



21 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten (REP Seite 448)

Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten haben die Form

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

wobei

1. $y = y(x)$ als Funktion von x aufgefasst wird,
2. $y^m := \frac{d^m y}{d x^m}$ ist und
3. die Koeffizienten a_i mit $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ konstant (d.h. nicht von x abhängig) sind.

Der Ansatz

$$y = e^{\lambda \cdot x}$$

führt auf die charakteristische Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$$

Jede k -fache Lösung der charakteristischen Gleichung liefert k Lösungen der Differentialgleichung.

Lösungen der charakteristischen Gleichung	Basislösungen der DGL
λ 1-fach reell	$e^{\lambda \cdot x}$
λ k -fach reell	$e^{\lambda \cdot x}, x \cdot e^{\lambda \cdot x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda \cdot x}$
$\lambda = a + b \cdot i$ 1-fach komplex	$e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x)$ $e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x)$
$\lambda = a + b \cdot i$ k -fach komplex	$e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x), x \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x), \dots, x^{k-1} \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x)$ $e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x), x \cdot e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x), \dots, x^{k-1} \cdot e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x)$

Man erhält so n linear unabhängige Basislösungen $y_1, \dots, y_n$. Diese bilden die allgemeine Lösung y der DGL:

$$y = c_1 \cdot y_1 + \dots + c_k \cdot y_k \text{ mit } c_k \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 21.1:

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' - 6 \cdot y' + 9 \cdot y = 0$$

- a) allgemein
- b) als Anfangswertaufgabe mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = -1$.
- c) Zeichnen Sie die Lösung von b) in der Umgebung für $-0.3 \leq x \leq 0.3$
- d) Prüfen Sie die Gültigkeit von b) als Lösung der DGL im Punkt $x = 0.1$.

Lösung der Aufgabe 21.1 (REP BEI 16.49):

a) aus dem Ansatz $y = e^{\lambda \cdot x}$ ergeben sich

$$\begin{aligned} y' &= \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} = \lambda \cdot y \\ y'' &= \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x} = \lambda^2 \cdot y \\ y''' &= \lambda^3 \cdot e^{\lambda \cdot x} = \lambda^3 \cdot y \end{aligned}$$

Folglich wird mit diesem Ansatz aus der gegebenen DGL

$$y'' - 6 \cdot y' + 9 \cdot y = 0 \quad \stackrel{y=e^{\lambda \cdot x}}{\Leftrightarrow} \quad (\lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 9) \cdot y = 0$$

Daher lautet die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 9 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 9}$$

d.h. $\lambda = 3$ ist eine doppelte reelle Nullstelle ($k = 2$) der charakteristischen Gleichung. Dann lauten die Basislösungen der DGL

$$y_1 = e^{\lambda \cdot x} = e^{3 \cdot x} \quad \text{und} \quad y_2 = x \cdot e^{\lambda \cdot x} = x \cdot e^{3 \cdot x}$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 = c_1 \cdot e^{3 \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{3 \cdot x}$$

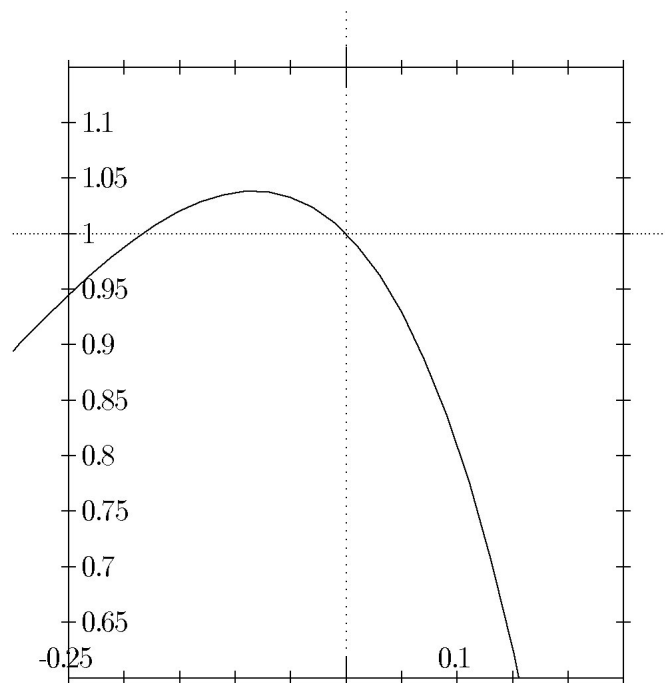
b) als Anfangswertaufgabe mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = -1$ ergibt sich Teil a) durch Einsetzen:

$$1 = y(0) = c_1 \cdot e^{3 \cdot 0} + c_2 \cdot 0 \cdot e^{3 \cdot 0} = c_1, \text{ also } c_1 = 1$$

Wegen $y' = 3 \cdot c_1 \cdot e^{3 \cdot x} + 3 \cdot c_2 \cdot x \cdot e^{3 \cdot x} + c_2 \cdot e^{3 \cdot x} = (3 \cdot c_1 + 3 \cdot c_2 \cdot x + c_2) \cdot e^{3 \cdot x}$ ist

$$-1 = y'(0) \stackrel{c_1=1}{=} (3 \cdot 1 + 3 \cdot c_2 \cdot 0 + c_2) \cdot e^{3 \cdot 0} = 3 + c_2, \text{ also } c_2 = -4 \text{ und damit}$$

$$y = e^{3 \cdot x} - 4 \cdot x \cdot e^{3 \cdot x}$$



Aufgabe 21.1

$y = e^{3 \cdot x} - 4 \cdot x \cdot e^{3 \cdot x}$ Lösung der Anfangswert-Differentialgleichung

$$y'' - 6 \cdot y' + 9 \cdot y = 0$$

d) Es ist

$$y(0.1) = e^{3 \cdot 0.1} - 4 \cdot 0.1 \cdot e^{3 \cdot 0.1} \approx .81$$

Es ist

$$\begin{aligned} y' &= 3 \cdot e^{3 \cdot x} - 4 \cdot (1 + 3 \cdot x) \cdot e^{3 \cdot x} \\ &= -e^{3 \cdot x} - 12 \cdot x \cdot e^{3 \cdot x} \end{aligned}$$

und folglich

$$y'(0.1) = -e^{3 \cdot 0.1} - 12 \cdot 0.1 \cdot e^{3 \cdot 0.1} \approx -2.97$$

sowie

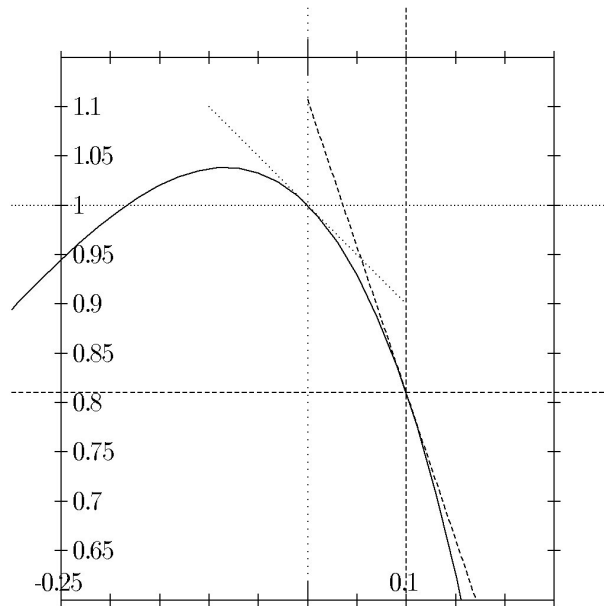
$$y'' = -15 \cdot e^{3 \cdot x} - 36 \cdot x \cdot e^{3 \cdot x}$$

und folglich

$$y''(0.1) = -15 \cdot e^{3 \cdot 0.1} - 36 \cdot 0.1 \cdot e^{3 \cdot 0.1} = -25.11$$

Einsetzung dieser Werte in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y''(0.1) - 6 \cdot y'(0.1) + 9 \cdot y(0.1) \\ \approx -25.11 - 6 \cdot (-2.97) + 9 \cdot 0.81 \approx 0 \end{aligned}$$



Aufgabe 21.1

$y = e^{3 \cdot x} - 4 \cdot x \cdot e^{3 \cdot x}$ Verifizierung für $x = 0.1$

(gestrichelt): $y'(0.1) \approx -3$

und für $x = 0$ (gepunktet): $y'(0) = -1$

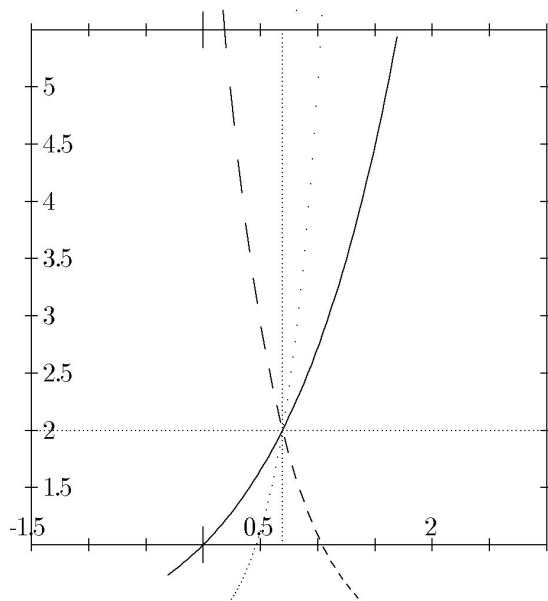
(nach Aufgabenstellung 21.1b)

Aufgabe 21.2 (REP BEI 16.48):

Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $y''' - 2 \cdot y'' - 5 \cdot y' + 6 \cdot y = 0$ und zeichnen Sie drei verschiedene Lösungen, die durch den Punkt $(\ln(2), 2)$ gehen.

