



## 25 Fast-Fourier-Transformation (FFT)

### FFT

Als „Harmonische Analyse“ oder „Fast Fourier Transformation (FFT)“ wird ein Verfahren zur näherungsweise Berechnung der Fourier-Koeffizienten bezeichnet.

Es seien  $(2 \cdot m)$  Messpunkte  $(x(i), y(i))$  mit  $i = 0, \dots, (2 \cdot m - 1)$  mit der Bedingung  $x(i+1) - x(i) = x(i) - x(i-1)$  für  $i = 1, \dots, (2 \cdot m - 2)$  (d.h. gleiche Abstände der  $x$ -Komponenten) gegeben.  $P$  sei die angenommene Periodenlänge. Dadurch entstehen gleich grosse Teilintervalle der Länge  $T = \frac{P}{(2 \cdot m)}$ . (Günstig ist es, das Intervall in 12, 24, 36 oder 72 Teilintervalle zu zerlegen, um Symmetrieeigenschaften auszunutzen.)

Dann entsteht die trigonometrische Funktion

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=m-1} \left( a_n \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{P} \cdot n \cdot x\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{P} \cdot n \cdot x\right) \right) + a_m \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{P} \cdot m \cdot x\right)$$

mit den Koeffizienten ist

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \sum_{i=0}^{2 \cdot m-1} y(i) \\ a_m &:= \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \sum_{i=0}^{2 \cdot m-1} y(i) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{P} \cdot i \cdot \pi\right) \\ a_n &:= \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=0}^{2 \cdot m-1} y(i) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{P} \cdot \frac{n}{m} \cdot i \cdot \pi\right) \quad \text{für } n = 1, 2, \dots, (m-1) \\ b_n &:= \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=0}^{2 \cdot m-1} y(i) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{P} \cdot \frac{n}{m} \cdot i \cdot \pi\right) \quad \text{für } n = 1, 2, \dots, (m-1) \end{aligned}$$

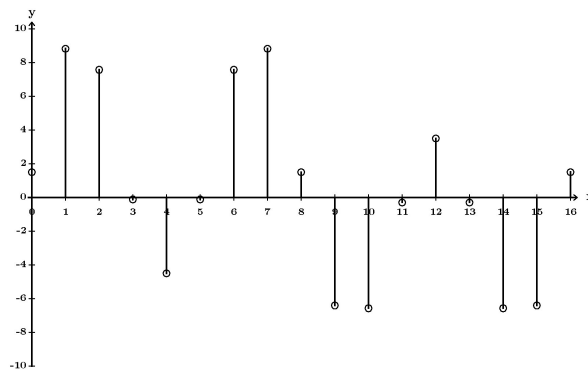
### Aufgabe 25.1

Das Intervall von 0 bis  $P = 2 \cdot \pi$  werde unterteilt in  $2 \cdot m = 16$  gleich grosse Teilintervalle der Länge  $T = \frac{P}{16}$ . Es seien an den Punkten  $(x(i), y(i))$  mit  $i = 0, \dots, (2 \cdot m - 1)$  folgende „Messpunkte“ bestimmt:

| i | $x(i)$      | $y(i)$ |  | i  | $x(i)$       | $y(i)$ |  |
|---|-------------|--------|--|----|--------------|--------|--|
| 0 | $0 \cdot T$ | 1.500  |  | 8  | $8 \cdot T$  | 1.500  |  |
| 1 | $1 \cdot T$ | 8.822  |  | 9  | $9 \cdot T$  | -6.408 |  |
| 2 | $2 \cdot T$ | 7.571  |  | 10 | $10 \cdot T$ | -6.571 |  |
| 3 | $3 \cdot T$ | -0.114 |  | 11 | $11 \cdot T$ | -0.300 |  |
| 4 | $4 \cdot T$ | -4.500 |  | 12 | $12 \cdot T$ | 3.500  |  |
| 5 | $5 \cdot T$ | -0.114 |  | 13 | $13 \cdot T$ | -0.300 |  |
| 6 | $6 \cdot T$ | 7.571  |  | 14 | $14 \cdot T$ | -6.571 |  |
| 7 | $7 \cdot T$ | 8.822  |  | 15 | $15 \cdot T$ | -6.408 |  |

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{16}$$

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten. Zeichnen Sie 16 Punkte sowie die (periodische) Kurve durch diese Punkte.

**Lösung zu Aufgabe 25.1:**<sup>1)</sup>.

*Aufgabe 25.1:* 16 Meßpunkte: Welche periodische Funktion geht durch diese Punkte?

