



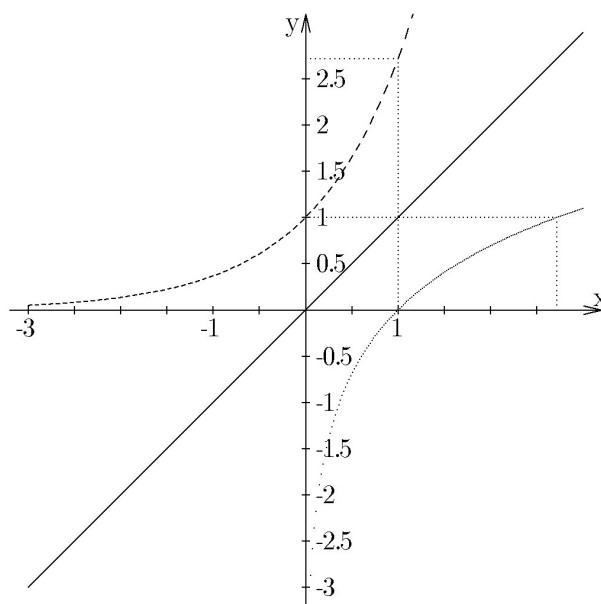
3 Logarithmen und Exponentialfunktion

Aufgabe 3.1:

Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen

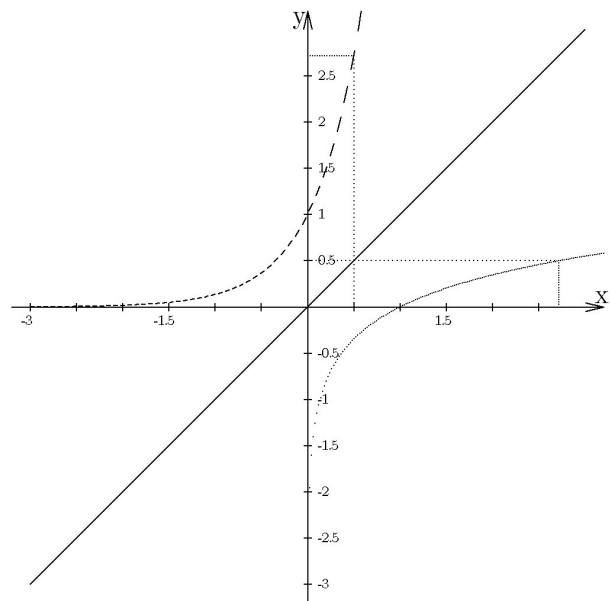
- a) $y = x$, $y = e^x$ für $-3 < x < 3$, $y = \ln(x)$ für $0 < x < 3$
 b) $y = x$, $y = e^{2 \cdot x}$ für $-3 < x < 3$, $y = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$ für $0 < x < 3$
 c) $y = x$, $y = e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ für $-3 < x < 3$, $y = 2 \cdot \ln(x)$ für $0 < x < 3$
 d) $y = 5 \cdot e^{-x^2}$ und $y = 5 \cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$ für $-3 < x < 3$.

Lösung 3.1



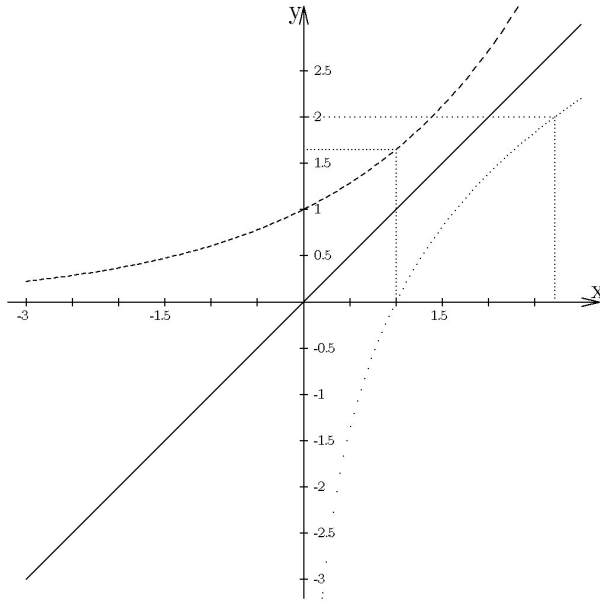
Aufgabe 3.1a)