Lösung von Aufgabe 21.2 (REP BEI 16.48):

Die allgemeine Lösung lautet $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-2 \cdot x} + c_3 \cdot e^{3 \cdot x}$ wobei $c_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ (konstante) Koeffizienten sind.

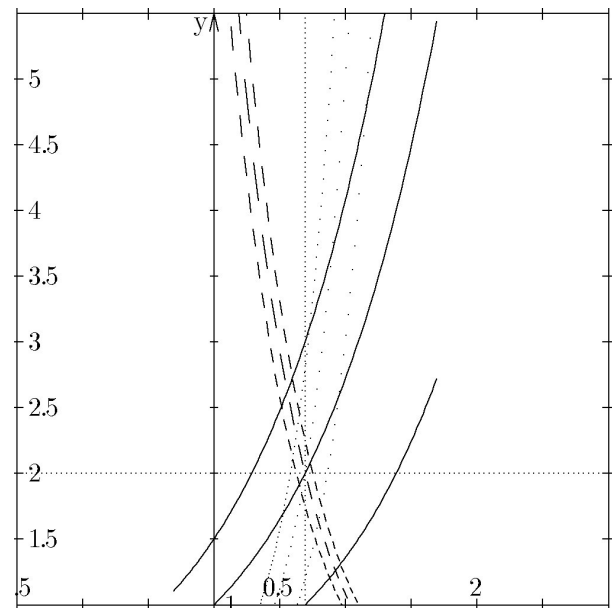


Aufgabe 21.2: Drei Kurven durch $(\ln(2), 2)$

die der DGL

$$y''' - 2 \cdot y'' - 5 \cdot y' + 6 \cdot y = 0$$

genügen



Aufgabe 21.2: Kurven

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-2 \cdot x} + c_3 \cdot e^{3 \cdot x}$$

mit $c_1 = 0.5, 1.0, 1.5$ und $c_2 = 0$ und $c_3 = 0$

mit $c_1 = 0$ und $c_2 = 7.0, 8.0, 9.0$ und $c_3 = 0$

mit $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$ und $c_3 = 0.15, 0.25, 0.35$

Aufgabe 21.3 (REP BEI 16.50):

Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $y'''' + y''' = 0$

Lösung von Aufgabe 21.3 (REP BEI 16.50):

Die allgemeine Lösung lautet $y = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot e^{-x}$ wobei $c_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (konstante) Koeffizienten sind.

Aufgabe 21.4 (REP BEI 16.51):

Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $y'''' - 2 \cdot y''' + 2 \cdot y'' - 2 \cdot y' + y = 0$

Lösung von Aufgabe 21.4 (REP BEI 16.51):

Die allgemeine Lösung lautet $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x + c_3 \cdot \cos(x) + c_4 \cdot \sin(x)$ wobei $c_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (konstante) Koeffizienten sind.

Aufgabe 21.5 (REP BEI 16.52):

Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $y''' - 5 \cdot y'' + 9 \cdot y' - 5 \cdot y = 0$

Lösung von Aufgabe 21.5 (REP BEI 16.52):

Die allgemeine Lösung lautet $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot \cos(x) + c_3 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot \sin(x)$ wobei $c_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ (konstante) Koeffizienten sind.

Inhomogene lineare DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Inhomogene DGL unterscheiden sich von homogenen DGL durch ein „Störglied“. Im allgemeinen werden anstelle der inhomogenen DGL zunächst die zugehörige homogene DGL gelöst (bei der kein Störglied auftritt oder bei der das Störglied gleich 0 ist). Die Lösung wird mit y_h , y_{hom} oder η bezeichnet.

Dann wird aus dem Störglied und aus der Lösung der homogenen DGL eine „spezielle Lösung“ y_s der DGL gesucht. Einen Ansatz für dieses y_s können wir nach REP S.450 finden:

Ist die Störfunktion $r(x)$ vom Typ

$$\text{entweder } r(x) = P(x) \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x) \quad \text{oder} \quad r(x) = P(x) \cdot e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x)$$

wobei a, b reelle Zahlen und $P(x)$ ein Polynom ist, so setze

- (a) im Normalfall (d.h. falls keine Resonanz vorliegt, d.h. wenn $a + b \cdot i$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung (2) ist):

$$y_s = Q_1(x) \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x) + Q_2(x) \cdot e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x) \quad \textbf{Normalansatz}$$

Dabei sind $Q_1(x)$ und $Q_2(x)$ Polynome mit unbestimmten Koeffizienten und $\text{grad}(P) = \text{grad}(Q_1) = \text{grad}(Q_2)$.

- (b) im Resonanzfall, d.h. wenn $a + b \cdot i$ eine k -fache Lösung der charakteristischen Gleichung (2) ist):

$$y_s = x^k \cdot [Q_1(x) \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x) + Q_2(x) \cdot e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x)] \quad \textbf{Resonanzfall}$$

Die Gesamtlösung y ist dann die Summe $y = \eta + y_s$.

Aufgabe 21.6a:

Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$y''' - y'' + y' - y = \sin(x) \quad (1)$$

Lösung der Aufgabe 21.6a:

Zunächst lösen wir die homogene DGL

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

Aus dem Ansatz $y = e^{\lambda \cdot x}$ ergibt sich die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

Diese hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_{2,3} = \pm i \quad (2)$$

Die Lösung η der homogenen Differentialgleichung lautet folglich

$$\eta = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot \cos(x) + C_3 \cdot \sin(x) \quad (3)$$

wobei $C_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ (konstante) Koeffizienten sind.

Nun berücksichtigen wir das Störglied $r(x) = \sin(x)$.

Hier ist $r(x) = \sin(x) = P(x) \cdot e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x)$, also

$$\text{grad}(P) = 0 \text{ und } a = 0 \text{ und } b = 1, \text{ als } a + b \cdot i = i$$

und es ist $a + b \cdot i$ eine 1-fache Lösung der charakteristischen Gleichung (2). Also liegt hier Resonanz vor.

Wegen $0 = \text{grad}(Q_1) = \text{grad}(Q_2)$ setzen wir $Q_1(x) = A$ und $Q_2(x) = B$. Dann ist

$$y_s = x^1 \cdot [A \cdot \cos(x) + B \cdot \sin(x)] \quad (4)$$

Dieses y_s müssen wir nun in der Gleichung (1) einsetzen, um die Koeffizienten A und B zu bestimmen.

Es ist

$$y_s = A \cdot x \cdot \cos(x) + B \cdot x \cdot \sin(x)$$

$$y'_s = A \cdot [\cos(x) - x \cdot \sin(x)] + B \cdot [\sin(x) + x \cdot \cos(x)]$$

$$y''_s = A \cdot [-\sin(x) - \sin(x) - x \cdot \cos(x)] + B \cdot [\cos(x) + \cos(x) - x \cdot \sin(x)]$$

$$y'''_s = A \cdot [-2 \cdot \cos(x) - \cos(x) + x \cdot \sin(x)] + B \cdot [-2 \cdot \sin(x) - \sin(x) - x \cdot \cos(x)]$$

und folglich ergibt sich bei Einsatz in (1)

$$\begin{aligned} & \underbrace{A \cdot [-3 \cdot \cos(x) + x \cdot \sin(x)] + B \cdot [-3 \cdot \sin(x) - x \cdot \cos(x)]}_{y''_s} \\ & - \underbrace{(A \cdot [-2 \cdot \sin(x) - x \cdot \cos(x)] + B \cdot [2 \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x)])}_{y'_s} \\ & + \underbrace{A \cdot [\cos(x) - x \cdot \sin(x)] + B \cdot [\sin(x) + x \cdot \cos(x)]}_{y'_s} \\ & - \underbrace{(A \cdot x \cdot \cos(x) + B \cdot x \cdot \sin(x))}_{y_s} = \sin(x) \end{aligned}$$

also wird Koeffizientenvergleich betrieben:

$$\underline{\sin(x)}: \quad \sin(x) \cdot [-3 \cdot B + 2 \cdot A + B] = \sin(x) \quad \text{oder} \quad 2 \cdot (A - B) = 1$$

$$\underline{\cos(x)}: \quad \cos(x) \cdot [-3 \cdot A - 2 \cdot B + A] = 0 \quad \text{oder} \quad -A - B = 0$$

$$\underline{x \cdot \sin(x)}: \quad x \cdot \sin(x) \cdot [A + B - A - B] = 0$$

$$\underline{x \cdot \cos(x)}: \quad x \cdot \cos(x) \cdot [-B + A + B - A] = 0$$

also ist $A = -B$ nach (5) und damit $-4 \cdot B = 1$ nach (5),

also $B = -\frac{1}{4}$ und $A = \frac{1}{4}$, d.h. insgesamt nach (4)

$$y_s = \frac{1}{4} \cdot x \cdot [\cos(x) - \sin(x)]$$

also lautet die Gesamtlösung

$$y = \eta + y_s = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot \cos(x) + C_3 \cdot \sin(x) + \frac{1}{4} \cdot x \cdot [\cos(x) - \sin(x)]$$

