



27 Lineare Gleichungssysteme und Vektorrechnung

Darstellung einer Ebene (REP Seite 148)

E_1 in Parameterdarstellung und E_2 in Koordinatendarstellung:

$$E_1 = \left\{ \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei $\vec{a}$ ein Aufpunkt ist und $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zwei Vektoren in der Ebene E_1 sind.

$$E_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, u \cdot x + v \cdot y + w \cdot z = s \right\},$$

wobei (u, v, w) ein Normalenvektor der Ebene E_2

und - falls $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ ist - s der Abstand vom Nullpunkt ist.

Von Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung:

Da $\vec{b} \times \vec{c}$ als Vektorprodukt senkrecht auf $\vec{b}$ und $\vec{c}$ steht, wähle $(u, v, w) := \vec{b} \times \vec{c}$ als Normalenvektor von E .

Da $\vec{a}$ in der Ebene E liegt, muss für diesen Punkt die Koordinatendarstellung erfüllt sein, d.h. s ist bestimmt durch $u \cdot a_1 + v \cdot a_2 + w \cdot a_3 =: s$.

Von Koordinatendarstellung zu Hessescher Normalform:

In der Hesseschen Normalform ist $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. Daher schreiben wir die Gleichung für E_2 um:

$$\text{Es seien } u^* := \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, v^* := \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \text{ und } w^* := \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

$$\text{Dann ist } E_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, u^* \cdot x + v^* \cdot y + w^* \cdot z = \frac{s}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \right\},$$

und es gilt $(u^*)^2 + (v^*)^2 + (w^*)^2 = 1$,

d.h. E_2 ist in Hessescher Normalform dargestellt.

Aufgabe 27.1 (Hessesche Normalform)

Bestimmen Sie die beiden auf der Geraden $g = \{(1, 1, 1) + \lambda \cdot (2, -3, 2), \lambda \in \mathbb{R}\}$ gelegenen Punkte, die von der Ebene $E = \{(1, 1, 1) + \mu \cdot (2, 2, 3) + \nu \cdot (1, 2, 2), \mu, \nu \in \mathbb{R}\}$ den Abstand 2 haben.

Lösung von Aufgabe 27.1

Idee: Man bestimmt zunächst die beiden Parallelebenen im Abstand 2 zur Ebene E und berechnet dann die Durchstoßpunkte der Geraden g durch diese Ebenen.

$$\text{Normalenvektor der Ebene } E: \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ also } |\vec{n}| = 3.$$

Mit Hilfe dieses Vektors kann die Koordinatendarstellung der Ebene E bestimmt werden:

Es sei

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, u \cdot x + v \cdot y + w \cdot z = s\} \quad (1)$$

Darin ist (u, v, w) ein Vektor in Richtung der Normalen, also können wir setzen $(u, v, w) := \vec{n} = (-2, -1, 2)$; damit lautet die Gleichung (1)

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -2 \cdot x - y + 2 \cdot z = s\} \quad (2)$$

Da der Punkt $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ (als Aufpunkt) in der Ebene E liegt, kann auch die reelle Zahl s bestimmt werden:

$$-2 \cdot 1 - 1 + 2 \cdot 1 = s \quad \text{oder} \quad s = -1 \quad (3)$$

Damit lautet E in der Koordinatendarstellung

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -2 \cdot x - y + 2 \cdot z = -1\} \quad (4)$$

Den Abstand vom Nullpunkt erhalten wir in der Hesseschen Normalform der Gleichung (4), indem wir den Normalenvektor auf 1 normieren:

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y - \frac{2}{3} \cdot z = \frac{1}{3} \right\} \quad (5)$$

Also ist $s = \frac{1}{3}$ der Abstand der Ebene E vom Nullpunkt.

Die Parallelebenen im Abstand 2 zur Ebene E lassen sich dann beschreiben durch

$$E_{1,2} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y - \frac{2}{3} \cdot z = \frac{1}{3} \pm 2 \right\} \quad (6)$$

Für die Punkte $P(\lambda) = (1 + 2 \cdot \lambda, 1 - 3 \cdot \lambda, 1 + 2 \cdot \lambda)$ der Geraden g , die zugleich in einer der beiden Ebenen liegen, muss daher gelten

$$\frac{2}{3} \cdot (1 + 2 \cdot \lambda_{1,2} + \frac{1}{3} \cdot (1 - 3 \cdot \lambda_{1,2} - \frac{2}{3} \cdot (1 + 2 \cdot \lambda_{1,2} = \frac{1}{3} \pm 2$$

oder

$$\frac{1}{3} - \lambda_{1,2} = \frac{1}{3} \pm 2 \quad \text{oder} \quad \lambda_1 = -2 \text{ und } \lambda_2 = 2$$

Dann sind $P_1 = (-3, 7, -3)$ und $P_2 = (5, -5, 5)$ die auf der Geraden g liegenden Punkte, die von der Ebene E den Abstand 2 haben.