- $y = x$ (ausgezogen)
 $y = e^x$ (gestrichelt)
 $y = \ln(x)$ (gepunktet)



Aufgabe 3.1b)

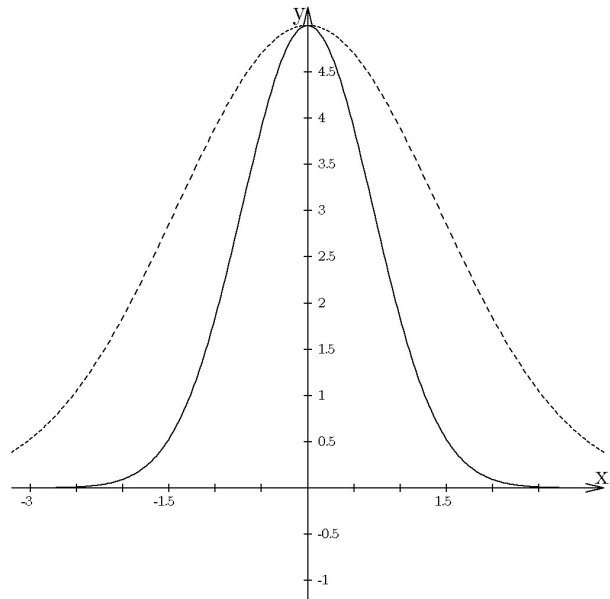
- $y = x$ (ausgezogen)
 $y = e^{2 \cdot x}$ (gestrichelt)
 $y = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$ (gepunktet)

**Aufgabe 3.1c)**

$y = x$ (ausgezogen)

$y = e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ (gestrichelt)

$y = 2 \cdot \ln(x)$ (gepunktet)

**Aufgabe 3.1d)**

$y = 5 \cdot e^{-x^2}$ (ausgezogen)

$y = 5 \cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$ (gestrichelt)

Zur Definition des Logarithmus: $b^{\log_b(c)} = c$ Da $10^2 = 100$ ist, gilt $\log_{10}(100) = 2$ Da $e^1 = e$ ist, gilt $\ln(e) := \log_e(e) = 1$ **Aufgabe 3.2:**Berechnen Sie die Lösungen x ohne Taschenrechner:

a) $x = \log_3(81)$

b) $x = \log_2\left(\frac{1}{4}\right)$

c) $x = \log_4(2) + \log_4(8)$

d) $x = \log_2(\sqrt[3]{16})$

e) $x = (e^{-2})^{(\ln(9) - \ln(4))}$

f) $x = \log_{(e^2)}(e^{10})$

g) $\log_x(2) = -\frac{1}{2}$

h) $\log_8\left(4^{(x^{-1/3})}\right) = \frac{1}{3}$

j) $16^x = 2^{(x^2)}$

Lösung 3.2: (REP 3.7: Exponential- und Logarithmusfunktion)

a) $x = \log_3(81) \Leftrightarrow 3^x = 81 \Rightarrow x = 4$

b) $x = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -2$

c) $x = \log_4(2) + \log_4(8)$. Aufteilung $x =: y + z$ mit $y = \log_4(2)$ und $z = \log_4(8)$

$\Leftrightarrow 4^y = 2 \text{ und } 4^z = 8 \Rightarrow (4^y) \cdot (4^z) = 2 \cdot 8 \Rightarrow 4^{(y+z)} = 16$