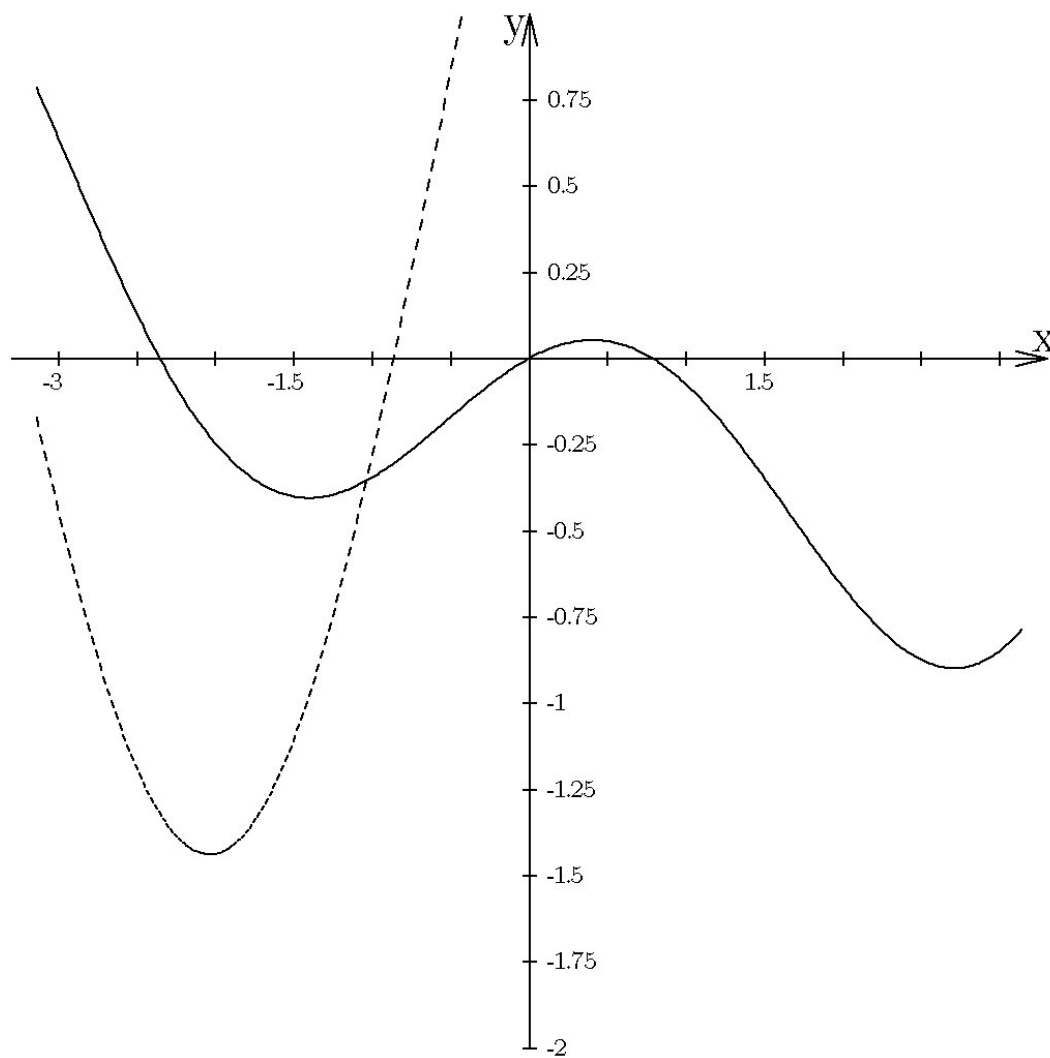


Bild zu Aufgabe 21.6a:

$$y''' - y'' + y' - y = \sin(x)$$

$$y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot \cos(x) + C_3 \cdot \sin(x) + \frac{1}{4} \cdot x \cdot [\cos(x) - \sin(x)]$$

$C_1 = C_2 = C_3 = 0$: ausgezogene Kurve

$C_1 = C_2 = C_3 = 1$: gestrichelte Kurve

Aufgabe 21.6b:

Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$y''' + y = x^2 \cdot e^x \quad (5)$$

Lösung der Aufgabe 21.6b:

Zunächst lösen wir die homogene DGL

$$\lambda^3 + 1 = 0$$

Aus dem Ansatz $y = e^{\lambda \cdot x}$ ergibt sich die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^3 + 1 = 0$$

Diese hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{3} \cdot i\right) \quad (6)$$

Die Lösung η der homogenen Differentialgleichung lautet folglich

$$\eta = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right) + C_3 \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right) \quad (7)$$

wobei $C_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ (konstante) Koeffizienten sind.

Nun berücksichtigen wir das Störglied $r(x) = x^2 \cdot e^x$.

Hier ist $r(x) = x^2 \cdot e^x = P(x) \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x)$, also

$$\text{grad}(P) = 2 \text{ und } a = 1 \text{ und } b = 0, \text{ als } a + b \cdot i = 1$$

und es ist $a + b \cdot i = 1$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung (??). Also liegt hier keine Resonanz vor.

Wegen $2 = \text{grad}(Q_1) = \text{grad}(Q_2)$ setzen wir $Q_1(x) = A + B \cdot x + C \cdot x^2$. Dann ist

$$y_s = (A + B \cdot x + C \cdot x^2) \cdot e^x \quad (8)$$

Dieses y_s müssen wir nun in der Gleichung (6) einsetzen, um die Koeffizienten A , B und C zu bestimmen.

Es ist

$$y_s = (A + B \cdot x + C \cdot x^2) \cdot e^x$$

$$y'_s = (A + B + (B + 2 \cdot C) \cdot x + C \cdot x^2) \cdot e^x$$

$$y''_s = (A + 2 \cdot B + 2 \cdot C + (B + 4 \cdot C) \cdot x + C \cdot x^2) \cdot e^x$$

$$y'''_s = (A + 3 \cdot B + 6 \cdot C + (B + 6 \cdot C) \cdot x + C \cdot x^2) \cdot e^x$$

und folglich ergibt sich bei Einsatz in (6)

$$\underbrace{(A + 3 \cdot B + 6 \cdot C + (B + 6 \cdot C) \cdot x + C \cdot x^2) \cdot e^x}_{y'''_s} + \underbrace{(A + B \cdot x + C \cdot x^2) \cdot e^x}_{y_s} = x^2 \cdot e^x$$

oder

$$A + 3 \cdot B + 6 \cdot C + (B + 6 \cdot C) \cdot x + C \cdot x^2 + A + B \cdot x + C \cdot x^2 = x^2 \quad (9)$$

Koeffizientenvergleich zu der Gleichung (9):

$$\underline{x^2}: \quad 2 \cdot C = 1 \quad \text{oder} \quad C = \frac{1}{2}$$

$$\underline{x}: \quad B + 6 \cdot C + B = 0 \quad \text{oder} \quad B = -\frac{3}{2}$$

$$\underline{x^0}: \quad A + 3 \cdot B + 6 \cdot C + A = 0 \quad \text{oder} \quad 2 \cdot A - \frac{9}{2} + 3 = 0 \quad \text{oder} \quad 2 \cdot A = \frac{3}{4}$$

d.h. insgesamt nach (8)

$$y_s = \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 \right) \cdot e^x$$

also lautet die Gesamtlösung

$$y = \eta + y_s = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right) + C_3 \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2\right) \cdot e^x$$