Aufgabe 27.2 (Abstand Punkt/Gerade, Flächeninhalt)

Auf der Geraden $g = \{(0, -4, 13) + \lambda \cdot (-1, 2, -5), \lambda \in \mathbb{R}\}$ sind zwei Punkte P_1 und P_2 gesucht, die vom Punkt $P = (11, 4, -4)$ gleich weit entfernt sind und mit dem Punkt P ein Dreieck vom Flächeninhalt $\sqrt{170}$ aufspannen.

Lösung von Aufgabe 27.2

Eigenschaften des Vektorproduktes (REP Seite 134, F+H Seite 44)

- (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ steht **senkrecht** auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$
- (2) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \left(\angle \left(\vec{a}, \vec{b} \right) \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Flächeninhalt des von } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \\ \text{aufgespannten Parallelogrammes} \end{array} \right.$
- (3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

Lotfußpunkt (REP Seite 141, F+H Seite 49)

$F = (f_1, f_2, f_3)$ sei der Fußpunkt des Lotes vom Punkt $P = (p_1, p_2, p_3)$ auf die Gerade $g := \{\vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Als Punkt der Geraden g gibt es zu F eine reelle Zahl λ_0 mit $F = \vec{a} + \lambda_0 \cdot \vec{b}$, und der „Lotvektor“ $\vec{F}P = (p_1 - f_1, p_2 - f_2, p_3 - f_3)$ steht senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{b}$ der Geraden g .

also müssen folgende Gleichungen gelten:

- (1) $f_1 = a_1 + \lambda_0 \cdot b_1$
- (2) $f_2 = a_2 + \lambda_0 \cdot b_2$
- (3) $f_3 = a_3 + \lambda_0 \cdot b_3$
- (4) $0 = (p_1 - f_1) \cdot b_1 + (p_2 - f_2) \cdot b_2 + (p_3 - f_3) \cdot b_3$

Idee: Wir bestimmen zunächst den Lotfußpunkt F des Punktes P auf die Gerade g . Zu F und einem Abstand d suchen wir dann die beiden Punkte P_1 und P_2 , die auf g liegen und von F den Abstand d haben. Schließlich bestimmen wir d so, dass der Flächeninhalt $\sqrt{170}$ beträgt.

Also lauten die vier Gleichungen hier:

$$\begin{array}{llll} (1) & f_1 & = & 0 + \lambda_0 \cdot (-1) & = & -\lambda_0 \\ (2) & f_2 & = & -4 + \lambda_0 \cdot 2 & = & -4 + 2 \cdot \lambda_0 \\ (3) & f_3 & = & 13 + \lambda_0 \cdot (-5) & = & 13 - 5 \cdot \lambda_0 \\ (4) & 0 & = & (11 - f_1) \cdot (-1) + (4 - f_2) \cdot 2 + (-4 - f_3) \cdot (-5) & = & 17 + f_1 - 2 \cdot f_2 + 5 \cdot f_3 \end{array} \quad \text{Wenn}$$

nun (1), (2) und (3) in (4) eingesetzt werden, so ergibt sich

$$0 = 17 - \lambda_0 - 2 \cdot (-4 + 2 \cdot \lambda_0) + 5 \cdot (13 - 5 \cdot \lambda_0) = 90 - \lambda_0 \cdot 30$$

und damit $\lambda_0 = 3$. Folglich sind die Koordinaten des Lotfußpunktes F bekannt:

$$F = (-3, 2, -2).$$

Als Abstand d wählen wir $d = |\lambda_1 \cdot \vec{b}|$ für ein geeignetes λ_1 . Dann können wir die Punkte P_1 und P_2 beschreiben durch

$$P_{1,2} = \vec{F} \pm \lambda_1 \cdot \vec{b} = (-3, 2, -2) \pm \lambda_1 \cdot (-1, 2, -5).$$