Wir verwenden das folgende MAPLE-Programm zu Bestimmung der FFT-Koeffizienten:

FFT: Aufgabe 25.1:

```
> m:=8: P:=2*Pi:
> for i from 0 by 1 to 2*m-1 do
  x(i):=2*Pi/(2*m)*i:
  y(i):=1/2+3*sin(x(i))+cos(2*x(i))+7*sin(3*x(i)):
  print(i, " &", evalf(y(i))) od:
>
> s0:=0: for i from 0 by 1 while i<2*m do s0:=s0+y(i) od:
  a0:=1/2/m*s0;
> s0:=0: for i from 0 by 1 while i<2*m do s0:=s0+y(i)*cos(2*Pi/P*i*Pi) od:
  am:=evalf(1/2/m*s0);
> for n from 1 to m-1 do s0:=0: for i from 0 by 1 while i<2*m do
  s0:=s0+y(i)*cos(2*Pi/P*n/m*i*Pi) od:
  a(n):=1/m*s0 od;
> for n from 1 to m-1 do s0:=0: for i from 0 by 1 while i<2*m do
  s0:=s0+y(i)*sin(2*Pi/P*n/m*i*Pi) od:
  b(n):=1/m*s0 od;
```

---

<sup>1)</sup> Zur Konstruktion der „Meßpunkte“: sie wurden der Funktion

$$f(x) = 0.5 + 3 \cdot \sin(x) + \cos(2 \cdot x) + 7 \cdot \sin(3 \cdot x)$$

entnommen: Dazu wurde das Intervall von 0 bis  $P = 2 \cdot \pi$  unterteilt in  $2 \cdot m = 16$  gleich grosse Teilintervalle der Länge  $T = \frac{P}{16}$ . Dann ergaben sich an den Punkten  $(x(i), y(i))$  mit  $i = 0, \dots, (2 \cdot m - 1)$  die oben angegebenen „Meßpunkte“

Dann ergeben sich die Koeffizienten

---

|       |     |        |       |           |
|-------|-----|--------|-------|-----------|
| $a_0$ | $=$ | 0.500  |       |           |
| $a_1$ | $=$ | -0.000 | $b_1$ | $=$ 3.000 |
| $a_2$ | $=$ | 1.000  | $b_2$ | $=$ 0.000 |
| $a_3$ | $=$ | 0.000  | $b_3$ | $=$ 7.000 |
| $a_4$ | $=$ | -0.000 | $b_4$ | $=$ 0.000 |
| $a_5$ | $=$ | -0.000 | $b_5$ | $=$ 0.000 |
| $a_6$ | $=$ | 0.000  | $b_6$ | $=$ 0.000 |
| $a_7$ | $=$ | 0.000  | $b_7$ | $=$ 0.000 |
| $a_8$ | $=$ | -0.000 |       |           |

---

Die resultierende Funktion  $f(x)$  lautet dann wegen  $P = 2 \cdot \pi$ :

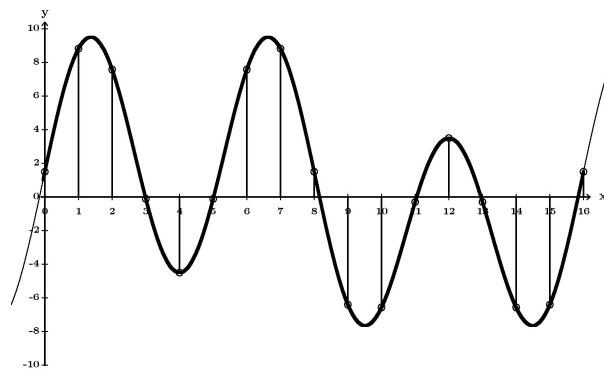
$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{n=7} (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x) + a_8 \cdot \cos(8 \cdot x)) \\ &= 0.5 + 3 \cdot \sin(x) + \cos(2 \cdot x) + 7 \cdot \sin(3 \cdot x) \end{aligned}$$

