + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \quad \text{oder} \\ \ln |y-2| - \ln |y| &= \ln |x^2-1| + c \\ c \in \mathbb{R} \quad \text{oder} \\ \ln \left| \frac{y-2}{y} \right| &= \ln |x^2-1| + c \quad \text{mit } c \\ \text{oder} \\ \left| \frac{y-2}{y} \right| &= |x^2-1| \cdot c^* \quad \text{mit } c^* > 0 \quad \text{oder} \\ \frac{y-2}{y} &= (x^2-1) \cdot c^{**} \quad \text{mit } c^{**} \neq 0 \\ y &= \frac{2}{1 - c^{**} \cdot (x^2-1)} \quad c^{**} \neq 0 \end{aligned}$$

Insgesamt lautet also die allgemeine Lösung

$$y = \begin{cases} \frac{2}{1 - c^{***} \cdot (x^2-1)} & c^{***} \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

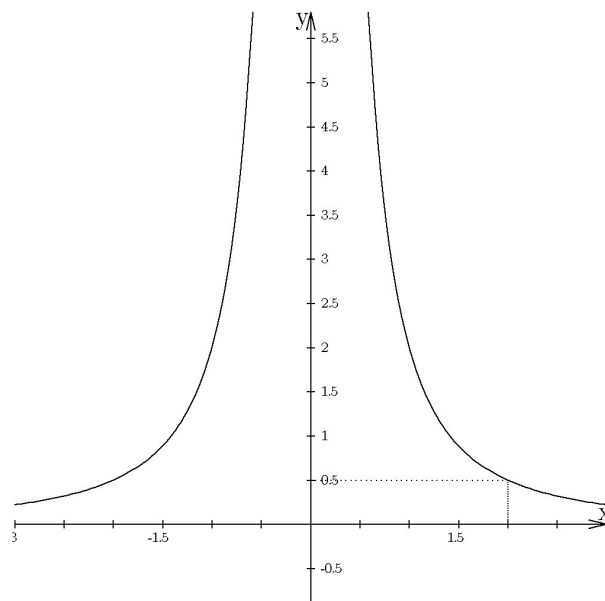
Für $x = 2$ und $y = \frac{1}{2}$ ergibt sich durch Einsetzen in diese Gleichung

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{1 - c_0 \cdot (2^2 - 1)} = \frac{2}{1 - 3 \cdot c_0} \quad \text{und damit} \\ c_0 = -1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{2}{x^2}.$$



Zu Aufgabe 20.4
allgemeine Lösung

$$y = \frac{2}{1 - c^{***} \cdot (x^2 - 1)} \\ c^{***} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$



Zu Aufgabe 20.4
spezielle Lösung

$$y = \frac{2}{1 - c^{***} \cdot (x^2 - 1)} \quad \text{mit } c^{***} = -1 \quad \text{durch } P = (2, \frac{1}{2})$$

Ähnlichkeits-DGL REP Seite 428

Eine DGL vom Typ

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

läßt sich zurückführen auf eine DGL vom Typ

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Ansatz: $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. - Dann ist $y = z \cdot x$ und $y' = z' \cdot x + z$.

Mit diesem Ansatz läßt sich dann die Ähnlichkeits-DGL umformen.

Damit kann nun die DGL aus Aufgabe 26.2 gelöst werden:

Aufgabe 20.5:

Wir setzen

$$\overrightarrow{\text{schwimm}} := -v \cdot \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right) \cdot \Delta t$$

und

$$\overrightarrow{\text{strom}} := (0, 2 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1))$$

also wird die gesamte Ortsänderung beschrieben durch

$$\overrightarrow{\text{schwimm}} + \overrightarrow{\text{strom}} = \left(-\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot v \cdot \Delta t, -\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot v \cdot \Delta t + 2 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1) \right)$$

oder - für sehr kurze Zeiteinheiten dt :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot v \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot v + 2 \cdot x_0 \cdot (1 - x_0)$$

denn für sehr kurze Zeiteinheiten fallen x_0 , x_1 und x_2 zusammen; daher wird nur noch allgemein x betrachtet.

Aufstellung einer Differentialgleichung:

Die Bahnkurve $y = y(x)$ wird dann durch ihre Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot v + 2 \cdot x \cdot (1 - x)}{-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot v} \\ &= \frac{-y \cdot v + 2 \cdot x \cdot (1 - x) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{-v \cdot x} = \frac{y}{x} - \frac{2}{v} \cdot x \cdot (1 - x) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \end{aligned}$$

Lösen Sie diese Ähnlichkeits-DGL.

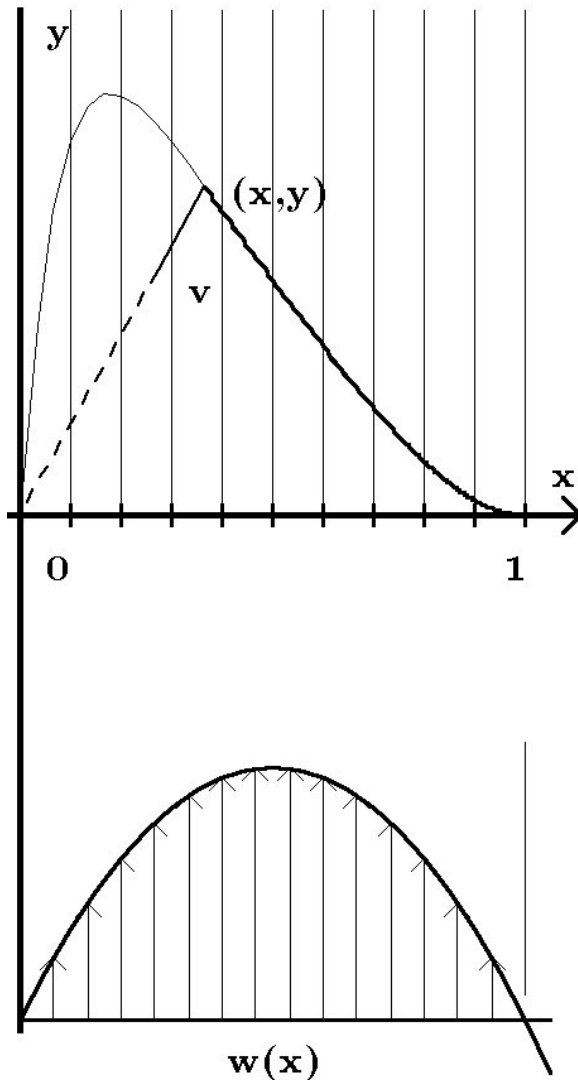
Lösung von Aufgabe 20.5:**graphische Lösung von Aufgabe 19.1:**