Der Flächeninhalt I des Dreiecks (P, P_1, P_2) berechnet sich nun als

$$I = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{P_1 P_2}| \cdot |\overrightarrow{P, F}|,$$

also hier wegen $\overrightarrow{P, F} = (f_1 - p_1, f_2 - p_2, f_3 - p_3) = (-3 - 11, 2 - 4, -2 + 4) = (14, 2, -2)$:

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \lambda_1 \cdot |(-1, 2, -5)| \cdot |(14, 2, -2)| = \lambda_1 \cdot 6 \cdot \sqrt{170}.$$

Die Bedingung $I = \sqrt{170}$ liefert $\lambda_1 = \frac{1}{6}$.

Die gesuchten Punkte sind demnach $P_1 = \left(-\frac{19}{6}, \frac{7}{3}, -\frac{17}{6}\right)$ und $P_2 = \left(-\frac{17}{6}, \frac{5}{3}, -\frac{7}{6}\right)$.

Aufgabe 27.3 (Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen)

a) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Ebene E_1 , in der die Punkte

$A = (-1, 1, 0)$, $B = (-2, 1, 1)$ und $C = (1, 2, 0)$ liegen,

und der Ebene $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y - z = 2\}$.

b) Geben Sie die Abstände der Ebenen E_1 und E_2 vom Ursprung an.

c) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2 .

Lösung von Aufgabe 27.3a)

Idee

Da der Schnittwinkel φ zwischen zwei Ebenen definiert ist als der Winkel zwischen den beiden Ebenen-Normalen $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$, und da (nach F+H Seite 49) sind zunächst die beiden Normalen $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ zu bestimmen; dann ist

$$\varphi = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \arccos \left(\frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right)$$

$$\text{Es ist } E_1 = \overrightarrow{0A} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Daher ist } \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ein Normalenvektor von } E_1.$$

$$\text{Entsprechend ist } \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ein Normalenvektor von } E_2.$$

Der von $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ eingeschlossene Winkel φ ist dann der gesuchte Schnittwinkel φ der Ebenen E_1 und E_2 .

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \implies \varphi = 30^\circ$$

Lösung von Aufgabe 27.3b)

Idee

In der Hesseschen Normalform $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, U \cdot x + V \cdot y + W \cdot z = D\}$ mit $|(U, V, W)| = 1$ ist D der Abstand vom Nullpunkt.

Dabei ist (U, V, W) ein Normalenvektor von E .

Daher sind die Ebenen E_1 und E_2 zunächst in Koordinaten-Darstellung und dann in Hessescher Normalform zu beschreiben.

Für die Ebene E_1 ist $\vec{n}_1$ ein Normalenvektor (nach Teil a)). Also darf $(U_1, V_1, W_1) = \vec{n}_1 = (-1, 2, -1)$ gesetzt werden. Da ferner $A = (-1, 1, 0)$ ein Punkt von E_1 ist, muss auch für diesen Punkt die Koordinatendarstellung von E_1 gelten, also $U_1 \cdot (-1) + V_1 \cdot 1 + W_1 \cdot 0 = (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 3$.

Folglich erhalten wir eine Koordinatendarstellung von E_1 :

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x + 2 \cdot y - z = 3\}$$

und hieraus wird durch Normierung die Hessesche Normalform

$$E_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot y - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot z = \frac{3}{\sqrt{6}} \right\}$$

Daher beträgt der Abstand D_1 der Ebene E_1 vom Ursprung $D_1 = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Entsprechend ist

$$E_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot z = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \right\}$$

die Hessesche Normalform der Ebene E_2 . Daher beträgt der Abstand D_2 der Ebene E_2 vom Ursprung $D_2 = \sqrt{2}$.

Lösung von Aufgabe 27.3c)

Die Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2 ist die Gerade g mit

$$g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x + 2 \cdot y - z = 3 \quad \text{und} \quad y - z = 2\}$$

Wir wählen z als Parameter und erhalten aus der zweiten Gleichung der Geradengleichung:

$$y = 2 + z$$

und aus der ersten Gleichung

$$x = -3 + 2 \cdot y - z = -3 + 2 \cdot (2 + z) - z = 1 + z,$$

also

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 27.4 (Projektion)

Gesucht ist eine Parameterdarstellung für die Gerade g_2 , die durch senkrechte Projektion der Geraden $g_1 = \{(6, 4, -15) + \lambda \cdot (-3, -1, 11), \lambda \in \mathbb{R}\}$ auf die Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = -3\}$ entsteht.