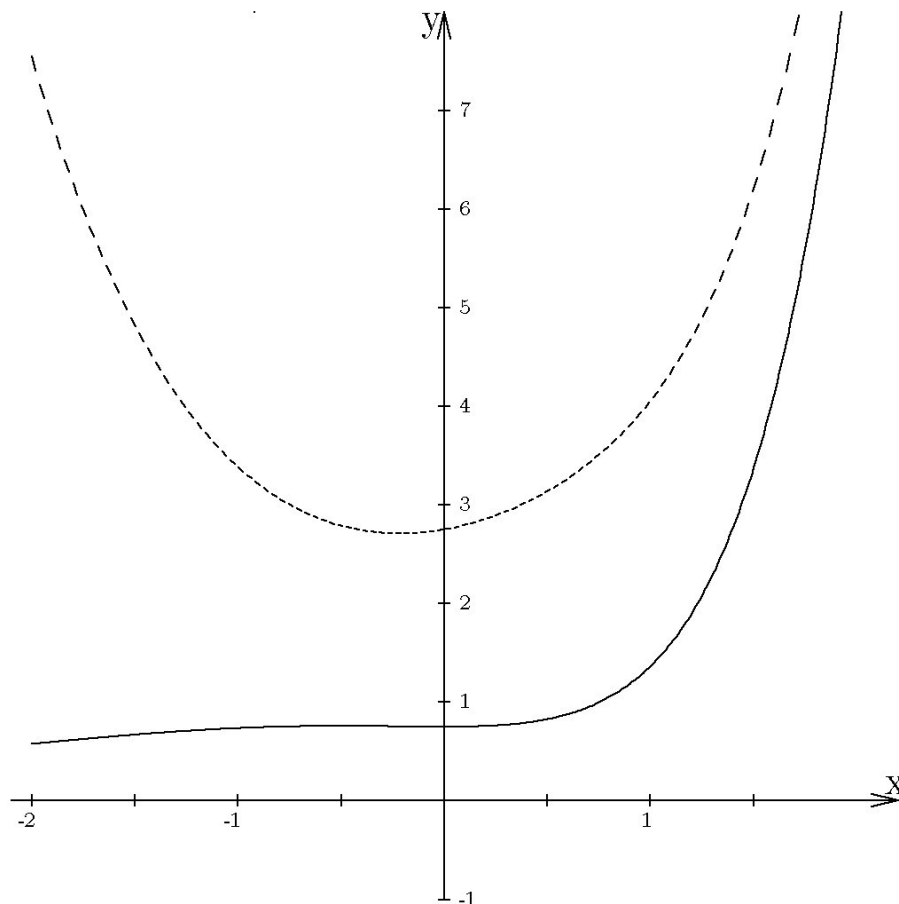


Bild zu Aufgabe 21.6b:

$$y''' + y = x^2 \cdot e^x$$

$$y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right) + C_3 \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2\right) \cdot e^x$$

$C_1 = C_2 = C_3 = 0$: ausgezogene Kurve

$C_1 = C_2 = C_3 = 1$: gestrichelte Kurve

Aufgabe 21.6c:

Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$y''' - y'' - 5 \cdot y' - 3 \cdot y = 8 \cdot e^{-x} \quad (10)$$

Lösung der Aufgabe 21.6c:

Zunächst lösen wir die homogene DGL

$$y''' - y'' - 5 \cdot y' - 3 \cdot y = 0$$

Aus dem Ansatz $y = e^{\lambda \cdot x}$ ergibt sich die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 5 \cdot \lambda - 3 = 0$$

Diese hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{und} \quad \lambda_{2,3} = -1 \quad (11)$$

Die Lösung η der homogenen Differentialgleichung lautet folglich

$$\eta = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x} + C_3 \cdot e^{3 \cdot x} \quad (12)$$

wobei $C_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ (konstante) Koeffizienten sind.

Nun berücksichtigen wir das Störglied $r(x) = 8 \cdot e^{-x}$.

Hier ist $r(x) = 8 \cdot e^{-x} = P(x) \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x)$, also

$$\text{grad}(P) = 0 \text{ und } a = -1 \text{ und } b = 0, \text{ als } a + b \cdot i = -1$$

und es ist $a + b \cdot i = -1$ eine doppelte Nullstelle der charakteristischen Gleichung (siehe 11).

Also liegt hier Resonanz vor ($k = 2$).

Wegen $0 = \text{grad}(Q_1) = \text{grad}(Q_2)$ setzen wir $Q_1(x) = A$. Dann ist

$$y_s = A \cdot x^2 \cdot e^{-x} \quad (13)$$

Dieses y_s müssen wir nun in der Gleichung (10) einsetzen, um den Koeffizienten A zu bestimmen.

Es ist

$$y_s = A \cdot x^2 \cdot e^{-x}$$

$$y'_s = A \cdot (2 \cdot x - x^2) \cdot e^{-x}$$

$$y''_s = A \cdot (2 - 2 \cdot x - 2 \cdot x + x^2) \cdot e^{-x} = A \cdot (2 - 4 \cdot x + x^2) \cdot e^{-x}$$

$$y'''_s = A \cdot (-4 + 2 \cdot x - 2 + 4 \cdot x - x^2) \cdot e^{-x} = A \cdot (-6 + 6 \cdot x - x^2) \cdot e^{-x}$$

und folglich ergibt sich bei Einsatz in (10)

$$\underbrace{A \cdot (-6 + 6 \cdot x - x^2) \cdot e^{-x}}_{y'''_s} - \underbrace{A \cdot (2 - 4 \cdot x + x^2) \cdot e^{-x}}_{y''_s} - 5 \cdot \underbrace{A \cdot (2 \cdot x - x^2) \cdot e^{-x}}_{y'_s} - 3 \cdot \underbrace{A \cdot x^2 \cdot e^{-x}}_{y_s} = 8 \cdot e^{-x}$$

oder

$$A \cdot (-6 - 2 + (6 + 4 - 10) \cdot x + (-1 - 1 + 5 - 3) \cdot x^2) \cdot e^{-x} = 8 \cdot e^{-x} \quad (14)$$

Koeffizientenvergleich zu der Gleichung (14):

$$A = 1$$

d.h. insgesamt nach (13)

$$y_s = -x^2 \cdot e^{-x}$$

also lautet die Gesamtlösung

$$y = \eta + y_s = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x} + C_3 \cdot e^{3 \cdot x} - x^2 \cdot e^{-x}$$

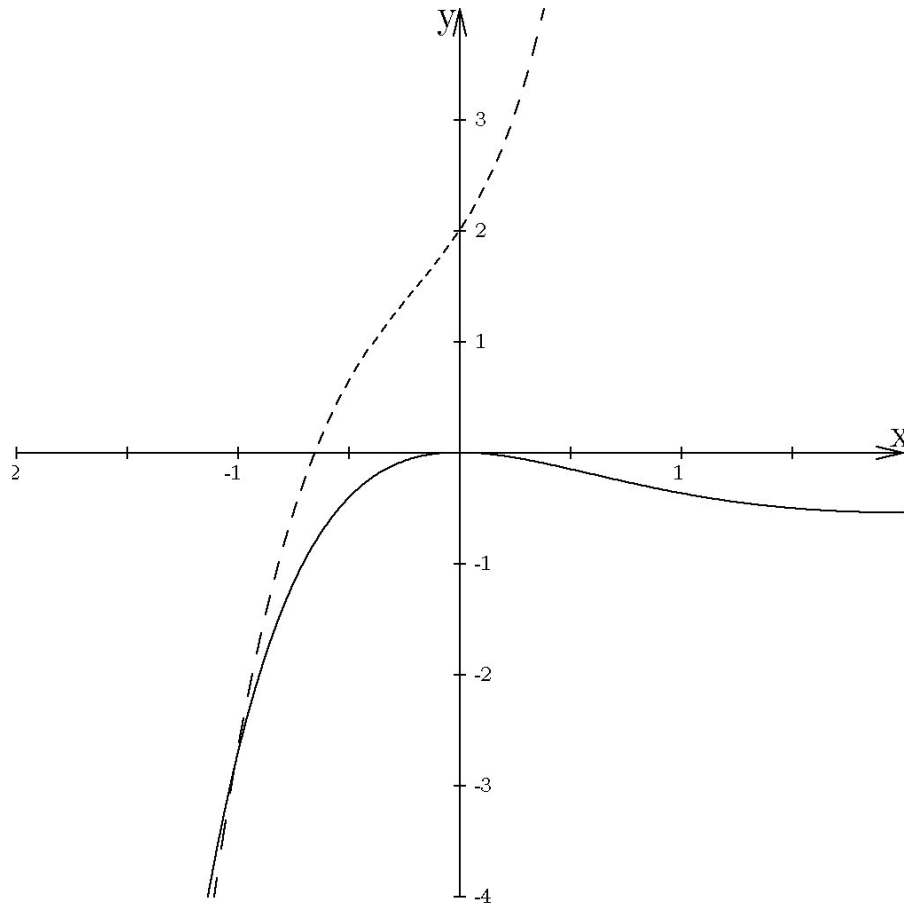


Bild zu Aufgabe 21.6c:

$$y''' - y'' - 5 \cdot y' - 3 \cdot y = 8 \cdot e^{-x}$$

$$y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x} + C_3 \cdot e^{3 \cdot x} - x^2 \cdot e^{-x}$$

$C_1 = C_2 = C_3 = 0$: ausgezogene Kurve

$C_1 = C_2 = C_3 = 1$: gestrichelte Kurve

Aufgabe 21.6d:

Die **homogene** Schwingungs-Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Sie erscheint in der Mechanik als *Federschwingung* in der Form

$$m \cdot \ddot{x} + \beta \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0$$

und in der Elektrotechnik als *Schwingkreis* in der Form

$$L \cdot \frac{d^2}{dt^2} I + R \cdot \frac{d}{dt} I + \frac{1}{c} \cdot I = 0$$

(siehe REP 16.8)

Aus der Physik wird berichtet: Die Auslenkung y einer mechanischen Schwingung genügt (innerhalb bestimmter Grenzen von x) der Differentialgleichung

$$m \cdot y'' + \gamma \cdot y + k \cdot y = K(x) \quad (15)$$

Darin sind m die Masse, k die Federkonstante, γ eine Dämpfungskonstante und $K(x)$ eine äussere Kraft.