Die *nullte Näherung* ist dann die Funktion  $f_0(x) = 0.5$ ,

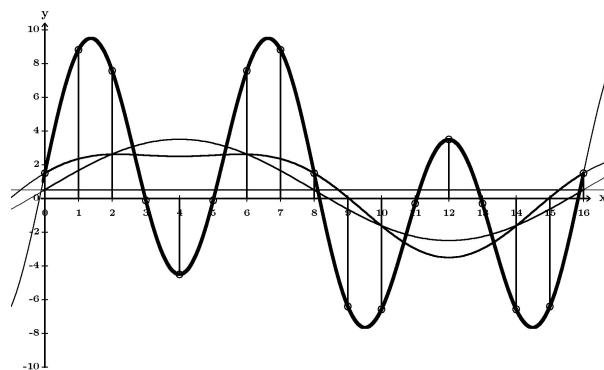
die *erste Näherung* lautet  $f_1(x) = f_0(x) + 3 \cdot \sin(x)$ ,

die *zweite Näherung* lautet  $f_2(x) = f_1(x) + \cos(2 \cdot x)$ ,

die *dritte Näherung* lautet  $f_3(x) = f_2(x) + 7 \cdot \sin(3 \cdot x)$ .



Aufgabe 25.1: Funktion  $f(x) = 0.5 + 3 \cdot \sin(x) + \cos(2 \cdot x) + 7 \cdot \sin(3 \cdot x)$  durch 16 Punkte



Aufgabe 25.1: Funktion  $f(x) = 0.5 + 3 \cdot \sin(x) + \cos(2 \cdot x) + 7 \cdot \sin(3 \cdot x)$  mit Näherungskurven

**Aufgabe 25.2**

Was geschieht, wenn der Periodenbeginn oder die Periodenlänge  $P$  nicht „richtig“ gewählt wird?

Welche Kurve ergibt sich (aus der Berechnung der jeweiligen Fourierkoeffizienten), wenn anstelle der 16 Messwerte aus Aufgabe 89)

a) nur die ersten 12 Messwerte ( $i = 0, \dots, 11$ )

b) nur die letzten 12 Messwerte ( $i = 4, \dots, 15$ )

zur Bestimmung der resultierenden Funktion  $f(x)$  ausgewählt werden?

| Aufgabe 25.2a) |              |        |  | Aufgabe 25.2b) |              |        |                              |
|----------------|--------------|--------|--|----------------|--------------|--------|------------------------------|
| i              | $x(i)$       | $y(i)$ |  | i              | $x(i)$       | $y(i)$ |                              |
| 0              | $0 \cdot T$  | 1.500  |  | 0              | $0 \cdot T$  | -4.500 |                              |
| 1              | $1 \cdot T$  | 8.822  |  | 1              | $1 \cdot T$  | -0.114 |                              |
| 2              | $2 \cdot T$  | 7.571  |  | 2              | $2 \cdot T$  | 7.571  |                              |
| 3              | $3 \cdot T$  | -0.114 |  | 3              | $3 \cdot T$  | 8.822  | $T = \frac{2 \cdot \pi}{12}$ |
| 4              | $4 \cdot T$  | -4.500 |  | 4              | $4 \cdot T$  | 1.500  |                              |
| 5              | $5 \cdot T$  | -0.114 |  | 5              | $5 \cdot T$  | -6.408 |                              |
| 6              | $6 \cdot T$  | 7.571  |  | 6              | $6 \cdot T$  | -6.571 |                              |
| 7              | $7 \cdot T$  | 8.822  |  | 7              | $7 \cdot T$  | -0.300 |                              |
| 8              | $8 \cdot T$  | 1.500  |  | 8              | $8 \cdot T$  | 3.500  |                              |
| 9              | $9 \cdot T$  | -6.408 |  | 9              | $9 \cdot T$  | -0.300 |                              |
| 10             | $10 \cdot T$ | -6.571 |  | 10             | $10 \cdot T$ | -6.571 |                              |
| 11             | $11 \cdot T$ | -0.300 |  | 11             | $11 \cdot T$ | -6.408 |                              |

Zeichnen Sie jeweils die Kurvenpunkte und die Kurven durch diese Punkte.