Lösung von Aufgabe 27.4

Idee:

- a) Bestimme den Durchstoßpunkt D der Geraden g_1 durch die Ebene E
- b) Bestimme den Lotfußpunkt F des Lotes
 - vom Aufpunkt $A = (6, 4, -15)$ der Geraden g_1
 - auf die Ebene E
- c) Bestimme die Gerade durch D und F .

a) Durchstoßpunkt D der Geraden g_1 durch E

Für die Gerade g_1 gilt $g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -15 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$

d.h. es gelten $x = 6 - 3 \cdot \lambda$, $y = 4 - \lambda$ und $z = -15 + 11 \cdot \lambda$.

Wenn ein Punkt der Geraden g_1 daher in der Ebene E liegen soll, dann muss es ein λ_0 geben mit

$$x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = -3 \quad \text{oder} \quad (6 - 3 \cdot \lambda_0) + 2 \cdot (4 - \lambda_0) + 3 \cdot (-15 + 11 \cdot \lambda_0) = -3$$

Daraus ergibt sich (als lineare Gleichung)

$$6 + 8 - 45 + \lambda_0 \cdot (-3 - 2 + 33) = -3 \quad \text{oder} \quad 28 \cdot \lambda_0 = 28,$$

also $\lambda_0 = 1$.

Auf der Geraden g_1 ergibt sich für dieses λ_0 der Punkt $D = (3, 3, -4)$.

b) Lotfußpunkt F des Lotes vom Punkt $A = (6, 4, -15)$ auf die Ebene E

Die Normalenrichtung $\vec{n}$ der Ebene E ist aus der Koordinatendarstellung der Ebenengleichung von E ablesbar:

$$\vec{n} = (1, 2, 3)$$

Das Lot l von A auf E kann daher als Gerade beschrieben werden in der Form

$$l = \{ A + \mu \cdot \vec{n}, \mu \in \mathbb{R} \} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -15 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wenn ein Punkt dieses Lotes auf $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = -3\}$ liegen soll, dann muss daher für ein geeignetes μ_0 gelten

$$(6 + \mu_0) + 2 \cdot (4 + \mu_0 \cdot 2) + 3 \cdot (-15 + \mu_0 \cdot 3) = -3 \quad \text{oder} \quad 6 + 8 - 45 + \mu_0 \cdot (1 + 4 + 9) = -3,$$

also $\mu_0 = 2$.

Auf der Geraden l ergibt sich für dieses μ_0 der Punkt $F = (8, 8, -9)$.

c) Gerade g_2 durch $D = (3, 3, -4)$ und $F = (8, 8, -9)$

Es ist

$$g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}; \nu \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 27.5 (Spatvolumen)

Drei der sechs Begrenzungsflächen eines Spates seien gegeben durch die Gleichungen

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2 \cdot x - z = 0\},$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 4 \cdot x + 5 \cdot y - 2 \cdot z = 0\}$$

$$\text{und } E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 13 \cdot x + 10 \cdot y + 6 \cdot z = 0\}.$$

Wie groß ist das Volumen des Spates, wenn seine Kanten die Länge 1 haben?

Lösung von Aufgabe 27.5

Idee: Das Volumen eines Spates wird durch das Spatprodukt beschrieben. Dazu werden die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ benötigt, die den Spat aufspannen. Da nach Aufgabenstellung die Kantenlänge 1 sein soll, sind jeweils die Längen dieser drei Vektoren auf 1 zu normieren und dann ist das Spatprodukt zu bilden.

Erster Weg: E_1 , E_2 und E_3 sind in Koordinatenschreibweise (REP Seite 148) beschrieben, aus der jeweils direkt die Normalenrichtung abgelesen werden kann:

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}, \text{ also Normalenrichtung } \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}, \text{ also Normalenrichtung } \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}, \text{ also Normalenrichtung } \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Wenn zwei Ebenen E_1 und E_2 eine Schnittgerade besitzen, dann liegt diese Gerade sowohl in der Ebene E_1 (und steht damit senkrecht auf $\vec{n}_1$) als auch in der Ebene E_2 (und steht damit senkrecht auf $\vec{n}_2$). Also gilt:

Das Vektorprodukt aus den Normalenrichtungen der beiden Ebenen zeigt in Richtung der Schnittgeraden.