Lösen Sie die Differentialgleichung

a) für $m = 1$, $\gamma = 0$, $k = 1$ und $K(x) = 0$

b) für $m = 1$, $\gamma = 0$, $k = 1$ und $K(x) = \cos(x)$

unter den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

Lösung der Aufgabe 21.6da):

In diesem Fall lautet die DGL (15):

$$y'' + y = 0 \quad (16)$$

Dies ist eine homogene DGL.

Aus dem Ansatz $y = e^{\lambda x}$ ergibt sich die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Diese hat die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \pm i \quad (17)$$

Die Lösung η dieser homogenen Differentialgleichung lautet folglich

$$y = C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \sin(x) \quad (18)$$

wobei $C_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2\}$ (konstante) Koeffizienten sind.

Nun sollen die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ berücksichtigt werden:

Wegen $y(0) = 0$ muss gelten

$$0 = y(0) = C_1 \cdot \cos(0) + C_2 \cdot \sin(0) = C_1, \text{ also } \boxed{C_1 = 0}$$

Es ist $y' = -C_1 \cdot \sin(x) + C_2 \cdot \cos(x) \stackrel{C_1=0}{=} C_2 \cdot \cos(x)$

Wegen $y'(0) = 1$ muss gelten

$$1 = y'(0) = C_2 \cdot \cos(0) = C_2, \text{ also } \boxed{C_2 = 1}$$

also insgesamt

$$y = \sin(x) \quad (19)$$

Lösung der Aufgabe 21.6db):

In diesem Fall lautet die DGL (15):

$$y'' + y = \cos(x) \quad (20)$$

Dies ist eine inhomogene DGL.

Die zugehörige homogene DGL wurde in Aufgabe 21.6da) gelöst: Nach (19) ist $\eta = \sin(x)$.

Nun berücksichtigen wir das Störglied $r(x) = \cos(x)$.

Hier ist $r(x) = \cos(x) = P(x) \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x)$, also

$$\text{grad}(P) = 0 \text{ und } a = 0 \text{ und } b = 1, \text{ als } a + b \cdot i = i$$

und es ist $a + b \cdot i = i$ eine einfache komplexe Nullstelle der charakteristischen Gleichung (siehe 17). Also liegt hier Resonanz vor ($k = 1$).

Wegen $0 = \text{grad}(Q_1) = \text{grad}(Q_2)$ setzen wir $Q_1(x) = A$ und $Q_2(x) = B$. Dann ist

$$y_s = A \cdot x \cdot \cos(x) + B \cdot x \cdot \sin(x) \quad (21)$$

Dieses y_s müssen wir nun in der Gleichung (20) einsetzen, um die Koeffizienten A und B zu bestimmen.

Es ist

$$y_s = A \cdot x \cdot \cos(x) + B \cdot x \cdot \sin(x)$$

$$y'_s = A \cdot (\cos(x) - x \cdot \sin(x)) + B \cdot (\sin(x) + x \cdot \cos(x))$$

$$\begin{aligned} y''_s &= A \cdot (-\sin(x) - \sin(x) - x \cdot \cos(x)) + B \cdot (\cos(x) + \cos(x) - x \cdot \sin(x)) \\ &= A \cdot (-2 \cdot \sin(x) - x \cdot \cos(x)) + B \cdot (2 \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x)) \end{aligned}$$

und folglich ergibt sich bei Einsatz in (20)

$$\underbrace{A \cdot (-2 \cdot \sin(x) - x \cdot \cos(x)) + B \cdot (2 \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x))}_{y''_s} + \underbrace{A \cdot x \cdot \cos(x) + B \cdot x \cdot \sin(x)}_{y_s} = \cos(x)$$

oder

$$\sin(x) \cdot (-2 \cdot A + x \cdot (-B + B)) + \cos(x) \cdot (2 \cdot B + x \cdot (-A + A)) = \cos(x) \quad (22)$$

Koeffizientenvergleich zu der Gleichung (22):

$$A = 0 \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{2}$$

d.h. insgesamt nach (21)

$$y_s = 0 \cdot x \cdot \cos(x) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sin(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sin(x)$$

also lautet die Gesamtlösung

$$y = \eta + y_s = \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sin(x)$$

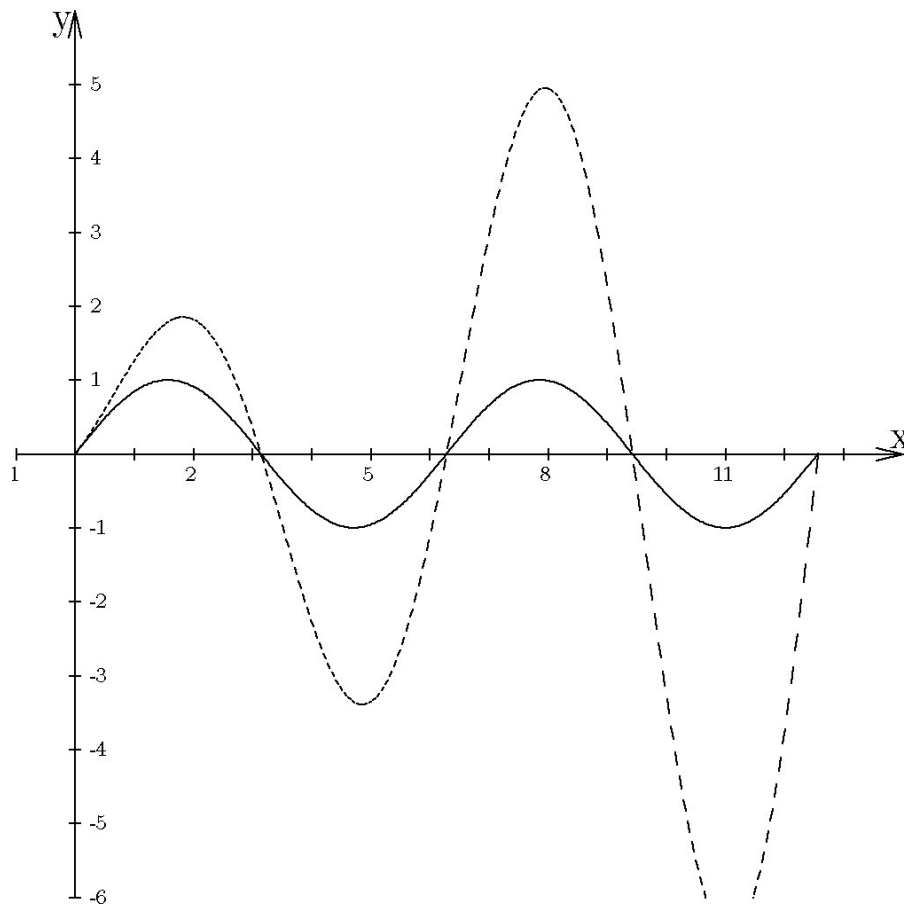


Bild zu Aufgabe 21.6d: mechanische Schwingung

 $K(x) = 0$: ausgezogene Kurve $K(x) = \cos(x)$: gestrichelte Kurve

Exakte DGL

Eine DGL der Form

$$p(x, y) + q(x, y) \cdot y' = 0$$

heißt **exakte DGL**, falls es eine Funktion $F(x, y)$ gibt mit

$$F_x(x, y) = p(x, y) \quad \text{und} \quad F_y(x, y) = q(x, y)$$

Die Funktion F heißt dann **Stammfunktion der exakten DGL**.

Bemerkung: Die Lösung einer exakten DGL gelingt oft dadurch, dass zunächst

$$F(x, y) = \int p(x, y) \cdot dx$$

berechnet wird und dann für diese Funktion F die Ableitung

$$\frac{d}{dy} F(x, y)$$

gebildet wird - und diese dann mit $q(x, y)$ verglichen wird.

(Natürlich kann auch zunächst mit der Integration $F(x, y) = \int q(x, y) \cdot dy$ begonnen werden.)