**Lösung der Aufgabe 25.2a)**

FFT: Aufgabe 25.2a)

```

> m:=6: P:=2*Pi:
>
> s0:=0: for i from 0 by 1 while i<2*m do s0:=s0+y(i) od:
    a0:=1/2/m*s0;
> s0:=0: for i from 0 by 1 while i<2*m do s0:=s0+y(i)*cos(2*Pi/P*i*Pi) od:
    am:=evalf(1/2/m*s0);
> for n from 1 to m-1 do s0:=0: for i from 0 by 1 while i<2*m do
    s0:=s0+y(i)*cos(2*Pi/P*n/m*i*Pi) od:
    a(n):=1/m*s0 od;
> for n from 1 to m-1 do s0:=0: for i from 0 by 1 while i<2*m do
    s0:=s0+y(i)*sin(2*Pi/P*n/m*i*Pi) od:
    b(n):=1/m*s0 od;

```

Es ergeben sich wegen  $m = 6$  die Koeffizienten

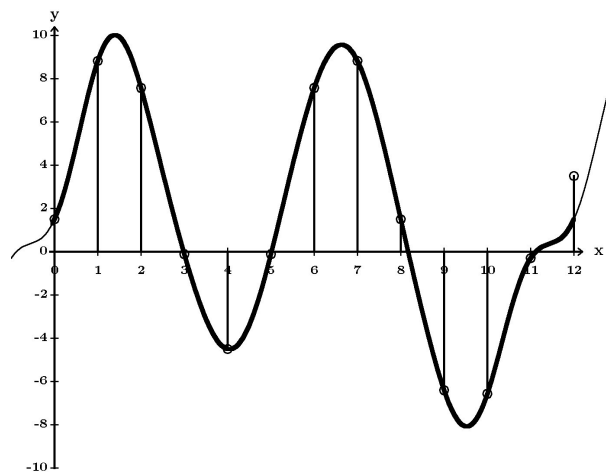
$$a_0, a_1, \dots, a_6 \quad \text{und} \quad b_1, b_2, \dots, b_5$$

|       |   |        |       |          |
|-------|---|--------|-------|----------|
| $a_0$ | = | 1.482  |       |          |
| $a_1$ | = | -0.705 | $b_1$ | = 2.240  |
| $a_2$ | = | 4.201  | $b_2$ | = 5.514  |
| $a_3$ | = | -1.679 | $b_3$ | = -1.018 |
| $a_4$ | = | -0.844 | $b_4$ | = -0.301 |
| $a_5$ | = | -0.652 | $b_5$ | = -0.111 |
| $a_6$ | = | -0.303 |       |          |

Es wird angenommen, dass die Periodenlänge auch hier  $P = 2 \cdot \pi$  beträgt; daher lauten die Näherungsfunktionen:

$$\begin{aligned}
 f_0(x) &= 1.482 \\
 f_1(x) &= f_0(x) - 0.705 \cdot \cos(x) + 2.240 \cdot \sin(x) \\
 f_2(x) &= f_1(x) + 4.201 \cdot \cos(2 \cdot x) + 5.514 \cdot \sin(2 \cdot x) \\
 f_3(x) &= f_2(x) - 1.679 \cdot \cos(3 \cdot x) - 1.018 \cdot \sin(3 \cdot x) \\
 f_4(x) &= f_3(x) - 0.844 \cdot \cos(4 \cdot x) - 0.301 \cdot \sin(4 \cdot x) \\
 f_5(x) &= f_4(x) - 0.652 \cdot \cos(5 \cdot x) - 0.111 \cdot \sin(5 \cdot x) \\
 f_6(x) &= f_5(x) - 0.303 \cdot \cos(6 \cdot x)
 \end{aligned}$$

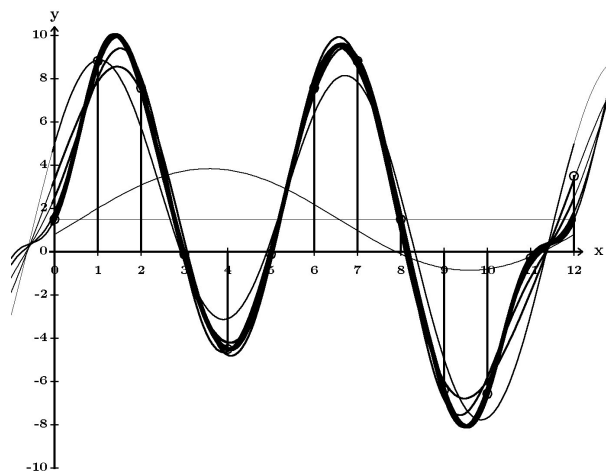
(1)