Hier ist dann

- die Richtung $\vec{a}$ der Schnittgeraden $E_1 \cap E_2$ gegeben durch

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (5, 0, 10) = 5 \cdot (1, 0, 2);$$

folglich lautet der Einheitsvektor in der Richtung von $\vec{a}$

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (1, 0, 2).$$

- die Richtung $\vec{b}$ der Schnittgeraden $E_1 \cap E_3$ gegeben durch

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_3 = (10, -25, 20) = 5 \cdot (2, -5, 4);$$

folglich lautet der Einheitsvektor in der Richtung von $\vec{b}$

$$\vec{b}^0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{5}} \cdot (2, -5, 4).$$

- die Richtung $\vec{c}$ der Schnittgeraden $E_2 \cap E_3$ gegeben durch

$$\vec{a} = \vec{n}_2 \times \vec{n}_3 = (50, -50, -25) = 25 \cdot (2, -2, -1);$$

folglich lautet der Einheitsvektor in der Richtung von $\vec{c}$

$$\vec{c}^0 = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{1}{3} \cdot (2, -2, -1).$$

Der Spat wird aufgespannt von drei Einheitsvektoren $\vec{a}^0$, $\vec{b}^0$ und $\vec{c}^0$, also ist das Spatprodukt

$$\langle \vec{a}^0, \vec{b}^0, \vec{c}^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt{5}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{45} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}.$$

Das Volumen des Spates ist also $|\langle \vec{a}^0, \vec{b}^0, \vec{c}^0 \rangle| = \frac{5}{9}$.

Zweiter Weg: Nach REP (Seite 155) kann auch aus den Koordinatendarstellungen von E_1 und E_2 direkt die Schnittgerade bestimmt werden:

$$2 \cdot x - z = 0 \quad (\text{E1})$$

$$4 \cdot x + 5 \cdot y - 2 \cdot z = 0 \quad (\text{E2})$$

Es wird eine der drei Variablen x , y und z als Parameter gewählt, hier z.B.

$$t := z$$

Nach (E1) ist dann $x = \frac{1}{2} \cdot t$ und

nach (E2) ist damit $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot t + 5 \cdot y - 2 \cdot t = 0$, also $y = 0$.

Dann lautet also die Gleichung der Schnittgeraden

$$g_{1,2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Folglich lautet der Einheitsvektor in der Richtung von $\vec{a}$

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (1, 0, 2).$$

Entsprechend kann aus den Koordinatendarstellungen von E_1 und E_3 direkt die Schnittgerade bestimmt werden:

$$13 \cdot x + 10 \cdot y + 6 \cdot z = 0 \quad (\text{E3})$$

Es wird eine der drei Variablen x , y und z als Parameter gewählt, hier z.B. wieder

$$t := z$$

Nach (E1) ist dann $x = \frac{1}{2} \cdot t$, und

nach (E3) ist damit $13 \cdot \frac{1}{2} \cdot t + 10 \cdot y + 6 \cdot t = 0$, also

$$10 \cdot y = -\frac{25}{2} \cdot t \text{ oder } y = -\frac{25}{20} \cdot t = -\frac{5}{4} \cdot t.$$

Dann lautet also die Gleichung der Schnittgeraden

$$g_{1,3} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

folglich lautet der Einheitsvektor in der Richtung von $\vec{b}$

$$\vec{b}^0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{5}} \cdot (2, -5, 4).$$

Entsprechend kann aus den Koordinatendarstellungen von E_2 und E_3 direkt die Schnittgerade bestimmt werden:

Nach (E2) ist dann $4 \cdot x + 5 \cdot y - 2 \cdot z = 0$, und

und nach (E3) ist $13 \cdot x + 10 \cdot y + 6 \cdot z = 0$, also

1	x	y	z	r.S.	Σ	Regie
2	4	5	-2	0	7	3
3	13	10	6	0	29	1
4	25	25	0	0	50	

Nach Zeile 4 ist $25 \cdot x + 25 \cdot y = 0$, also $x = -y$

Und nach Zeile 1 ist damit $4 \cdot (-y) + 5 \cdot y - 2 \cdot z = 0$,

also $2 \cdot z = y$.