Bild zu Aufgabe 19.1

Lösung der DGL aus Aufgabe 19.1:

Die DGL

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{2}{v} \cdot x \cdot (1-x) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad (*)$$

stellt eine Differentialgleichung vom Typ

$$y' = \frac{y}{x} + g(x) \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$$

dar - mit $g(x) = \frac{2}{v} \cdot x \cdot (1-x)$

$$\text{und } f\left(\frac{y}{x}\right) = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Diese DGL kann am einfachsten gelöst werden, wenn substituiert wird:

$$z := \frac{y}{x}$$

Dann ist nämlich $y = x \cdot z$ und damit $y' = z + x \cdot z'$.

Also wird aus (*):

$$z + x \cdot z' = z - \frac{2 \cdot x \cdot (1-x)}{v} \cdot \sqrt{1 + z^2}$$

oder

$$x \cdot z' = -\frac{2 \cdot x \cdot (1-x)}{v} \cdot \sqrt{1 + z^2} \quad (**)$$

Mit dem Verfahren „Trennung der Veränderlichen“ wird aus (**)

1. Schritt (Auflösung nach z'):

$$z' = -\frac{2 \cdot (1-x)}{v} \cdot \sqrt{1 + z^2} = f(x) \cdot h(z)$$

2. Schritt (Fall $h(z) = 0$):Wegen $h(z) = \sqrt{1 + z^2}$ kommt der Fall $h(z) = 0$ für kein $z \in \mathbb{R}$ vor.3. Schritt (Fall $h(z) \neq 0$):

$$\int \frac{z'}{\sqrt{1 + z^2}} = \int -\frac{2 \cdot (1-x)}{v} \quad \text{und damit} \quad \operatorname{arsinh}(z) = -\frac{1}{v} \cdot (1-x)^2 + c$$

oder

$$y = x \cdot \sinh\left(\frac{1}{v} \cdot (x-1)^2\right)$$

Damit erhält man die Bahnkurve des Schwimmers. Während die aus den Einzelschritten konstruierte Kurve ihr Maximum im Punkt (0.053, 204.6) hat, erreicht diese Kurve ihr Maximum in dem Punkt (0.053, 208.0)

Aufgabe 20.6:

Lösen Sie die Differentialgleichung $0 = x \cdot y' - y - \sqrt{x^2 - y^2}$ für $x > 0$

Lösung von Aufgabe 20.6:

Der erste Schritt zur Lösung einer DGL erster Ordnung ist die Auflösung nach y' :

Die DGL

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad (*)$$

stellt eine Differentialgleichung vom Typ

$$y' = \frac{y}{x} + g(x) \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{mit} \quad g(x) = 1 \quad \text{und} \quad f\left(\frac{y}{x}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Diese DGL kann am einfachsten gelöst werden, wenn substituiert wird:

$$z := \frac{y}{x}$$

Dann ist nämlich $y = x \cdot z$ und damit $y' = z + x \cdot z'$.

Also wird aus (*):

$$z + x \cdot z' = z + \sqrt{1 - z^2} \quad \text{oder} \quad x \cdot z' = \sqrt{1 - z^2} \quad \text{oder} \quad z' = \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 - z^2}$$

Damit ist bereits der erste Schritt für das Verfahren „Trennung der Veränderlichen“ erledigt: wir haben nach z' aufgelöst und es ist $z' = f(x) \cdot h(z)$.

- 2. im Falle $h(z) = \sqrt{1 - z^2} = 0$: $z = \pm 1$ und damit $z' = 0$, also ist die DGL wegen $z = \frac{y}{x}$ für $y = x$ und für $y = -x$ erfüllt.

- 3. im Falle $h(z) \neq 0$: $\int \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \cdot dz = \int \frac{dx}{x}$ und damit

$$\boxed{\arcsin(z) = \ln|x| + c \quad \text{oder} \quad z = \sin(\ln|x| + c)}$$

Natürlich dürfen für z nur eingesetzt werden $-1 \leq z \leq 1$ oder

$$-1 \leq \frac{y}{x} \leq 1 \quad \text{oder} \quad -x \leq y \leq x.$$

Und dann sind die Werte von $\arcsin$ nur die „Hauptwerte“, d.h. es gilt $-\frac{\pi}{2} < \ln|x| + c \leq \frac{\pi}{2}$.

Daraus wird dann

$$\boxed{y = x \cdot \sin(\ln|x| + c) \quad \text{mit} \quad e^{-\frac{\pi}{2} - c} < x \leq e^{\frac{\pi}{2} - c}}$$