Aufgabe 25.2a): Fourier-Funktion  $f(x)$  durch die ersten 12 Punkte

Ergebnis des FFT-Verfahrens:  
Kurve durch die ersten 12 Punkte:

$$\begin{aligned}
 f_0(x) &= 1.482 \\
 f_1(x) &= f_0(x) - 0.705 \cdot \cos(x) + 2.240 \cdot \sin(x) \\
 f_2(x) &= f_1(x) + 4.201 \cdot \cos(2 \cdot x) + 5.514 \cdot \sin(2 \cdot x) \\
 f_3(x) &= f_2(x) - 1.679 \cdot \cos(3 \cdot x) - 1.018 \cdot \sin(3 \cdot x) \\
 f_4(x) &= f_3(x) - 0.844 \cdot \cos(4 \cdot x) - 0.301 \cdot \sin(4 \cdot x) \\
 f_5(x) &= f_4(x) - 0.652 \cdot \cos(5 \cdot x) - 0.111 \cdot \sin(5 \cdot x) \\
 f_6(x) &= f_5(x) - 0.303 \cdot \cos(6 \cdot x)
 \end{aligned}$$



Aufgabe 25.2a): Fourier-Funktion  $f(x)$  durch die ersten 12 Punkte

Näherungskurven aus dem FFT-Verfahren: für die ersten 12 Punkte:

$$f_0(x) = 1.482: \text{ (Strichstärke 1)}$$

1. Näherung:  $f_1(x) = f_0(x) - 0.705 \cdot \cos(x) + 2.240 \cdot \sin(x)$  (Strichstärke 2)
2. Näherung:  $f_2(x) = f_1(x) + 4.201 \cdot \cos(2 \cdot x) + 5.514 \cdot \sin(2 \cdot x)$  (Strichstärke 3)
3. Näherung:  $f_3(x) = f_2(x) - 1.679 \cdot \cos(3 \cdot x) - 1.018 \cdot \sin(3 \cdot x)$  (Strichstärke 4)
4. Näherung:  $f_4(x) = f_3(x) - 0.844 \cdot \cos(4 \cdot x) - 0.301 \cdot \sin(4 \cdot x)$  (Strichstärke 5)
5. Näherung:  $f_5(x) = f_4(x) - 0.652 \cdot \cos(5 \cdot x) - 0.111 \cdot \sin(5 \cdot x)$  (Strichstärke 6)

**Lösung der Aufgabe 25.2b)**

FFT: Aufgabe 25.2b)

```

> m:=6: P:=2*Pi:
>
> s0:=0: for i from 4 by 1 while i<16 do s0:=s0+y(i) od:
    a0:=1/2/m*s0;
> s0:=0: for i from 4 by 1 while i<16 do s0:=s0+y(i)*cos(2*Pi/P*i*Pi) od:
    am:=evalf(1/2/m*s0);
> for n from 1 to m-1 do s0:=0: for i from 4 by 1 while i<16 do
    s0:=s0+y(i)*cos(2*Pi/P*n/m*(i-4)*Pi) od:
    a(n):=1/m*s0 od;
> for n from 1 to m-1 do s0:=0: for i from 4 by 1 while i<16 do
    s0:=s0+y(i)*sin(2*Pi/P*n/m*(i-4)*Pi) od:
    b(n):=1/m*s0 od;

```

Es ergeben sich wegen  $m = 6$  die Koeffizienten

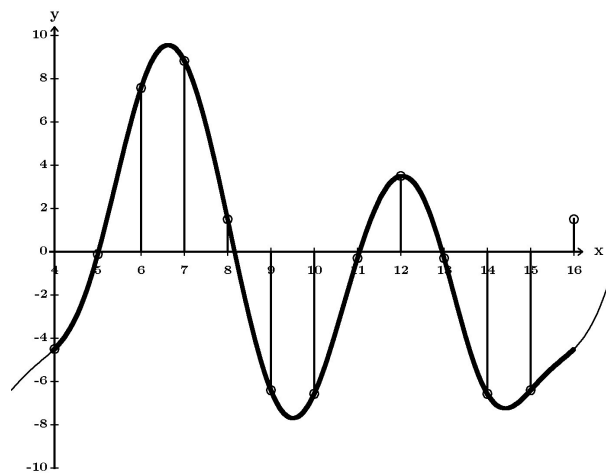
$$a_0, a_1, \dots, a_6 \quad \text{und} \quad b_1, b_2, \dots, b_5$$

|       |   |        |       |          |
|-------|---|--------|-------|----------|
| $a_0$ | = | -0.815 |       |          |
| $a_1$ | = | 0.039  | $b_1$ | = 3.288  |
| $a_2$ | = | -4.868 | $b_2$ | = 4.120  |
| $a_3$ | = | 1.012  | $b_3$ | = -1.489 |
| $a_4$ | = | 0.178  | $b_4$ | = -0.540 |
| $a_5$ | = | -0.015 | $b_5$ | = -0.217 |
| $a_6$ | = | -0.030 |       |          |