Es wird wieder eine der drei Variablen x , y und z als Parameter gewählt, hier z.B. wieder

$$t := z$$

Dann ist $y = 2 \cdot t$ und $x = -2 \cdot t$, also lautet also die Gleichung der Schnittgeraden

$$g_{2,3} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Folglich lautet der Einheitsvektor in der Richtung von $\vec{c}$

$$\vec{c^0} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{1}{3} \cdot (-2, 2, 1).$$

Wie im ersten Weg ergibt sich daraus das Volumen des Spates.

Aufgabe 27.6 (Windschiefe Geraden)

Gegeben seien die Geraden

$$g_1 = \{(1, 1, 1) + \lambda \cdot (1, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ und}$$

$$g_2 = \{(4, 1, 1) + \mu \cdot (0, 1, 1), \mu \in \mathbb{R}\}.$$

a) Zeigen Sie, dass g_1 und g_2 windschief zueinander sind.

b) Bestimmen Sie die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen g_1 und g_2 und berechnen Sie die Koordinaten der Endpunkte P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2 .

c) Berechnen Sie den Abstand zwischen g_1 und g_2 .

Lösung von Aufgabe 27.6a)

Es gibt keinen Schnittpunkt, und die beiden Geraden sind nicht parallel.

Lösung von Aufgabe 27.6b)

Standard-Idee:

Es werden folgende Eigenschaften in lineare Gleichungen umgeschrieben:

$$1. P_1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ liegt auf } g_1, \text{ d.h. es gibt ein } \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ mit } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2. P_2 := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ liegt auf } g_2, \text{ d.h. es gibt ein } \mu_0 \in \mathbb{R} \text{ mit } \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \overrightarrow{P_1 P_2} \perp g_1, \text{ also } \begin{pmatrix} 3 - \lambda_0 \\ \mu_0 \\ \mu_0 - \lambda_0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$4. \overrightarrow{P_1 P_2} \perp g_2, \text{ also } \begin{pmatrix} 3 - \lambda_0 \\ \mu_0 \\ \mu_0 - \lambda_0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Dann ergeben sich 8 Gleichungen in 8 Unbekannten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \lambda_0, \mu_0$. Lösung dieses LGS ergibt $P_1 = (3, 1, 3)$ und $P_2 = (4, 2, 2)$.

kürzerer Weg

Es sei $\vec{v}$ der Vektor von P_1 nach P_2 .

$$\text{Dann ist } (1, 1, 1) + \lambda_0 \cdot (1, 0, 1) + \vec{v} = (4, 1, 1) + \mu_0 \cdot (0, 1, 1),$$

$$\text{also } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = (3, 0, 0) - \lambda_0 \cdot (1, 0, 1) + \mu_0 \cdot (0, 1, 1),$$

und es gilt $\vec{v} \perp (1, 0, 1)$ und $\vec{v} \perp (0, 1, 1)$.

Folglich muss auch gelten

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda_0 \\ \mu_0 \\ -\lambda_0 + \mu_0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 \cdot \lambda_0 + \mu_0 = 0$$

$$\text{und } \begin{pmatrix} 3 - \lambda_0 \\ \mu_0 \\ -\lambda_0 + \mu_0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda_0 + 2 \cdot \mu_0 = 0$$

und damit $\mu_0 = 1$ und $\lambda_0 = 2$.

Also $P_1 = (3, 1, 3)$ und $P_2 = (4, 2, 2)$.

Lösung von Aufgabe 27.6c): $|P_1 - P_2| = \sqrt{3}$.

Aufgabe 27.7 (Lotfußpunkt)

Gegeben seien die Ebene

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2 \cdot x - y + 2 \cdot z = 6\}$$

und der Punkt $P = (2, -2, 3)$.

27.7a) Geben Sie die Hessesche Normalform an für die Ebene E .

27.7b) Bestimmen Sie die Abstand von P zu E .

27.7c) Berechnen Sie den Lotfußpunkt P_E von P auf E .

Aufgabe 27.8 (Schwerpunkt)

27.8a) Zeigen Sie, dass sich die Seitenhalbierenden des von den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks im Endpunkt des Ortsvektors

$$\frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

schneiden (dies ist der geometrische Schwerpunkt des Dreiecks).

27.8b) Es sei ein Tetraeder mit den vier Ecken O , A , B und C gegeben.