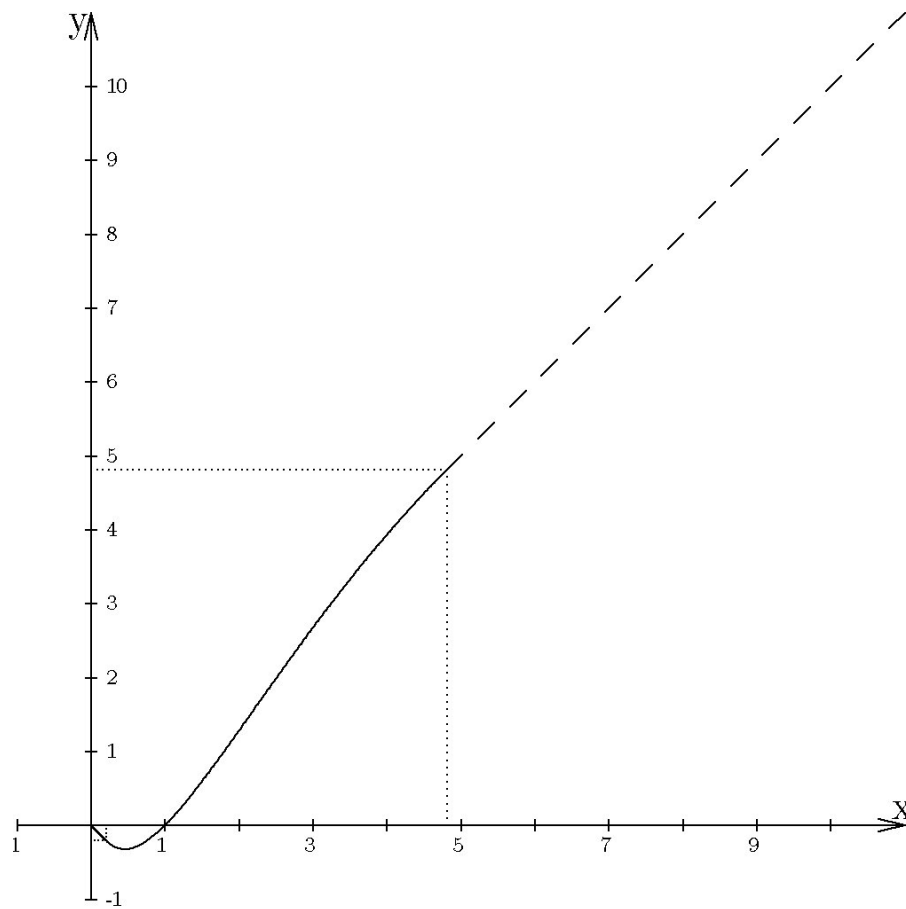


Bild zu Aufgabe 20.6 für $c = 0$:

$$y = \begin{cases} -x & \text{für } 0 < x \leq e^{-\frac{\pi}{2}} \\ x \cdot \sin(\ln |x|) & \text{für } e^{-\frac{\pi}{2}} < x \leq e^{\frac{\pi}{2}} \\ x & \text{für } e^{\frac{\pi}{2}} < x \end{cases}$$

Inhomogene lineare DGL 1. Ordnung REP Seite 431

Eine DGL vom Typ

$$y' + f(x) \cdot g(y) = r(x)$$

mit $r(x) \neq 0$ wird wie folgt gelöst:

Es wird zunächst die DGL

$$\eta' + f(x) \cdot g(\eta) = 0$$

mit dem Trennung der Veränderlichen gelöst.

Diese Lösung η heißt die Lösung der homogenen DGL.

Aus der Theorie ist bekannt, dass die Gesamtlösung die Form $y = \eta + y_s$ hat.

Eine spezielle Lösung y_s wird aus der Lösung η mit Hilfe des Verfahrens Variation der der Konstanten (VdK) gewonnen: Wenn

$$\eta = K \cdot h(x) \text{ mit } K \in \mathbb{R}$$

Lösung der homogenen DGL ist, dann wird die Konstante K als von x abhängige Variable $K(x)$ aufgefasst und

$$y_s := K(x) \cdot h(x)$$

in die DGL

$$y'_s + f(x) \cdot g(y_s) = r(x)$$

eingesetzt.

In dieser DGL muss sich $K(x)$ herauskürzen - es bleibt eine Gleichung, die nach $K'(x)$ aufgelöst werden kann. Dann kann $K(x)$ nach der Beziehung

$$K(x) = \int K'(x) dx$$

berechnet werden. Die Gesamtlösung lautet dann

$$y = \eta + K(x) \cdot h(x) = \eta + y_s$$

Aufgabe 20.7:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und die Lösung durch den Punkt $P = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{4}\right)$ der linearen Differentialgleichung

$$y' - \cot(x) \cdot y = \sin(x) \cdot \cos(x) \quad (\otimes)$$

Lösung der Aufgabe 20.7:

Die homogene DGL lautet: $\eta' - \cot(x) \cdot \eta = 0$

Diese läßt sich nach dem Verfahren TdV lösen:

1. $\eta' = \cot(x) \cdot \eta = f(x) \cdot g(\eta)$ mit $f(x) = \cot(x)$ und $g(\eta) = \eta$

also

2. $g(\eta) = 0$, d.h. $\eta = 0$: Dann ist auch $\eta' = 0$ und die homogene DGL ist erfüllt, also ist $\eta = 0$ eine Lösung.

3. $g(\eta) \neq 0$: Nach TdV ist dann $\int \frac{d\eta}{\eta} = \int \cot(x) dx = \ln(|\sin(x)|) + c$.

also $\ln(|\eta|) = \ln(|\sin(x)|) + c$ oder $|\eta| = |\sin(x)| \cdot c^*$ mit $c^* > 0$

oder $\eta = \sin(x) \cdot c^{**}$ mit $c^{**} \neq 0$

Gesamtlösung der homogenen DGL (also 1. und 2.): $\eta = K \cdot \sin(x)$ mit $K \in \mathbb{R}$.

Ansatz für eine spezielle Lösung: $y_{sp} = K(x) \cdot \sin(x)$.

Dann ist $y'_{sp} = K' \cdot \sin(x) + K \cdot \cos(x)$.

Wenn nun y_{sp} und y'_{sp} in die DGL $(\otimes)$ eingesetzt wird, so erhalten wir

$$\underbrace{K' \cdot \sin(x) + K \cdot \cos(x)}_{y'_{sp}} - \cot(x) \cdot \underbrace{K \cdot \sin(x)}_{y_{sp}} = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

und damit wegen $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$$K' \cdot \sin(x) + K \cdot \cos(x) - K \cdot \cos(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

(Bemerkung: Bei diesem Verfahren muss sich K herauskürzen lassen - andernfalls liegt ein Rechenfehler vor!)