$\Rightarrow x = y + z = 2$

d) $x = \log_2(\sqrt[3]{16}) \Leftrightarrow 2^x = \sqrt[3]{16} \Leftrightarrow (2^x)^3 = 16 \Leftrightarrow 2^{(3 \cdot x)} = 16 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

e) $x = (e^{-2})^{(\ln(9) - \ln(4))} = e^{(-2 \cdot \ln(9) + 2 \cdot \ln(4))} = e^{\ln(9^{-2}) + \ln(4^2)} = e^{\ln(9^{-2})} \cdot e^{\ln(4^2)} = \frac{1}{81} \cdot 16 = \frac{16}{81}$

f) $x = \log_{(e^2)}(e^{10}) \Leftrightarrow (e^2)^x = e^{10} \Leftrightarrow e^{(2 \cdot x)} = e^{10} \Rightarrow x = 5$

g) $\log_x(2) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^{(-\frac{1}{2})} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

h) $\log_8\left(4^{(x^{-1/3})}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 8^{(\frac{1}{3})} = 4^{(x^{-1/3})} \Leftrightarrow (2^3)^{(\frac{1}{3})} = (2^2)^{(x^{-1/3})}$

$\Leftrightarrow 2^1 = 2^{(2 \cdot x^{-1/3})} \Rightarrow 1 = 2 \cdot x^{-1/3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2$

$\Rightarrow x = 8.$

j) $16^x = 2^{(x^2)} \Leftrightarrow 2^{(4 \cdot x)} = 2^{(x^2)} \Leftrightarrow 4 \cdot x = x^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = 4$

Aufgabe 3.3 und 3.4: Anwendungen logarithmischer Rechnung

(REP 3.7: Exponential- und Logarithmusfunktion)

3.3 Radioaktiver Zerfall:

Ist $N(0)$ die Anzahl der Atome zur Startzeit $t = 0$, so beschreibt die „Zerfallskonstante“ $k > 0$ die Anzahl $N(t)$ der Atome zum Zeitpunkt t durch das „Zerfallsgesetz“

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-k \cdot t}$$

Die „Halbwertszeit“ $t_{1/2}$ ist darin die Zeit mit $N(t_{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot N(0)$

3.3a) Wie groß ist die Halbwertszeit $t_{1/2}$ in Abhängigkeit von k ?

3.3b) Beim Zerfall von Plutonium seien nach $t = 100$ Jahren noch 99,7 Prozent aller Atome intakt. Wie groß ist die Zerfallskonstante k ? Wieviel Prozent der Plutoniumatome sind nach 10 000 Jahren zerfallen ?

Lösung 3.3:

3.3a) Aus der Forderung $\frac{1}{2} = \frac{N(t_{1/2})}{N(0)} = e^{-k \cdot T}$ erhält man $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -k \cdot t_{1/2}$, also $-\ln(2) = -k \cdot t_{1/2}$ und daraus

$$t_{1/2} = \frac{1}{k} \cdot \ln(2) \quad (\text{Halbwertszeit})$$

.

Lösung 3.3b) Werden die angegebenen Daten in die Formel für den radioaktiven Zerfall eingesetzt, so ergibt sich $0.997 = \frac{N(100)}{N(0)} = e^{-100 \cdot k}$.

Hieraus folgt für die Zerfallskonstante k :

$$k = -\frac{\ln(0.997)}{100} = 3.0045 \cdot 10^{-5}$$

Nach 10000 Jahren beträgt der Anteil der noch nicht zerfallenen Atome also

$$\frac{N(10\,000)}{N(0)} = e^{-10\,000 \cdot k} = e^{-0.30045} = 0.74048 = 74.048\%$$

Gefragt war nach dem Prozentsatz der *zerfallenen* Atome: das sind offenbar die restlichen 25.952 % .