Aufgabe 21.7:

Lösen Sie die exakte Differentialgleichung

$$(\sin(y) - 2 \cdot \sin(x^2) \cdot \sin(2 \cdot y)) \cdot y' + \cos(x) + 2 \cdot x \cdot \cos(x^2) \cdot \cos(2 \cdot y) = 0 \quad (23)$$

Vorübung (Ergänzung der Formelsammlung):

a) Berechnung der Ableitung $\frac{d}{dy} \sin(x^2) \cdot \cos(2 \cdot y)$:

Es ist $\sin(x^2)$ (bei Ableitung nach y) eine Konstante, also ist nur $\cos(2 \cdot y)$ abzuleiten.
Daher ist

$$\frac{d}{dy} \sin(x^2) \cdot \cos(2 \cdot y) = -2 \cdot \sin(x^2) \cdot \sin(2 \cdot y)$$

Umgekehrt ist daher

$$\int 2 \cdot \sin(x^2) \cdot \sin(2 \cdot y) \cdot dy = -\sin(x^2) \cdot \cos(2 \cdot y) + C(x)$$

b) Es ist $\frac{d}{dx} \sin(x^2) \cdot \cos(2 \cdot y) + C(x) = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2) \cdot \cos(2 \cdot y) + C'(x)$

Lösung der Aufgabe 21.7:

Gemäß der Beschreibung einer exakten DGL wird hier eine Funktion F gesucht mit

$$\begin{aligned} F_x(x, y) = p(x, y) : &= \cos(x) + 2 \cdot x \cdot \cos(x^2) \cdot \cos(2 \cdot y) \quad \text{und} \\ F_y(x, y) = q(x, y) : &= \sin(y) - 2 \cdot \sin(x^2) \cdot \sin(2 \cdot y) \end{aligned} \quad (24)$$

also $F(x, y) = \int \cos(x) + 2 \cdot x \cdot \cos(x^2) \cdot \cos(2 \cdot y) \cdot dx$

und

$$F(x, y) = \int \sin(y) - 2 \cdot \sin(x^2) \cdot \sin(2 \cdot y) \cdot dy$$

Gemäß der Bemerkung zur Definition der exakten DGL beginnen wir mit der (einfacher erscheinenden) Integration:

Es ist nach den Vorübungen

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int \sin(y) - 2 \cdot \sin(x^2) \cdot \sin(2 \cdot y) \cdot dy \\ &= -\cos(y) + \sin(x^2) \cdot \cos(2 \cdot y) + C(x) \end{aligned} \quad (25)$$

und damit $F_x(x, y) = \frac{d}{dx} F(x, y) = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2) \cdot \cos(2 \cdot y) + C'(x)$.

Andererseits soll nach (24) gelten

$$F_x(x, y) = \cos(x) + 2 \cdot x \cdot \cos(x^2) \cdot \cos(2 \cdot y)$$

Also muss gelten

$$C'(x) = \cos(x) \quad \text{oder} \quad C(x) = \sin(x) + K$$

Damit wird aus (25)

$$F(x, y) = -\cos(y) + \sin(x^2) \cdot \cos(2 \cdot y) + \sin(x) + K \quad (26)$$

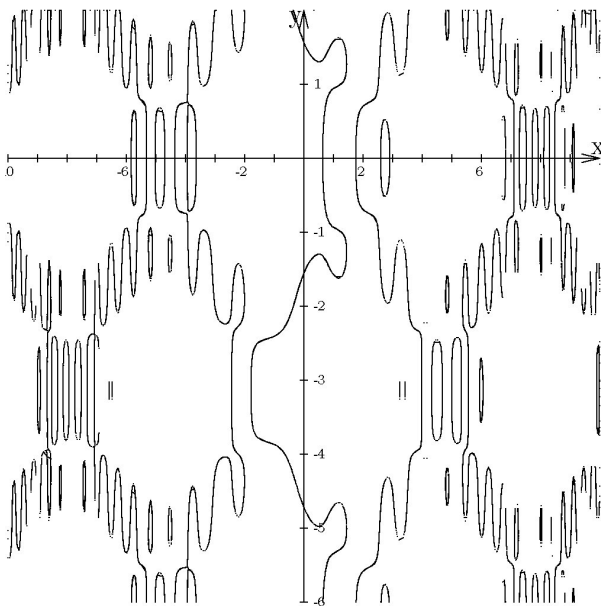


Bild zu Aufgabe 21.7:

$$-\cos(y) + \sin(x^2) \cdot \cos(2 \cdot y) + \sin(x) = 0$$

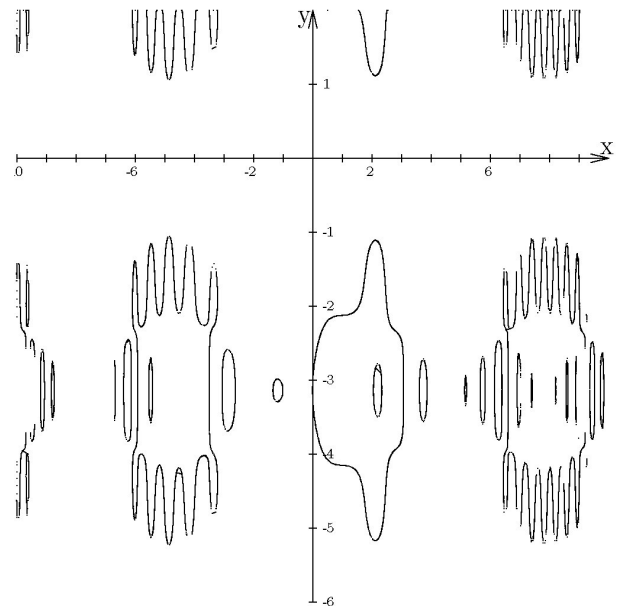


Bild zu Aufgabe 21.7:

$$-\cos(y) + \sin(x^2) \cdot \cos(2 \cdot y) + \sin(x) = 1$$

Aufgabe 21.8:

Es wird ein (eventuell beladener) Container betrachtet, der auf einen Betonboden fällt. Es wird angenommen, dass der Betonboden wie eine Feder wirkt, d.h. dass es eine Federkonstante k für das System Betonboden/Container gibt, so dass der Weg des Containers in den Beton proportional zu der Kraft ist, mit der der Container auf den Betonboden drückt ¹⁾.

Der Literatur kann diese Federkonstante im allgemeinen nicht entnommen werden. Daher wird hier angenommen, dass bereits ein Fallversuch stattgefunden hat, um dadurch die Federkonstante des Systems Betonboden/Container mit Hilfe der allgemeinen Bewegungsgleichung für den freien Fall zu bestimmen.

Mit dieser Federkonstante kann dann auch für jeden weiteren Fall eines Containers auf diesen Boden die maximale Beschleunigung im Aufprallpunkt berechnet werden.

Voraussetzungen und Bedingungen

Es werden nur Bewegungen senkrecht zur Bodenfläche betrachtet.

V1	Definition der Federkonstante des Bodens	
	k_{Boden}	Federkonstante des Bodens
	F	Kraft
	x	Koordinate (Weg) des tiefsten Punktes („Aufprallpunktes“) des Containers
		$F = -k \cdot x$
V2	Zusammenhang zwischen dem Weg x , der Fallzeit t und der Beschleunigung b	
	b	Beschleunigung des Containers (in positiv in Fallrichtung)
		$b = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$
V3	Fallgesetz für den Container	
	m	Masse des Containers
		$F = m \cdot b$
A1	Anfangswert zur Beziehung zwischen der Höhe x und Zeit t	
	$t_0 = 0$	sei der Zeitpunkt, zu dem tiefste Punkt des Containers auf den Boden auftrifft.
		Die Höhe des Bodens (vor dem Auftreffen des Containers) sei 0.
		Also soll gelten $x(0) = 0$.

¹⁾ Diese Annahme ist nur in einem sehr kleinen Bereich gültig (wir nehmen an, dass sie von der Oberfläche bis 1 mm darunter gilt).

Aufgabe 21.8.1

Aus den „Voraussetzungen und Bedingungen“ (V1) bis (V3) ergibt sich der Zusammenhang

$$F = -k \cdot x = m \cdot b = m \cdot \ddot{x}, \quad \text{also} \quad m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x \quad (B)$$

Zeigen Sie, dass es unter Berücksichtigung der Anfangswert-Bedingung (A1) für jede Lösung dieser Differentialgleichung eine „Amplitude“ A und eine „Frequenz“ ω gibt mit

$$x = x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Lösung der Aufgabe 21.8.1

Der allgemeine Ansatz für eine homogene Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet

$$x = x(t) = e^{\lambda \cdot t}$$

Damit ergibt sich die *charakteristische Gleichung* als

$$m \cdot \lambda^2 + k = 0$$

Diese Gleichung ist erfüllt für

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}$$

d.h. λ mit $\lambda_1 = i \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$ und $\lambda_2 = -i \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$ ist eine *1-fach komplexe Lösung* (mit $a = 0$ und $b = \sqrt{\frac{k}{m}}$) der charakteristischen Gleichung, und damit lauten die Basislösungen der DGL

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot t) \quad \begin{array}{l} a=0 \\ b = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{array} = \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t) \\ e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot t) \quad \begin{array}{l} a=0 \\ b = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{array} = \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t) \end{array} \right.,$$

d.h. die allgemeine Lösung der DGL ist $x = c_1 \cdot \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t)$

Nach der Anfangswert-Bedingung (A1) soll gelten $x(0) = 0$, also ist $c_2 = 0$.

Damit gibt es für jede Lösung dieser Differentialgleichung (B) eine „Amplitude“ A und eine „Frequenz“

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (B1)$$

mit

$$x = x(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \quad (B2)$$

Aufgabe 21.8.2

Es wird weiterhin angenommen, dass der Weg x des Aufprallpunktes des Containers in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine Gleichung der Form von (B2) (für ein geeignetes A) beschrieben wird. Es sei $t_0 = 0$ der Zeitpunkt, zu dem der Aufprallpunkt des Containers mit einer Geschwindigkeit v_0 auf den Boden auftrifft.