Also

$$K' \cdot \sin(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) \quad \text{oder} \quad K' = \cos(x) \quad \text{oder} \quad K = \int K' dx = \sin(x) + c.$$

Damit ist für den Ansatz der speziellen Lösung z.B. für $c = 0$ ein y_{sp} gefunden:

$$\boxed{y_{sp} = \sin^2(x)}$$

Damit lautet die Gesamtlösung für die DGL $(\otimes)$:

$$\boxed{y = K \cdot \sin(x) + \sin^2(x) \quad \text{mit} \quad K \in \mathbb{R}}$$

Durch $P = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{4}\right)$ verläuft die Lösung mit $\frac{5}{4} = K \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$,

also wegen $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$$\frac{5}{4} = K \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{oder} \quad 5 = 2 \cdot K + 1 \quad \text{oder} \quad K = 2.$$

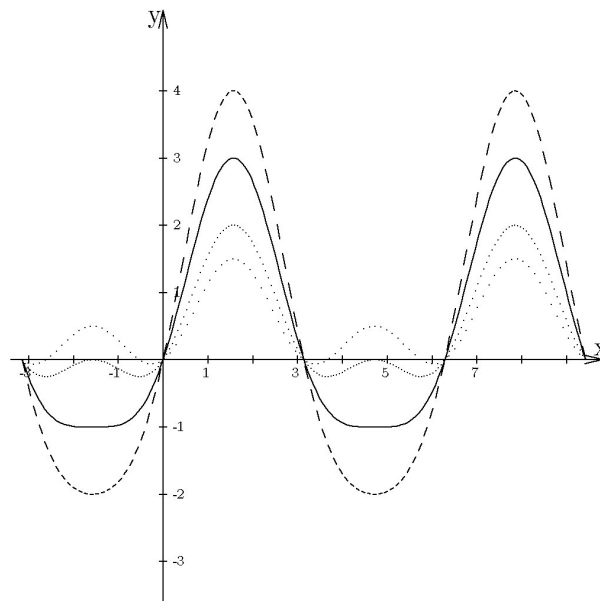


Bild zu Aufgabe 20.7 durchgezogene Kurve; $K = 2$
 gepunktet: $K = 0.5$ und $K = 1$
 gestrichelt: $K = 3$

Aufgabe 20.8:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und die Lösung durch den Punkt $P = (2, 2)$ der linearen Differentialgleichung

$$x \cdot y - x^2 \cdot \ln(x) \cdot y' = [\ln(x)]^2 \quad *$$

Lösung der Aufgabe 20.8:**Aufgabe 20.9:**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und die Lösung durch den Punkt $P = (0, 0)$ der linearen Differentialgleichung

$$y' + y \cdot \tan(x) = \sin(2 \cdot x) \quad *$$

Lösung der Aufgabe 20.9:

Aufgabe 20.10:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und die Lösung durch den Punkt $P = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ der linearen Differentialgleichung

$$x \cdot y' = 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot y + x^4 \quad (\otimes \otimes)$$

Lösung der Aufgabe 20.10:

Die homogene DGL lautet: $\eta' = 2 \cdot \left(\frac{x^2+1}{x}\right) \cdot \eta$

Diese läßt sich nach dem Verfahren TdV lösen:

1. $\eta' = f(x) \cdot g(\eta)$ mit $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ und $g(\eta) = \eta$

also

2. $g(\eta) = 0$, d.h. $\eta = 0$. Dann ist auch $\eta' = 0$ und die homogene DGL ist erfüllt, also ist $\eta = 0$ eine Lösung.

3. $g(\eta) \neq 0$: Nach TdV ist dann $\int \frac{d\eta}{\eta} = \int \left(2 \cdot x + \frac{2}{x}\right) \cdot dx$.

oder $\ln(|\eta|) = x^2 + 2 \cdot \ln(|x|) + c^*$ oder $|\eta| = e^{(x^2)} \cdot e^{\ln(|x|^2)} \cdot c^{**}$ mit $c^{**} > 0$

also Gesamtlösung (aus (2. und 3.): $\eta = K \cdot e^{(x^2)} \cdot x^2$ mit $K \in \mathbb{R}$)

Ansatz VdK für eine spezielle Lösung: $y_s = K(x) \cdot e^{(x^2)} \cdot x^2$

Dann ist $y'_s = K'(x) \cdot e^{(x^2)} \cdot x^2 + K(x) \cdot e^{(x^2)} \cdot (2 \cdot x^3 + 2 \cdot x)$.

Wenn nun y_s und y'_s in die DGL $(\otimes \otimes)$ eingesetzt wird, so erhalten wir

$$x \cdot \underbrace{K'(x) \cdot e^{(x^2)} \cdot x^2 + K(x) \cdot e^{(x^2)} \cdot (2 \cdot x^3 + 2 \cdot x)}_{y'_s} = 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot \underbrace{K(x) \cdot e^{(x^2)} \cdot x^2}_{y_s} + x^4$$

also

$$x \cdot K'(x) \cdot e^{(x^2)} \cdot x^2 = x^4 \text{ oder } K'(x) = x \cdot e^{(-x^2)}$$

und damit $K(x) = \int K'(x) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{(-x^2)}$

Also lautet eine spezielle Lösung $y_s = -\frac{1}{2} \cdot x^2$

Damit lautet die Gesamtlösung für die DGL $(\otimes \otimes)$:

$$y = K \cdot e^{(x^2)} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^2 \text{ mit } K \in \mathbb{R}$$

Durch $P = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ verläuft die Lösung mit $\frac{1}{2} = K \cdot e^{(1^2)} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2$,

also $K = e^{-1}$ und damit $y = x^2 \cdot \left(e^{(x^2-1)} - \frac{1}{2}\right)$

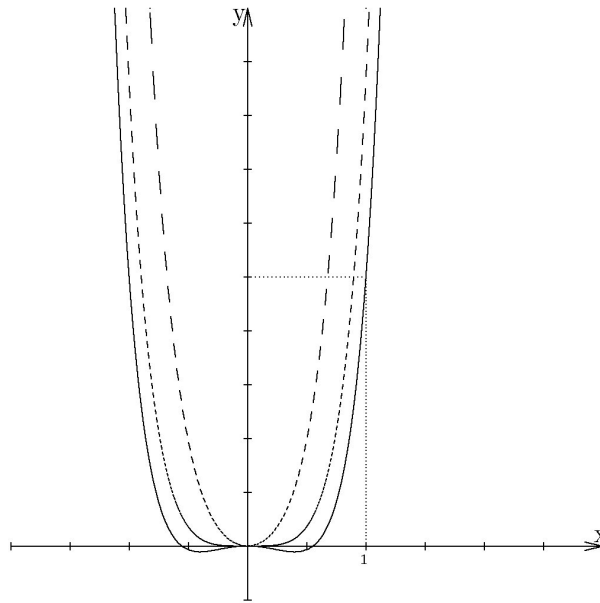


Bild zu Aufgabe 20.10 durchgezogene Kurve; $K = e^{-1}$
gestrichelt fein: $K = 0.5$ grob: $K = 1$

Aufgabe 20.11:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$x^2 \cdot y' - y - e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad *$$

und die Lösung durch den Punkt $P = (1, -\sinh(1))$.