3.4 Verknüpfungen von Schallpegeln

Summe von n gleichzeitig auftretenden Schallpegeln:

Die Summe $\bigoplus_{i=1}^n L_i$ von n Schallpegeln L_i (mit $1 \leq i \leq n$) ist definiert durch

$$\bigoplus_{i=1}^n L_i := 10 \cdot \log_{10} \left(\sum_{i=1}^n 10^{0.1 \cdot L_i} \right)$$

Mittelwert von n Schallpegeln:

Der Mittelwert $\bigodot_{i=1}^n L_i$ von n Schallpegeln L_i (mit $1 \leq i \leq n$) wird definiert durch

$$\bigodot_{i=1}^n L_i := 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 10^{0.1 \cdot L_i} \right)$$

Mittelung von n zeitlich hintereinander auftretenden Schallpegeln:

Der Mittelwert $\bigotimes_{i=1}^n (L_i, \Delta \tau_i)$ von n Schallpegeln $L_1, L_2, \dots, L_n$, von denen

- der Pegel L_i zur Zeit t_{i-1} beginnt und zur Zeit t_i mit $t_i > t_{i-1}$ endet (für $1 \leq i \leq n$)

ist definiert durch

$$\bigotimes_{i=1}^n (L_i, \tau_i) := 10 \cdot \log_{10} \left[\frac{1}{t_n - t_0} \cdot \sum_{i=1}^n (\tau_i \cdot 10^{0.1 \cdot L_i}) \right]$$

mit $\tau_i := t_i - t_{i-1}$ ^{a)}.

^{a)} Bemerkung: Nach heutigem deutschem Recht werden sämtlicher Schallpegel einer Nacht (d.h. sowohl Vorbeifahrpegel als auch Ruhepegel) addiert. Die zeitliche Verteilung der Vorbeifahrpegel wird nicht berücksichtigt, d.h. es gilt

$$(L_1, \tau_1) \bigotimes (L_2, \tau_2) = (L_2, \tau_2) \bigotimes (L_1, \tau_1)$$

(So wird nicht berücksichtigt, ob ein lauter Pegel um 22:10 Uhr oder um 03:30 Uhr auftritt.)

Ist es sinnvoll, Lärm und Ruhe zu addieren? Gestört wird ein Mensch nicht durch einen Mittelwert aus Lärm und Ruhe, sondern nur durch den Lärm selbst. Wenn aber jemand Lärm verursacht, dann ist er interessiert daran, wegen des von ihm verursachten Lärms nicht verurteilt zu werden - und deshalb wird er argumentieren, dass der von ihm verursachte Lärm nicht kontinuierlich wirkt, sondern dass „Lärmpausen“ entstehen. Und gern würde der Lärm-Verursacher seinen Lärm nicht durch den Einzelpegel, sondern durch den Mittelwert aus seinem Lärm und den Lärmpausen beschreiben: Je länger diese Lärmpausen sind, desto geringer ist der Mittelungspegel.

Daher wird auch in Gesetzen bei Industrie- und Verkehrslärm nicht der Einzelpegel, sondern der über die Zeit gemittelte Pegel aus Lärm und Ruhe als Grenzwert formuliert. Bei Verkehrslärm führt diese Formulierung von Grenzwerten insbesondere bei Schienen- und Flugverkehrslärm zu den im folgenden formulierten Problemen.

Aufgabe 3.4a)

Es seien $L_1 = 60 \text{ dB}(A)$ und $L_2 = 80 \text{ dB}(A)$ Schallpegel. Berechnen Sie die Summe $L_1 \oplus L_2$ sowie den Mittelwert $L_1 \odot L_2$.

Lösung 3.4a) Es ist die „Summe“ $L_1 \oplus L_2$ der beiden Schallpegel $L_1 = 60 \text{ dB}(A)$ und $L_2 = 80 \text{ dB}(A)$ definiert durch

$$L_1 \oplus L_2 = \bigoplus_{i=1}^2 L_i = 10 \cdot \log_{10} (10^6 + 10^8) = 80.04 \text{ dB}(A)$$

Der „Mittelwert“ $L_1 \odot L_2$ dieser beiden Schallpegel beträgt

$$L_1 \odot L_2 = \bigodot_{i=1}^2 L_i = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{2} \cdot (10^6 + 10^8) \right) = 77.03 \text{ dB}(A)$$

Aufgabe 3.4b)

Der Mittelwert der Musik einer Disco soll während der Tageszeit (von 06:00 bis 22:00 Uhr) den Grenzwert von $60 \text{ dB}(A)$ nicht überschreiten. In der Disco soll aber nur in der Zeit von 21:00 bis 22:00 Uhr Musik gemacht werden. Wie laut darf diese Musik (maximal) sein, wenn in der restlichen Zeit „Ruhe“ herrscht? (Runden Sie diese maximale Lautstärke auf eine natürliche Zahl $L_{\max}$ ab.)