Wenn

- O mit dem Schwerpunkt $S_{A,B,C}$ des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ und

- A mit dem Schwerpunkt $S_{O,B,C}$ des Dreiecks $\Delta(O, B, C)$

verbunden wird, dann schneiden sich diese beiden Verbindungsgeraden in dem Schwerpunkt des Tetraeders.

Bestimmen Sie diesen Punkt.

Lösung von Aufgabe 27.8a)

Trick: Anwendung der Eigenschaften linearer Unabhängigkeit (F+H Seite 50)
Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen **linear unabhängig**, wenn aus einer Linearkombination (mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$$\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{folgt} \quad \alpha = 0 \text{ und } \beta = 0$$

(sonst heißen sie **linear abhängig**)

Eigenschaften:

- (1) Wenn zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind, dann sind sie nicht parallel.
- (2) Ein **echtes** Dreieck wird durch zwei linear unabhängige Vektoren aufgespannt.
- (3) Ein **echtes** Tetraeder wird durch drei linear unabhängige Vektoren aufgespannt.

Wir betrachten das Dreieck mit den Eckpunkten O , A und B

und den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.

S sei der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

Dann kann man den Vektor $\overrightarrow{OS}$ auf verschiedene Weisen beschreiben:

- direkt von O zu S : es gibt eine reelle Zahl μ mit $\overrightarrow{OS} = \mu \cdot \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \right)$ (*)
- von O über A zu S : es gibt eine reelle Zahl λ mit $\overrightarrow{OS} = \vec{a} + \lambda \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \vec{b} - \vec{a} \right)$ (**)

Setzen wir diese beiden Gleichungen gleich, so entsteht

$$\mu \cdot \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \right) = \vec{a} + \lambda \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \vec{b} - \vec{a} \right)$$

oder

$$\vec{a} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \mu - 1 + \lambda \right) + \vec{b} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \mu - \frac{1}{2} \cdot \lambda \right) = 0$$

Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, gilt also

$$\frac{1}{2} \cdot \mu - 1 + \lambda = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \cdot \mu - \frac{1}{2} \cdot \lambda = 0$$

oder $\lambda = \mu$ und damit $\boxed{\mu = \frac{2}{3}}$.

Nach (*) also

$$\overrightarrow{OS} = \frac{2}{3} \cdot \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \right) = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

Lösung von Aufgabe 27.8b)

(A) Wir verbinden O mit dem Schwerpunkt $S_{A,B,C}$ des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$:

Es seien $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Dann gilt:

- das Dreieck $\Delta(A, B, C)$ wird aufgespannt von den Vektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{c} - \vec{a}$ und folglich hat der Schwerpunkt $S_{A,B,C}$ die Koordinaten

$$S_{A,B,C} = \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot ((\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{a})) = \frac{1}{3} \cdot (\vec{b} + \vec{c} + \vec{a})$$

- die Verbindungsgerade $g_{A,B,C}$ von O mit dem Schwerpunkt $S_{A,B,C} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{b} + \vec{c} + \vec{a})$ hat die Gleichung

$$g_{A,B,C} = \left\{ \lambda \cdot (\vec{b} + \vec{c} + \vec{a}) ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(B) Wir verbinden A mit dem Schwerpunkt $S_{O,B,C}$ des Dreiecks $\Delta(O, B, C)$:

Dann gilt:

- das Dreieck $\Delta(O, B, C)$ wird aufgespannt von den Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ und folglich hat der Schwerpunkt die Koordinaten

$$S_{O,B,C} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$$

- die Verbindungsgerade $g_{O,B,C}$ von A mit dem Schwerpunkt $S_{O,B,C} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ hat die Gleichung

$$g_{O,B,C} = \left\{ \vec{a} + \mu \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} \right) ; \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Diese beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt S , wenn es $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ und $\mu_0 \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\overrightarrow{OS} = \lambda_0 \cdot (\vec{b} + \vec{c} + \vec{a}) = \vec{a} + \mu_0 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} \right)$$

oder

$$\vec{a} \cdot (\lambda_0 - 1 + \mu_0) + \vec{b} \cdot \left(\lambda_0 - \frac{1}{3} \cdot \mu_0 \right) + \vec{c} \cdot \left(\lambda_0 - \frac{1}{3} \cdot \mu_0 \right) = 0$$

daraus ergibt sich wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

$$3 \cdot \lambda_0 = \mu_0 \quad \text{und} \quad \lambda_0 = \frac{1}{4}$$

und damit

$$\boxed{\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}$$