Lösung der Aufgabe 20.11:

Zunächst wird nach dem homogenen Teil dieser DGL (*) gesucht:

$$\text{Es ist } x^2 \cdot y' - y - e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \cdot y' - y = e^{\frac{1}{x}},$$

und auf der rechten Seite dieser Gleichung befindet sich das Störglied.

a) homogener Teil:

$$\text{Wir setzen } x^2 \cdot \eta' - \eta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta' = \frac{\eta}{x^2}$$

und lösen diese DGL nach dem Verfahren „Trennung der Variablen“.

$$\text{Wegen } \eta' = \frac{\eta}{x^2} =: f(x) \cdot g(\eta) \text{ wählen wir}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{und} \quad g(\eta) = \eta}$$

Dann ist im Fall $\underline{g(\eta) = 0}$ auch $\eta = 0$ und damit auch $\eta' = 0$; also ist der homogene Teil der DGL in diesem Fall erfüllt.

$$\text{Im Fall } \underline{g(\eta) \neq 0} \text{ gilt } \int \frac{d\eta}{\eta} = \int \frac{dx}{x^2},$$

$$\text{also } \ln(|\eta|) = -\frac{1}{x} + c \quad \text{oder} \quad \eta = e^{-\frac{1}{x}} \cdot c^* \text{ mit } c^* \neq 0.$$

Insgesamt ergibt sich als Lösung des homogenen Teils also

$$\eta = e^{-\frac{1}{x}} \cdot K \quad \text{mit} \quad K \in \mathbb{R}$$

b) **Ansatz VdK für eine spezielle Lösung der DGL (*):**

$$\boxed{y_s = e^{-\frac{1}{x}} \cdot K(x)}$$

$$\text{Dann ist } y'_s = K'(x) \cdot e^{-\frac{1}{x}} + K(x) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}.$$

Wenn nun y_s und y'_s in die DGL (*) eingesetzt wird, so erhalten wir

$$x^2 \cdot \left(\underbrace{K'(x) \cdot e^{-\frac{1}{x}} + K(x) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}}_{y'_s} \right) - \underbrace{e^{-\frac{1}{x}} \cdot K(x)}_{y_s} - e^{\frac{1}{x}} = 0$$

also

$$x^2 \cdot K'(x) \cdot e^{-\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{oder} \quad K'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{2}{x}}$$

$$\text{und damit } K(x) = \int K'(x) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{2}{x}} + K_0$$

$$\text{Also lautet eine spezielle Lösung } y_s = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{2}{x}} \right) = -\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

Damit lautet die Gesamtlösung für die DGL (*):

$$\boxed{y = \eta + y_s = e^{-\frac{1}{x}} \cdot K - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{x}} \text{ mit } K \in \mathbb{R}}$$

Durch $P = (1, -\sinh(1))$ verläuft die Lösung mit

$$-\sinh(1) = -\frac{1}{2} \cdot (e^1 - e^{-1}) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot K - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}} = e^{-1} \cdot K - \frac{1}{2} \cdot e$$

also $K = \frac{1}{2}$ und damit $y = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} \right)$

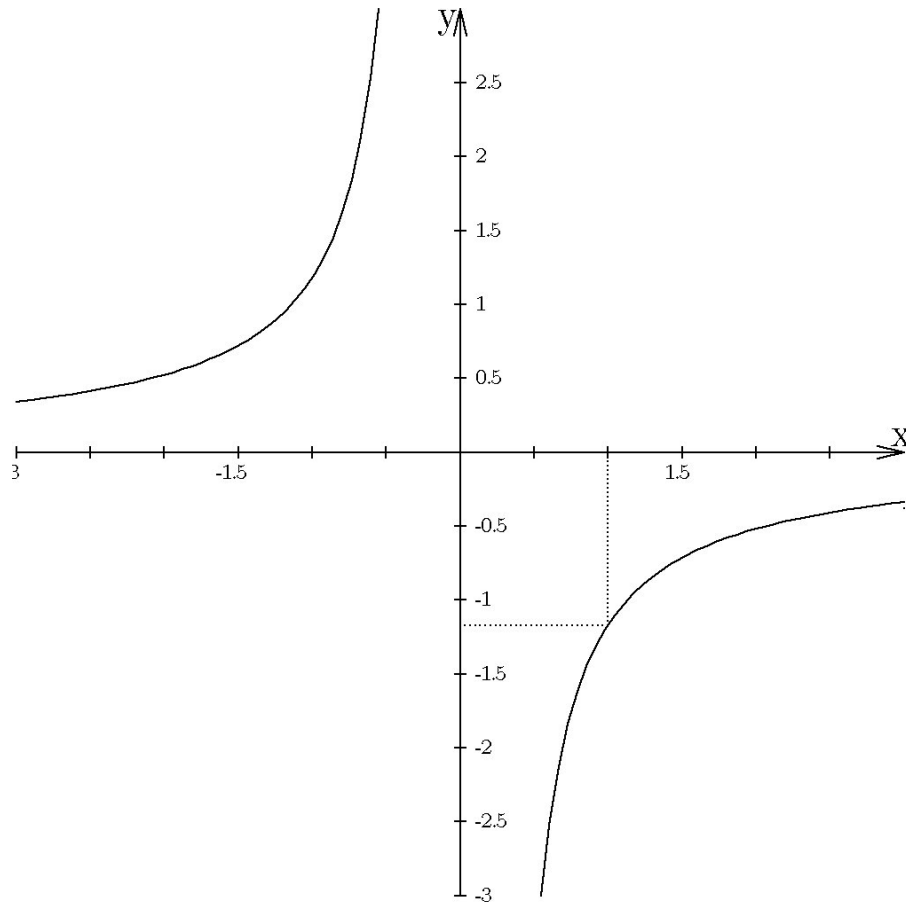


Bild zu Aufgabe 20.11

Aufgabe 20.12:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y' - \frac{1}{2 \cdot x + 2} \cdot y = \frac{x}{x + 1}$$

*

und die Lösung durch den Punkt $P = (0, 1)$.

(für die gesamte Rechnung sei $x > -1$ vorausgesetzt).