Lösung 3.4b) Die maximale Lautstärke der Disco während der Zeit von 21:00 bis 22:00 Uhr sei $L_{\max}$, die Lautstärke während der Zeit von 06:00 bis 21:00 Uhr sei $L_{\min}$. Dann ist der Tagesmittelwert

$$\bigotimes_{i=1}^2 (L_i, \tau_i) = (L_{\min}, 15 \text{ h}) \bigotimes (L_{\max}, 1 \text{ h}) = 10 \cdot \log_{10} \left[\frac{1}{16} \cdot (15 \cdot 10^{0.1 \cdot L_{\min}} + 1 \cdot 10^{0.1 \cdot L_{\max}}) \right]$$

und es soll gelten

$$(L_{\min}, 15 \text{ h}) \bigotimes (L_{\max}, 1 \text{ h}) \leq 60 \text{ dB}(A) \quad (3.4.1)$$

also

$$10 \cdot \log_{10} \left[\frac{1}{16} \cdot (15 \cdot 10^{0.1 \cdot L_{\min}} + 1 \cdot 10^{0.1 \cdot L_{\max}}) \right] \leq 60$$

oder

$$\log_{10} \left[\frac{1}{16} \cdot (15 \cdot 10^{0.1 \cdot L_{\min}} + 1 \cdot 10^{0.1 \cdot L_{\max}}) \right] < 6$$

oder

$$\frac{1}{16} \cdot (15 \cdot 10^{0.1 \cdot L_{\min}} + 1 \cdot 10^{0.1 \cdot L_{\max}}) < 10^6$$

oder

$$15 \cdot 10^{0.1 \cdot L_{\min}} + 1 \cdot 10^{0.1 \cdot L_{\max}} < 16 \cdot 10^6$$

oder

$$10^{0.1 \cdot L_{\max}} < 16 \cdot 10^6 - 15 \cdot 10^{0.1 \cdot L_{\min}}$$

oder

$$0.1 \cdot L_{\max} < \log_{10} [16 \cdot 10^6 - 15 \cdot 10^{0.1 \cdot L_{\min}}]$$

oder

$$L_{\max} < 10 \cdot \log_{10} [16 \cdot 10^6 - 15 \cdot 10^{0.1 \cdot L_{\min}}]$$

Zunächst sei $L_{\min} = 0$. Dann lautet (wegen $10^0 = 1$) für $L_{\max}$ die Bedingung

$$L_{\max} < 10 \cdot \log_{10} [16 \cdot 10^6 - 15] \approx 72$$

Also darf die Discomusik (im Stundenmittel) maximal $L_{\max} = 72 \text{ dB}(A)$ betragen, wenn $L_{\min} = 0$ ist.

Auch wenn $L_{\min} = 50$ ist, darf die Discomusik noch maximal $L_{\max} = 72 \text{ dB}(A)$ betragen.

Wenn $L_{\min} \leq 55$ ist, darf die Discomusik noch maximal $L_{\max} = 71 \text{ dB}(A)$ betragen.

Wenn $L_{\min} = 56$ ist, darf die Discomusik noch maximal $L_{\max} = 70 \text{ dB}(A)$ betragen.

Aufgabe 3.4c)

Wie „laut“ darf der mittlere Pegel der Musik aus der *Aufgabe 3.4b*) in der restlichen Zeit (von 06:00 bis 21:00 Uhr) sein, wenn der mittlere Pegel von 21:00 bis 22:00 Uhr $70 \text{ dB}(A)$ beträgt und der Tagespegel als Mittelungspegel über die 16 Tagesstunden maximal $60 \text{ dB}(A)$ erreichen darf?