Auch hier wird angenommen, dass die Periodenlänge auch hier  $P = 2 \cdot \pi$  beträgt; daher lauten die Gleichung für die in den Bildern eingezeichneten Näherungsfunktionen:

$$\begin{aligned}
 f_0(x) &= -0.815 \\
 f_1(x) &= f_0(x) + 0.039 \cdot \cos(x) + 3.288 \cdot \sin(x) \\
 f_2(x) &= f_1(x) - 4.868 \cdot \cos(2 \cdot x) + 4.120 \cdot \sin(2 \cdot x) \\
 f_3(x) &= f_2(x) + 1.012 \cdot \cos(3 \cdot x) - 1.489 \cdot \sin(3 \cdot x) \\
 f_4(x) &= f_3(x) + 0.178 \cdot \cos(4 \cdot x) - 0.540 \cdot \sin(4 \cdot x) \\
 f_5(x) &= f_4(x) - 0.015 \cdot \cos(5 \cdot x) - 0.217 \cdot \sin(5 \cdot x) \\
 f_6(x) &= f_5(x) - 0.030 \cdot \cos(6 \cdot x)
 \end{aligned}$$

(2)



Aufgabe 25.2b): Fourier-Funktion  $f(x)$  durch die letzten 12 Punkte

$$f_0(x) = -0.815$$

$$f_1(x) = f_0(x) + 0.039 \cdot \cos(x) + 3.288 \cdot \sin(x)$$

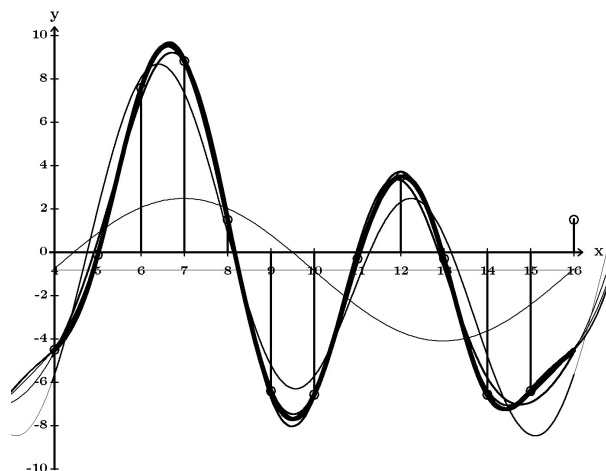
$$f_2(x) = f_1(x) - 4.868 \cdot \cos(2 \cdot x) + 4.120 \cdot \sin(2 \cdot x)$$

$$f_3(x) = f_2(x) + 1.012 \cdot \cos(3 \cdot x) - 1.489 \cdot \sin(3 \cdot x)$$

$$f_4(x) = f_3(x) + 0.178 \cdot \cos(4 \cdot x) - 0.540 \cdot \sin(4 \cdot x)$$

$$f_5(x) = f_4(x) - 0.015 \cdot \cos(5 \cdot x) - 0.217 \cdot \sin(5 \cdot x)$$

$$f_6(x) = f_5(x) - 0.030 \cdot \cos(6 \cdot x)$$



Aufgabe 25.2b): Fourier-Funktion  $f(x)$  durch die letzten 12 Punkte ( $i = 4, \dots, 15$ ) mit Näherungskurven

0. Näherung:  $f_0(x) = -0.815$  (Strichstärke 1)

1. Näherung:  $f_1(x) = f_0(x) + 0.039 \cdot \cos(x) + 3.288 \cdot \sin(x)$  (Strichstärke 2)

2. Näherung:  $f_2(x) = f_1(x) - 4.868 \cdot \cos(2 \cdot x) + 4.120 \cdot \sin(2 \cdot x)$  (Strichstärke 3)

3. Näherung:  $f_3(x) = f_2(x) + 1.012 \cdot \cos(3 \cdot x) - 1.489 \cdot \sin(3 \cdot x)$  (Strichstärke 4)

4. Näherung:  $f_4(x) = f_3(x) + 0.178 \cdot \cos(4 \cdot x) - 0.540 \cdot \sin(4 \cdot x)$  (Strichstärke 5)

5. Näherung:  $f_5(x) = f_4(x) - 0.015 \cdot \cos(5 \cdot x) - 0.217 \cdot \sin(5 \cdot x)$  (Strichstärke 6)