Lösung der Aufgabe 20.12:

a) homogener Teil der DGL

Zunächst wird nach dem homogenen Teil dieser DGL (*) gesucht:

Die homogene DGL lautet:

$$\eta' = \frac{1}{2 \cdot x + 2} \cdot \eta$$

Diese läßt sich nach dem Verfahren TdV lösen:

1. $\eta' = f(x) \cdot g(\eta)$ mit $f(x) = \frac{1}{2 \cdot x + 2}$ und $g(\eta) = \eta$

also

2. $g(\eta) = 0$, d.h. $\eta = 0$. Dann ist auch $\eta' = 0$ und die homogene DGL ist erfüllt, also ist $\eta = 0$ eine Lösung des homogenen Teiles der DGL.

3. $g(\eta) \neq 0$: Nach TdV ist dann $\int \frac{d\eta}{\eta} = \int \frac{1}{2 \cdot x + 2} \cdot dx$.

oder $\ln(|\eta|) = \frac{1}{2} \cdot \ln(|x + 1|) + c = \ln\left(|x + 1|^{\frac{1}{2}}\right) + c$ oder $|\eta| = \sqrt{x + 1} \cdot c^*$ mit $c^* > 0$

also Gesamtlösung (aus (2. und 3.): $\eta = K \cdot \sqrt{x + 1}$ mit $K \in \mathbb{R}$)

b) Ansatz VdK für eine spezielle Lösung:

$$y_s = K(x) \cdot \sqrt{x + 1}$$

Dann ist $y'_s = K'(x) \cdot \sqrt{x + 1} + K(x) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x + 1}}$.

Wenn nun y_s und y'_s in die DGL (*) eingesetzt wird, so erhalten wir

$$\underbrace{K'(x) \cdot \sqrt{x + 1} + K(x) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x + 1}}}_{y'_s} - \frac{1}{2 \cdot x + 2} \cdot \underbrace{K(x) \cdot \sqrt{x + 1}}_{y_s} = \frac{x}{x + 1}$$

also

$$K'(x) \cdot \sqrt{x + 1} = \frac{x}{x + 1} \text{ oder } K'(x) = x \cdot (x + 1)^{-\frac{3}{2}}$$

und damit

$$\begin{aligned} K(x) &= \int K'(x) \cdot dx = \int x \cdot (x + 1)^{-\frac{3}{2}} \\ &\stackrel{\text{partielle Integration}}{=} -2 \cdot x \cdot (x + 1)^{-\frac{1}{2}} + \int 2 \cdot (x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot dx \\ &= \frac{-2 \cdot x}{\sqrt{x + 1}} + 4 \cdot \sqrt{x + 1} = \frac{2 \cdot x + 4}{\sqrt{x + 1}} + K_0 \end{aligned}$$

Also lautet eine spezielle Lösung $y_s = \frac{2 \cdot x + 4}{\sqrt{x + 1}}$

Damit lautet die Gesamtlösung für die DGL (*):

$$y = \eta + y_s = K \cdot \sqrt{x + 1} + \frac{2 \cdot x + 4}{\sqrt{x + 1}} \cdot \sqrt{x + 1} = K \cdot \sqrt{x + 1} + 2 \cdot x + 4$$

Durch $P = (0, 1)$ verläuft die Lösung mit $1 = K \cdot \sqrt{0+1} + 2 \cdot 0 + 4 = K + 8$

also $K = -7$ und damit $y = -7 \cdot \sqrt{x+1} + 2 \cdot x + 4$

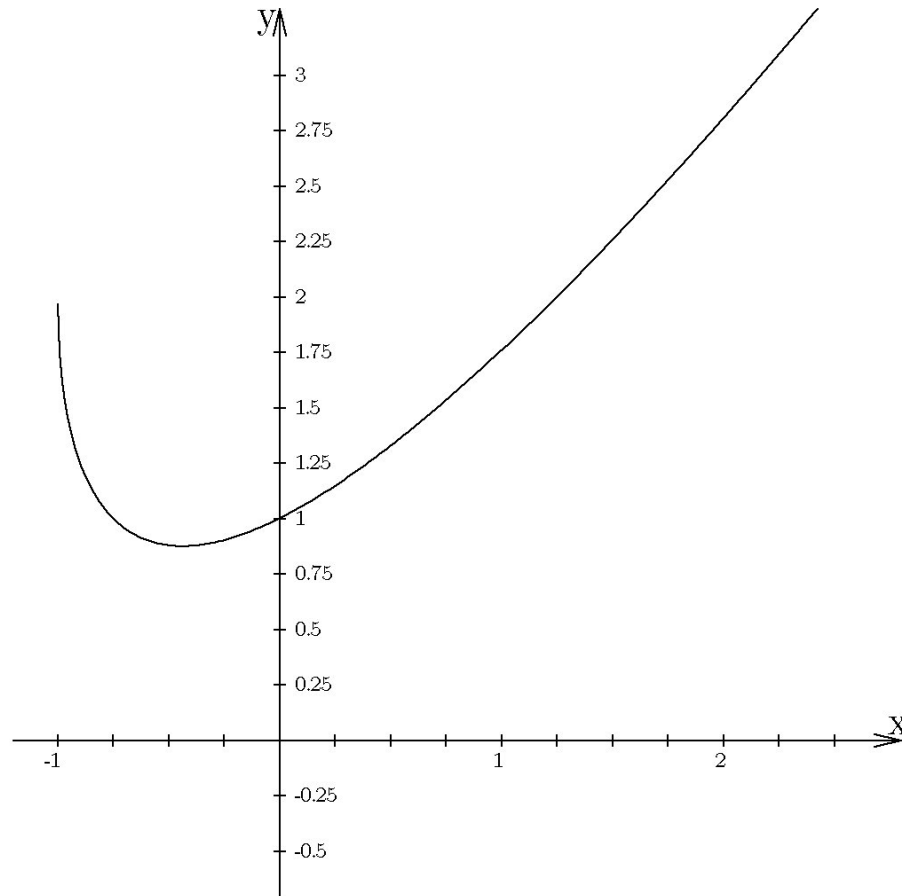


Bild zu Aufgabe 20.12

Aufgabe 20.13:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und die Lösung durch den Punkt $P = (1, 1)$ der linearen Differentialgleichung

$$x \cdot y' - (x + 1) \cdot y + (2 \cdot x + 1) \cdot e^{-x} = 0 \quad (*)$$

Lösung der Aufgabe 20.13:

Die Gleichung

$$x \cdot y' - (x + 1) \cdot y + (2 \cdot x + 1) \cdot e^{-x} = 0$$

wird aufgelöst, um Störglieder zu erkennen:

$$y' - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot y = \left(-2 - \frac{1}{x}\right) \cdot e^{-x}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung steht nun das Störglied.