Lösung 3.4c) In der Zeit von 21:00 bis 22:00 Uhr beträgt die Lautstärke der Discomusik $L_{\max} - 2 = 70 \text{ dB}(A)$ (nach *Lösung 3.4b*)), und während der restlichen Zeit (von 06:00 bis 21:00 Uhr) beträgt die Lautstärke $L_{\min}$. Es wird nach der maximal möglichen Lautstärke $L_{\min}$ gesucht, nach (3.4) also nach der grössten Zahl $L_{\min}$ mit

$$(L_{\min}, 15 h) \otimes (70, 1 h) \leq 60 \text{ dB}(A)$$

Zur Berechnung der maximalen Lautstärke $L_{\min}$ der Discomusik in der restlichen Zeit (also während 15 Stunden von 06:00 bis 21:00 Uhr) wird folgendes Programm geschrieben:

Gesucht ist eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ($n > 0$) mit $(n, 15 h) \otimes (70, 1 h) \leq 60$

oder

$$10 \cdot \log_{10} \left[\frac{1}{16} \cdot (15 \cdot 10^{0.1 \cdot n} + 10^7) \right] \leq 60,$$

```
FOR n = 1 TO 70
y = 10 * LOG( 1 / 16 * ( 15 * 10^(.1*n) + 1 * 10^7 ) ) / LOG(10)
IF y <= 60 THEN PRINT "L_{min}="; n; " dB(A) : bei diesem Pegel
IF y <= 60 THEN PRINT "    ist der Mittelungspegel = ";y;" , also <= 60 dB(A)"
NEXT n
```

Dann ergibt sich: $L_{\min} = 56 \text{ dB}(A)$.

Zur Kontrolle: Es ist

$$(L_{\min}, 15 h) \otimes (L_{\max}, 1 h) = 10 \cdot \log_{10} \left[\frac{1}{16} \cdot (15 \cdot 10^{0.1 \cdot 56} + 1 \cdot 10^{0.1 \cdot 70}) \right] < 60 \text{ dB}(A)$$

Darstellung der energetischen Mittelung

Es wird eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht, die jedem Pegel $L \in \mathbb{R}$ einen x -Wert $x = f(L)$ zuordnet, so dass gilt:

1. Der x -Wert $f(L_3)$ des energetischen Mittels $L_3 := L_1 \odot L_2$ der beiden Pegel L_1 und L_2 liegt genau in der Mitte zwischen den x -Werten $f(L_1)$ und $f(L_2)$, d.h.

$$f(L_3) = f(L_1 \odot L_2) = \frac{1}{2} \cdot (f(L_1) + f(L_2)) \quad (3.4.2)$$

Dazu zeigen wir:

Wenn f definiert wird durch

$$f(x) = a + b \cdot 10^{0.1 \cdot x}$$

wobei a und b reelle Zahlen sind, dann gilt die Gleichung (3.4.2).

Es ist nach Definition von $\odot$:

$$L_3 = L_1 \odot L_2 = 10 \cdot \log_{10} \left[\frac{1}{2} \cdot (10^{0.1 \cdot L_1} + 10^{0.1 \cdot L_2}) \right]$$

und damit

$$\begin{aligned} f(L_3) &= a + b \cdot 10^{0.1 \cdot \{10 \cdot \log_{10} [\frac{1}{2} \cdot (10^{0.1 \cdot L_1} + 10^{0.1 \cdot L_2})]\}} \\ &= a + b \cdot 10^{\log_{10} [\frac{1}{2} \cdot (10^{0.1 \cdot L_1} + 10^{0.1 \cdot L_2})]} = a + b \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (10^{0.1 \cdot L_1} + 10^{0.1 \cdot L_2}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot a + b \cdot [10^{0.1 \cdot L_1} + 10^{0.1 \cdot L_2}]) = \frac{1}{2} \cdot (a + b \cdot [10^{0.1 \cdot L_1}] + a + b \cdot [10^{0.1 \cdot L_2}]) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (f(L_1) + f(L_2)) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.4d)

Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, für die gilt:

- (i) $f(60) = 2$, d.h. einem Pegel $L_1 = 60 \text{ dB(A)}$ soll der x -Wert $x = 2$ auf der x -Achse zugeordnet werden.
- (ii) $f(80) = 4$, d.h. einem Pegel $L_2 = 80 \text{ dB(A)}$ soll der x -Wert $x = 4$ auf der x -Achse zugeordnet werden.
- (iii) $f(60 \odot 80) = 3$, d.h. dem Pegel $L_1 \odot L_2$ soll der Mittelpunkt $x = 3$ zwischen den x -Werten $x = 2$ und $x = 4$ auf der x -Achse zugeordnet werden.

Berechnen Sie mit dieser Funktion den x -Wert des Pegels $L_3 = 70 \text{ dB(A)}$.

Hinweis: Verwenden Sie eine Funktion der Form

$$f(x) = a + b \cdot 10^{0.1 \cdot x}$$

und bestimmen Sie für diese Funktion $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$, so dass die obigen Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind.

Lösung 3.4d) Nach (i) und (ii) sollen a und b so bestimmt werden, dass gilt:

$$2 = f(60) = a + b \cdot 10^{0.1 \cdot 60} = a + b \cdot 10^6 \quad (1)$$

$$4 = f(80) = a + b \cdot 10^{0.1 \cdot 80} = a + b \cdot 10^8 \quad (2)$$

$$2 = 4 - 2 = b \cdot (10^8 - 10^6) \Rightarrow b = \frac{2}{10^8 - 10^6} \approx 0.000\,000\,02 = 2 \cdot 10^{-8} \quad (3)$$

Wenn der Wert von b aus Gleichung (3) in die Gleichung (1) eingesetzt wird, ergibt sich für a :

$$a = 2 - b \cdot 10^6 = 2 - \frac{2}{10^8 - 10^6} \cdot 10^6 \approx 1.9798 \quad (4)$$

Nach Definition von $\odot$ ist

$$\begin{aligned} f(60 \odot 80) &= f\left(10 \cdot \log_{10} \left[\frac{1}{2} \cdot (10^6 + 10^8)\right]\right) \\ &= f(10 \cdot \log_{10} [50\,500\,000]) \\ &= f(77.03) = a + b \cdot 10^{7.703} \end{aligned}$$

und mit a und b aus (3) und (4):

$$= 1.9798 + 0.000\,000\,02 \cdot 10^{7.703} \approx 3$$

Damit sind die drei Eigenschaften (i), (ii) und (iii) erfüllt, d.h. der x -Wert des Mittelwertes der beiden Pegel L_1 und L_2 liegt genau in der Mitte zwischen den x -Werten von L_1 und L_2 .

Für diese Funktion soll nun der x -Wert des Pegels $L_3 = 70 \text{ dB}(A)$ berechnet werden:

Es ist

$$f(70) = a + b \cdot 10^{0.1 \cdot 70} = 1.9798 + 0.000\,000\,02 \cdot 10^7 \approx 2.18$$

Aufgabe 3.4e)

Ein Güterzug verursache bei der Vorbeifahrt während 20 s direkt vor einem Schlafzimmerfenster einen Vorbeifahrpegel von $L_{\text{güter}} = 80 \text{ dB}(A)^1$. Während einer Nacht (von 22:00 Uhr bis 06:00 Uhr) fahren jedoch viele dieser Güterzüge², und in den Lärmpausen beträgt der (Ruhe-)Pegel 40 dB(A).

Aufgabe 3.4e1)

Bestimmen Sie den Nacht-Mittelungspegel $L_R(n)$ von n (gleichen) Güterzügen der oben genannten Art (also jeweils mit einem Vorbeifahrpegel von 80 dB(A) während 20 s), deren Vorbeifahrpegel jeweils mit „Ruhe“ abwechseln.