Bestimmen Sie

21.8.2.1 den Zusammenhang zwischen v_0 und A

21.8.2.2 den (ersten) Zeitpunkt $t_1 > t_0$, zu dem der Container den tiefsten Punkt im Boden erreicht (Hinweis: in diesem Punkt ist die Geschwindigkeit 0.)

21.8.2.3 die maximale Beschleunigung im Aufprallpunkt

Lösung der Aufgabe 21.8.2

Nach (B3) ist $x = A \cdot \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t)$ der Weg des Aufprallpunktes in den Boden, und die Geschwindigkeit dieses Aufprallpunktes ist $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$.

Es ist

$$\dot{x} = A \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t)$$

Da v_0 die Aufprallgeschwindigkeit v_0 (zur Zeit $t_0 = 0$) bekannt ist, gilt

$$v_0 = \dot{x}(0) = A \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0) = A \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

und damit

$$A = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (B3)$$

Da zum Zeitpunkt t_1 die Geschwindigkeit $\dot{x}$ des Containers gleich Null ist, muss gelten

$$\dot{x} = A \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_1) = 0 \quad \longrightarrow \quad \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_1 = \frac{\pi}{2} \quad \longrightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (B4)$$

Neben der Geschwindigkeit kann auch die Beschleunigung $b = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$ aus der Gleichung (B2) bestimmt werden:

$$b = \ddot{x} = - \left(v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \right) \cdot \frac{k}{m} \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) \quad (B5)$$

Da die Beschleunigung im Zeitpunkt t_1 maximal ist, gilt

$$b_{max} = \ddot{x}(t_1) = -v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{k}{m} \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \right) = -v_0 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (B6)$$

Aufgabe 21.8.3

Es wird angenommen, dass bereits ein Fallversuch durchgeführt wurde, wobei folgende Daten dokumentiert wurden:

Fallhöhe (= Höhe des tiefsten Punktes des Containers)	$H = 0.3 \text{ m}$	(A2)
Gesamtmasse m des (eventuell beladenen) Containers	$m = 150\,000 \text{ kg}$	(A3)
maximale Beschleunigung	$b_{(max)} = 30 \text{ g}$	(A4)

Bemerkung: Nach den Fallgesetzen beträgt bei dieser Höhe H die Aufprallgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \approx 2.5 \text{ m/s}$. (B7)

21.8.3.1 Bestimmen Sie aus diesen Messwerten die Federkonstante k

21.8.3.2 Berechnen Sie die Kraft, die notwendig ist, um den Betonboden um 1 mm (bei dieser Federkonstanten) einzudrücken.

Lösung der Aufgabe 21.8.3

Bewegungsgleichung für den freien Fall

Der Beton-Boden, auf den der Container fällt, wird als eine Feder mit der Federkonstanten k betrachtet. Der fallende Container drückt mit einer Kraft F auf diesen Boden und bewirkt dadurch eine Vertiefung um eine Strecke x_1 . Hier wird die Beschleunigung zur Zeit $t = t_1$ aus den Meßdaten entnommen, um die Federkonstante des Betons zu bestimmen.

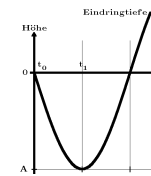
Aus (B6) ergibt sich mit den Daten (A3), (A4) und (B7):

$$b_{(max,P)} = 30 \text{ g} = 30 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = -2.5 \text{ m/s} \cdot \sqrt{\frac{k}{150\,000 \text{ kg}}} \quad (\text{B8})$$

oder

$$k = \left(\frac{30 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2}{2.5 \text{ m/s}} \right)^2 \cdot 150\,000 \text{ kg} \approx 2080 \frac{\text{MN}}{\text{m}} = 208\,000 \frac{\text{t}}{\text{m}} \quad (\text{B9})$$

d.h. zum Eindringen des Betonbodens um $x = 1 \text{ mm}$ wäre eine Kraft von 208 t notwendig.



Aufgabe 21.8.3: Bestimmung der Federkonstante

Mit der Kenntnis der Federkonstante des Betonbodens (z.B. aus dem in Aufgabe 21.8.3 beschriebenen Fallversuch) kann nun für einen Container mit der Masse m und der Aufprallgeschwindigkeit v_0 die maximale Beschleunigung in dem Aufprallpunkt nach (B6) berechnet werden.

Aufgabe 21.8.4 Festigkeit des Beton-Bodens

Untersuchen Sie, wie sich die maximale Beschleunigung ändert, wenn der Boden härter wird (d.h. wenn sich die Federkonstante des Bodens erhöht). Es gilt nach (B6):

$$b_{max} = -v_0 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Daher gilt für einen Container (mit einer festen Masse und einer festen Fallhöhe):

$$b_{max} \sim \sqrt{k}$$

d.h. je grösser die Federkonstante des Bodens ist, desto höher ist die maximale Beschleunigung beim Fall auf den Boden.

21.8.5 Theorie: Elastizität - Federkonstante

Ein Stab mit Querschnitt A und Länge l_0 werde mit einer Kraft F gedrückt/gezogen. Dann ist die Spannung $\sigma = \frac{F}{A}$

Das Ergebnis sei eine Verkürzung/Verlängerung der Länge l_0 auf die Länge l . Dann ist

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Es wird definiert: der Elastizitätsmodul $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$

Der Elastizitätsmodul von Beton beträgt $E_{Beton} = 40 \text{ MPa} = 40 \text{ MN/m}^2$

Der Elastizitätsmodul von Stahl beträgt $E_{Stahl,min} = 150 \text{ MPa}$ bis $E_{Stahl,max} = 310 \text{ MPa}$

Der Beton werde um $7 \text{ cm} = 0.07 \text{ m}$ eingedrückt. Dann ist $\Delta l = 0.07 \text{ m}$ und $\epsilon = \frac{0.07 \text{ m}}{l_0}$. Wie hoch war der Betonblock, auf den der Container fiel (d.h. wie gross war l_0)?

Wie groß ist die Fläche A , die eingedrückt wird, wenn der Container auf den Betonblock fällt?

Annahme 1: $A = 1000 \text{ cm}^2 = 0.1 \text{ m}^2$

Annahme 2: Der Container wirkte mit der Kraft F_C auf den Betonboden; $F_C = 0.72 \text{ MN}$

Gesucht: l_0 .

Wir nehmen an, dass diese Kraft F_C auf die Fläche A drückt. Dann ist

$$\sigma = \frac{0.72 \text{ MN}}{0.1 \text{ m}^2} = 7.2 \text{ MPa}$$

Da Beton den Elastizitätsmodul $E_{Beton} = 40 \text{ MPa}$ besitzt, ist

$$E_{Beton} = 40 \text{ MPa} = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{7.2 \cdot l_0}{0.07} \frac{\text{MPa}}{\text{m}}$$

oder

$$l_0 = 40 \cdot \frac{0.07}{7.2} \text{ m} \approx 0.39 \text{ m}$$

Daher wäre die Höhe des Betonblocks 39 cm.

Wenn daraus nach Gleichung (B) die Federkonstante k gerechnet werden soll, dann ist zu berücksichtigen: Innerhalb der Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes herrscht Elastizität. Damit ist die Änderung der Länge Δl proportional zu der aufgewendeten Kraft:

$$k = -\frac{F}{\Delta l} = -\frac{0.72 \text{ MN}}{0.07 \text{ m}} \approx 10 \frac{\text{MN}}{\text{m}}$$

Aufgabe 21.8.6: Wellengleichung (nach Physics, Seite 472)**Oszillierendes Teilchen am Ende einer Feder**

An eine nicht ausgezogenen Feder sei an einem Ende (mit den Koordinaten $P = (0, 0)$) ein Teilchen mit einer Masse m befestigt, während das andere Ende der Feder an einem Ort $Q = (-q, 0)$ mit $q > 0$ fest angebunden ist. Wenn nun das Teilchen während der Zeit t in positiver x -Richtung (ohne Reibung) um das Stück $x(t)$ mit einer Kraft $F(t)$ gezogen wird, dann gilt mit einer „Federkonstanten“ k

$$F(t) = k \cdot x(t) \quad (1)$$

Andererseits gilt Newtons Gesetz „Kraft = Masse mal Beschleunigung“, d.h. wenn $b_x(t)$ die Beschleunigung in x -Richtung ist, wir haben eine weitere Gleichung für diese Kraft:

$$F(t) = -m \cdot b_x(t) \quad (2)$$

Schliesslich ist aus der Physik bekannt, dass Beschleunigung $b_x(t)$ und der während der Zeit t zurückgelegte Weg $x(t)$ zusammenhängen durch die Gleichung

$$b_x(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) \quad (3)$$

Aufgabe:

Fassen Sie diese drei Gleichungen zu einer Gleichung zusammen, die nur die Terme

$$m, \frac{d^2}{dt^2} x(t), k \text{ und } x(t)$$

enthält.

Lösung:

Aus (1) und (2) wird mit (3)

$$k \cdot x(t) = -m \cdot b_x(t) \stackrel{(3)}{=} -m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

und damit

$$k \cdot x(t) = -m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

(diese Gleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung).