(A) Homogene DGL:

$$\eta' - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \eta = 0 \quad (**)$$

1. Schritt: Auflösen nach η' :

$$\eta' = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \eta = f(x) \cdot g(\eta), \quad \text{also} \quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{und} \quad g(\eta) = \eta$$

2. Schritt (Fall $g(\eta) = 0$):

Wegen $g(\eta) = 0$ ist $\eta = 0$ und damit $\eta' = 0$. Damit gilt die DGL (**) für $\eta = 0$.

3. Schritt (Fall $g(\eta) \neq 0$), Trennung der Veränderlichen:

$$\int \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int f(x) \cdot dx, \quad \text{also hier} \quad \int \frac{d\eta}{\eta} = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot dx$$

oder $\ln(|\eta|) = x + \ln(|x|) + c$, oder $|\eta| = e^{x + \ln(|x|) + c} = e^x \cdot |x| \cdot c^*$ mit $c^* > 0$

oder $\eta = e^x \cdot x \cdot c^{**}$ mit $c^{**} \neq 0$

Gesamtlösung der homogenen DGL:

$$\eta = K \cdot e^x \cdot x \quad \text{mit} \quad K \in \mathbb{R}$$

(B) Gesamte DGL, Variation der Konstanten:

Wir wählen den Ansatz: $y = K(x) \cdot e^x \cdot x$

Diese gewählte Funktion soll in die Gleichung (*) eingesetzt werden, und dann soll die Funktion $K(x)$ bestimmt werden.

Es ist $y' = K'(x) \cdot e^x \cdot x + K(x) \cdot [1 \cdot e^x + x \cdot e^x]$

und daher lautet die DGL (*):

$$x \cdot \underbrace{K'(x) \cdot x \cdot e^x + K(x) \cdot [1 \cdot e^x + x \cdot e^x]}_{y'} - (x + 1) \cdot \underbrace{K(x) \cdot x \cdot e^x}_y + (2 \cdot x + 1) \cdot e^{-x} = 0$$

$$\text{also} \quad K'(x) \cdot x \cdot e^x = \left(-2 - \frac{1}{x}\right) \cdot e^{-x} \quad \text{und damit} \quad K'(x) = \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{-2 \cdot x}.$$

Nun ist $K(x) = \int K'(x) \cdot dx$, also muss noch integriert werden, und dafür gibt es wieder einen Trick (einen Trick muss man in einer Klausur nicht können!)

$$\begin{aligned}
K(x) &= \int K'(x) \cdot dx = \int \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot e^{-2 \cdot x} \cdot dx \\
&= -2 \cdot \int \frac{e^{-2 \cdot x}}{x} \cdot dx + \int \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot e^{-2 \cdot x} \cdot dx \\
&= -2 \cdot \int \frac{e^{-2 \cdot x}}{x} \cdot dx + \left[\frac{1}{x} \cdot e^{-2 \cdot x} + 2 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot e^{-2 \cdot x} \cdot dx \right] \\
&= \frac{e^{-2 \cdot x}}{x} + c
\end{aligned}$$

$$\text{also } y = K(x) \cdot e^x \cdot x = \left(\frac{e^{-2 \cdot x}}{x} + c \right) \cdot e^x \cdot x = \frac{e^{-2 \cdot x}}{x} \cdot e^x \cdot x + c \cdot e^x \cdot x = \underbrace{e^{-x}}_{y_{sp}} + \underbrace{c \cdot e^x \cdot x}_{\eta}$$

(C) Durch den Punkt $P = (1, 1)$ läuft - als Lösung dieser DGL - die Kurve, in der c bestimmt wird durch

$$1 = e^{-1} + c \cdot e^1 \cdot 1$$

also $c \approx 0.37 - 0.13 = 0.23$ und damit

$$y = e^{-x} + 0.23 \cdot e^x \cdot x$$

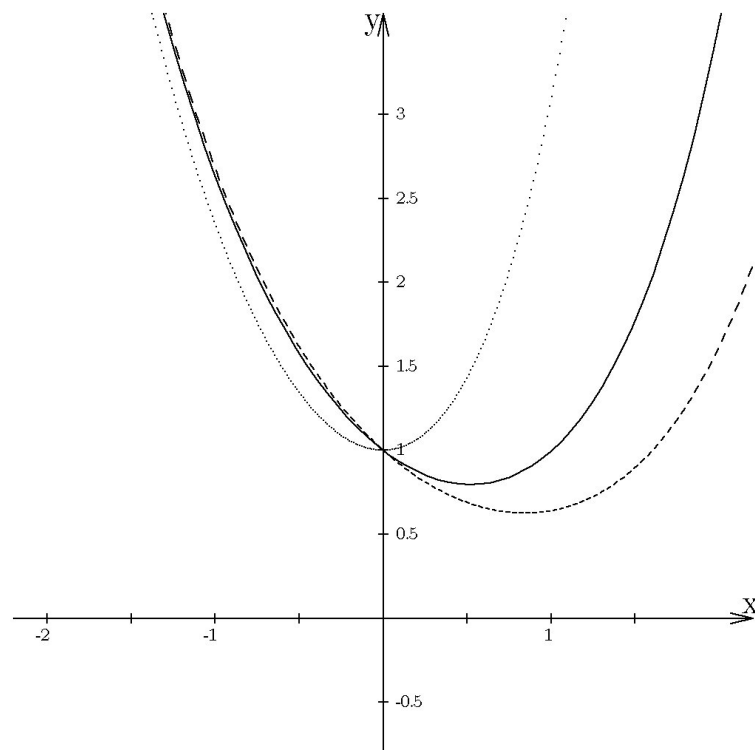


Bild zu Aufgabe 20.13 durchgezogene Kurve; $c = 0.23$

gepunktet: $c = 1$

gestrichelt: $c = 0.1$

Aufgabe 20.14:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y' + 3 \cdot x^2 \cdot y = x \cdot e^{x-x^3} \quad *$$

und die Lösung durch den Punkt $P = (0, 1)$.