Aufgabe 21.8.7: Gleichmäßige Kreisbewegung

Ein Teilchen, das sich am Ende eines Bandes der Länge r um den Nullpunkt mit gleichmäßiger Winkelgeschwindigkeit ω dreht, erfährt in Richtung Nullpunkt eine Beschleunigung $\vec{a}(\varphi)$. Wenn wir die Bewegung dieses Teilchens durch Polarkoordinaten als Funktion der Zeit φ in der Form $\vec{r}(\varphi)$ beschreiben, dann gilt

$$\vec{a}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_x(\varphi) \\ a_y(\varphi) \end{pmatrix} = -\omega^2 \cdot \vec{r}(\varphi) = -\omega^2 \cdot \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} =: -\omega^2 \cdot \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix}$$

also gilt für die jeweiligen x -Komponenten

$$a_x(\varphi) = -\omega^2 \cdot x(\varphi) \quad (4)$$

Auch hier gilt, dass Beschleunigung $a_x(\varphi)$ und der mit dem Winkel φ zurückgelegte Weg $x(\varphi)$ zusammenhängen durch die Gleichung

$$a_x(\varphi) = \frac{d^2}{d\varphi^2} x(\varphi) \quad (5)$$

Aufgabe:

Fassen Sie die Gleichungen (4) und (5) zu einer Gleichung zusammen, die nur die Terme

$$\omega, \frac{d^2}{d\varphi^2} x(\varphi) \text{ und } x(\varphi)$$

enthält.

Lösung:

Aus (4) und (5) wird

$$\frac{d^2 x(\varphi)}{d\varphi^2} = -\omega^2 \cdot x(\varphi)$$

(auch diese Gleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung).

Aufgabe 21.8.8:

Lösen Sie die Differentialgleichungen aus 21.8.6 und 21.8.7 auf die gleiche Art. Geben Sie dazu an:

- den Ansatz,
- die charakteristische Gleichung und deren Lösungen,
- die allgemeine Lösung,
- die spezielle Lösung durch den Punkt $P = \left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ mit der Steigung $y' \left(\frac{\pi}{6}\right) = 9$ und der Gleichung der Tangente in P
- die spezielle Lösung nach d) in der Form $y = A \cdot \cos(B \cdot x + C)$

und zeichnen Sie die zugehörige Kurve im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ **Lösung a):**

Für

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

sind beide Probleme gleich.

Es ist dann mit $y = y(x) := x(\varphi)$ und $y'' := \frac{d^2 x(\varphi)}{d\varphi^2}$

$$y'' + \omega^2 \cdot y = 0$$

Für diese „homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten“ wird der Ansatz

$$y = e^{\lambda \cdot x} \quad 6$$

gewählt.

Lösung b):

Damit lautet die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \omega \quad (\text{einfach komplex})$$

Lösung c):

Damit lauten die Basislösungen der Differentialgleichung (6)

$$e^{0 \cdot x} \cdot \cos(\omega \cdot x) = \cos(\omega \cdot x) \quad \text{und} \quad e^{0 \cdot x} \cdot \sin(\omega \cdot x) = \sin(\omega \cdot x)$$

mit der Lösungsbasis

$$y = c_1 \cdot \cos(\omega \cdot x) + c_2 \cdot \sin(\omega \cdot x) \text{ mit } c_1 \in \mathbb{R} \text{ und } c_2 \in \mathbb{R}$$

Lösung d):

Eine spezielle Lösung für $\omega = 18$ durch den Punkt $P = (\frac{\pi}{6}, 1)$, an der die Kurve die Steigung $y'(\frac{\pi}{6}) = 9$ besitzt, ergibt sich wegen

$$y' = -c_1 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot x) + c_2 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot x)$$

durch die Auflösung der beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{cases} 1 = c_1 \cdot \cos(18 \cdot \frac{\pi}{6}) + c_2 \cdot \sin(18 \cdot \frac{\pi}{6}) = -c_1 & (7) \\ 9 = -c_1 \cdot 18 \cdot \sin(18 \cdot \frac{\pi}{6}) + c_2 \cdot 18 \cdot \cos(18 \cdot \frac{\pi}{6}) = -18 \cdot c_2 & (8) \end{cases}$$

Also $c_1 = -1$ und $c_2 = -\frac{1}{2}$ und damit

$$y = -\cos(18 \cdot x) - \frac{1}{2} \cdot \sin(18 \cdot x)$$

Die Tangente in dem Punkt P hat die Gleichung

$$y = 9 \cdot x + 1 - \frac{3}{2} \cdot \pi \quad (\text{Tangente im Punkt } P = (\frac{\pi}{6}, 1))$$

Zeichnung:

Diese Kurve hat im Intervall $[0, \frac{\pi}{3}]$ folgende Gestalt:

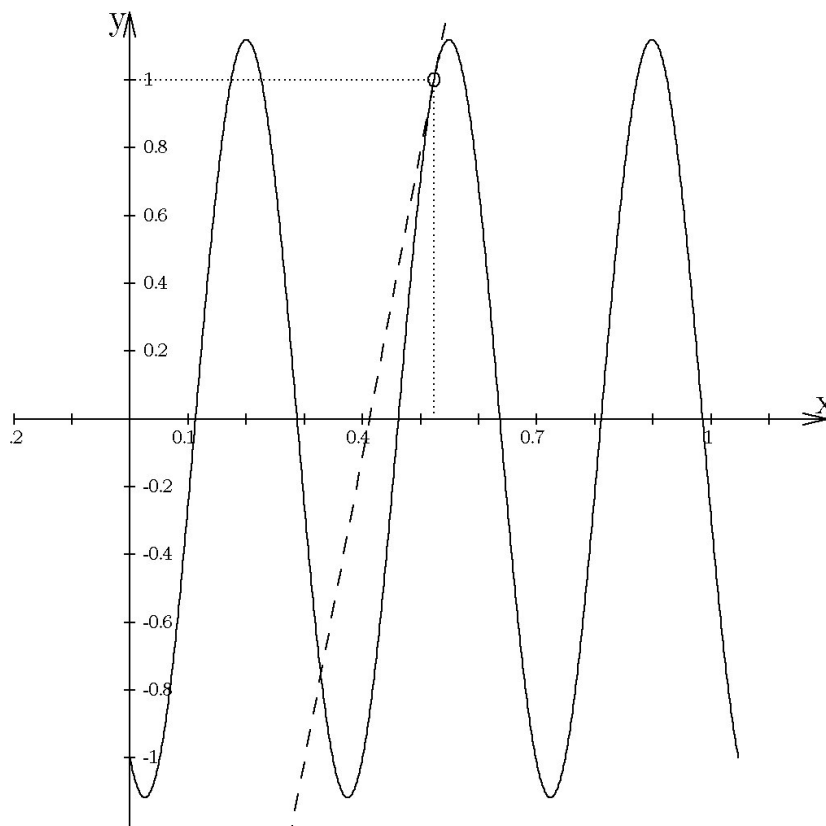


Bild zu Aufgabe ing100: Kurve (ausgezogen) mit Tangente in P (gestrichelt)

Lösung e):

Schliesslich müssen noch Koeffizienten A , B und C so bestimmt werden, dass gilt

$$y = A \cdot \cos(B \cdot x + C) = -\cos(18 \cdot x) - \frac{1}{2} \cdot \sin(18 \cdot x).$$

Dazu wird $\cos(B \cdot x + C)$ nach dem Additionstheorem des $\cos$ aufgelöst:

$$\cos(B \cdot x + C) = \cos(B \cdot x) \cdot \cos(C) - \sin(B \cdot x) \cdot \sin(C),$$

also

$$A \cdot [\cos(B \cdot x) \cdot \cos(C) - \sin(B \cdot x) \cdot \sin(C)] = -\cos(18 \cdot x) - \frac{1}{2} \cdot \sin(18 \cdot x).$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt direkt

$$B = 18$$

also

$$A \cdot \cos(C) \cdot \cos(18 \cdot x) - A \cdot \sin(C) \cdot \sin(18 \cdot x) = -\cos(18 \cdot x) - \frac{1}{2} \cdot \sin(18 \cdot x).$$

d.h. es müssen A und C so gewählt werden, dass gelten

$$A \cdot \cos(C) = -1 \quad \text{und} \quad A \cdot \sin(C) = \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Durch Quadrieren erhält man

$$A^2 = A^2 \cdot [\cos^2(C) + \sin^2(C)] = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \text{ also } A = \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}.$$

Wir wählen hier

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}$$

um damit C aus (9) zu bestimmen:

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(C) = -1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(C) = \frac{1}{2}$$

oder

$$\cos(C) = -\frac{2}{5} \cdot \sqrt{5} \quad \text{und} \quad \sin(C) = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5}, \quad \text{also} \quad \tan(C) = -\frac{\sin(C)}{\cos(C)} = -\frac{1}{2}.$$

Da C im II. Quadranten liegt, ergibt sich damit

$$C \approx \pi - 0.46 \approx 2.68 \approx 180^\circ - 26.6^\circ = 153.4^\circ$$

Daher lautet die gesuchte spezielle Lösung der obigen Differentialgleichung

$$y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(18 \cdot x + 2.68)$$