Lösung der Aufgabe 20.14:

In der Gleichung

$$y' + 3 \cdot x^2 \cdot y = x \cdot e^{x-x^3}$$

steht auf der rechten Seite das Störglied.

(A) Homogener Teil der DGL:

$$\eta' + 3 \cdot x^2 \cdot \eta = 0 \quad (**)$$

1. Schritt: Auflösen nach η' :

$$\eta' = -3 \cdot x^2 \cdot \eta = f(x) \cdot g(\eta), \quad \text{also} \quad f(x) = -3 \cdot x^2 \quad \text{und} \quad g(\eta) = \eta$$

2. Schritt (Fall $g(\eta) = 0$):

Wegen $g(\eta) = 0$ ist $\eta = 0$ und damit $\eta' = 0$. Damit gilt die DGL (**) für $\eta = 0$.

3. Schritt (Fall $g(\eta) \neq 0$), Trennung der Veränderlichen:

$$\int \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int f(x) \cdot dx, \quad \text{also hier} \quad \int \frac{d\eta}{\eta} = -3 \cdot \int x^2 \cdot dx$$

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad \ln(|\eta|) &= -x^3 + c, \quad \text{oder} \quad |\eta| = e^{-x^3+c} = e^{-x^3} \cdot c^* \quad \text{mit} \quad c^* > 0 \\ \text{oder} \quad \eta &= e^{-x^3} \cdot c^{**} \quad \text{mit} \quad c^{**} \neq 0 \end{aligned}$$

Gesamtlösung des homogenen Teiles der DGL:

$$\eta = K \cdot e^{-x^3} \quad \text{mit} \quad K \in \mathbb{R}$$

(B) Gesamte DGL, Variation der Konstanten:

Wir wählen den Ansatz: $y_s = K(x) \cdot e^{-x^3}$

Diese gewählte Funktion soll in die Gleichung (*) eingesetzt werden, und dann soll die Funktion $K(x)$ bestimmt werden.

$$\text{Es ist } y'_s = K'(x) \cdot e^{-x^3} + K(x) \cdot \left[-3 \cdot x^2 \cdot e^{-x^3} \right]$$

und daher lautet die DGL (*):

$$\underbrace{K'(x) \cdot e^{-x^3} + K(x) \cdot \left[-3 \cdot x^2 \cdot e^{-x^3} \right]}_{y'_s} + 3 \cdot x^2 \cdot \underbrace{K(x) \cdot e^{-x^3}}_{y_s} = x \cdot e^{x-x^3}$$

$$\text{also} \quad K'(x) \cdot e^{-x^3} = x \cdot e^{x-x^3} \quad \text{und damit} \quad K'(x) = \frac{x \cdot e^{x-x^3}}{e^{-x^3}} = \frac{x \cdot e^x \cdot e^{-x^3}}{e^{-x^3}} = x \cdot e^x.$$

Nun ist $K(x) = \int K'(x) \cdot dx$, also muss noch integriert werden.

$$\begin{aligned}
 K(x) &= \int K'(x) \cdot dx = \int x \cdot e^x \cdot dx \\
 &\stackrel{\text{partielle Integration}}{=} x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx \\
 &= x \cdot e^x - e^x + K_0 = (x-1) \cdot e^x + K_0
 \end{aligned}$$

also ist $y_s = K(x) \cdot e^{-x^3} = (x-1) \cdot e^x \cdot e^{-x^3} = (x-1) \cdot e^{x-x^3}$
 eine spezielle Lösung (für $K_0 = 0$).

Damit ist dann

$$y = \eta + y_s = \underbrace{K \cdot e^{-x^3}}_{\eta} + \underbrace{(x-1) \cdot e^{x-x^3}}_{y_s} = K \cdot e^{-x^3} + (x-1) \cdot e^{x-x^3}$$

(C) Durch den Punkt $P = (0, 1)$ läuft - als Lösung dieser DGL - die Kurve, in der K bestimmt wird durch

$$1 = K \cdot e^{-0^3} + (0-1) \cdot e^{0-0^3} = K - 1$$

also

$$y = 2 \cdot e^{-x^3} + (x-1) \cdot e^{x-x^3}$$

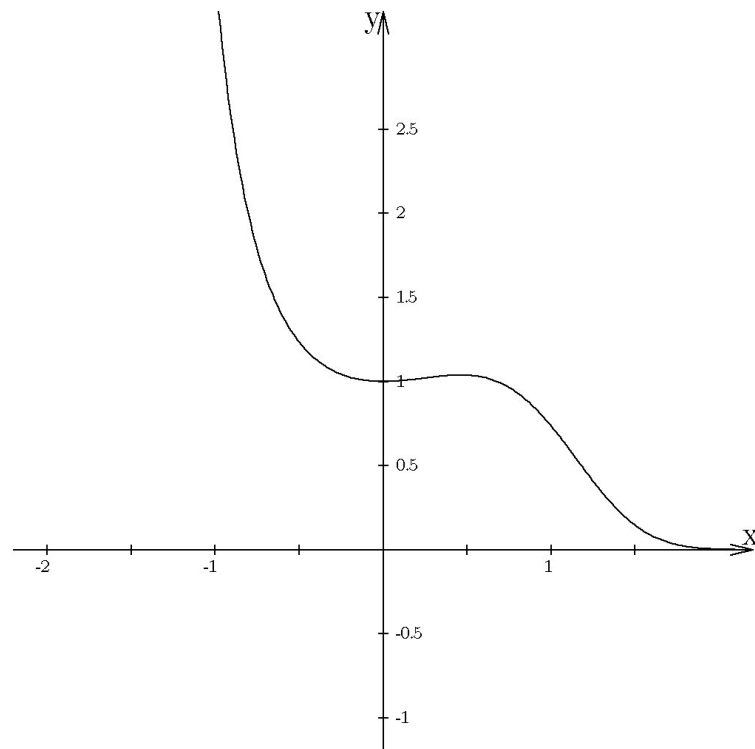


Bild zu Aufgabe 20.14