D.h. es ist

$$L_R(n) = \bigotimes_{i=1}^{n+m} (L_i, \Delta \tau_i)$$

$$\text{mit } \begin{cases} L_i = L_{\text{güter}} = 80 & \text{für } i \in \{1, 3, 5, 7, \dots, (2 \cdot n - 1)\} \\ \tau_i = 20 \text{ s} \end{cases}$$

$$\text{und } L_i = L_{\text{ruhe}} \text{ für } i \in \{2, 4, 6, 8, \dots, (2 \cdot n - 2)\}$$

$$\text{sowie } \sum_{i=1}^i i = 2 \cdot n - 1 \tau_i = 8 \text{ h}$$

zu bestimmen.

Bemerkung: Hier werden Vorbeifahrpegel und Ruhepausen zusammengezählt; weder die Reihenfolge noch die zeitliche Verteilung der Vorbeifahrpegel wird in $\bigotimes$ berücksichtigt. Es kann also angenommen werden, dass alle Vorbeifahrten zeitlich direkt hintereinander stattfinden.

¹⁾ Bei einem Abstand von 25 m von einem Gleis treten (bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h) Vorbeifahrpegel hinter einer Lärmschutzwand in dieser Größenordnung auf.

²⁾ In Hannover fahren an der Hauptgüterumgehungsbahn pro Nacht zum Teil mehr als 100 Güterzüge.

Lösung 3.4e1): Es gibt neben den $n \cdot 20$ s, während derer Güterzüge vorbeifahren, in einer Nacht noch in $8 \cdot 3600$ s $- n \cdot 20$ s „Ruhe“. Daher ist

$$L(n) = \left[\bigotimes_{i=1}^n (80, 20 \text{ s}) \right] \bigotimes (40, (8 \cdot 3600 - n \cdot 20) \text{ s})$$

und damit³⁾

$$\begin{aligned} L(n) &= 10 \cdot \lg \left[n \cdot \frac{20}{8 \cdot 3600} \cdot 10^{0.1 \cdot 80} \right] = 10 \cdot \lg [n] + 10 \cdot \lg \left[\frac{20}{8 \cdot 3600} \right] + 10 \cdot \lg [10^8] \\ &= 10 \cdot \lg [n] - 31.6 + 80 = 10 \cdot \lg [n] + 48.4 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.4e2) Gibt es eine (maximale) Zahl n_{20} von Güterzügen, so dass zwischen
 - dem Vorbeifahrpegel eines einzelnen Güterzuges (also $80 \text{ dB}(A)$) und
 - dem Mittelungspegel aus den Vorbeifahrpegeln und den Lärmpausen während einer Nacht
 eine Differenz von $20 \text{ dB}(A)$ auftritt? (Wenn es eine solche Zahl gäbe, wäre bei dieser Zugzahl die Beschreibung des Schienen-Güterverkehrslärms durch den Mittelungspegel um $20 \text{ dB}(A)$ niedriger als die n_{20} eventuell zum Aufwachen führenden Vorbeifahrpegel.)

Lösung 3.4e2): Es soll für n_{20} Güterzüge gelten:

$$L(n_{20}) = 10 \cdot \lg [n_{20}] + 48.4 \leq 80 - 20 = 60$$

also $10 \cdot \lg [n_{20}] \leq 11.6$ oder $\lg [n_{20}] \leq 1.16$ und damit $n_{20} \leq 10^{1.16} \approx 14.5$, d.h. $n_{20} = 14$.

Das sind z.B. 2 Güterzüge in jeder Stunde zwischen 22:00 und 06:00 Uhr - oder aber auch 14 Güterzüge in der Zeit von 22:00 bis 23:00 Uhr und kein Güterzug in der Zeit von 23:00 bis 06:00 Uhr.

Aufgabe 3.4e3)

Es wird angenommen, dass während der Nacht 100 Güterzüge (jeweils mit einem Vorbeifahrpegel von $80 \text{ dB}(A)$ während 20 s) vorbeifahren, und dass während der übrigen Nacht ein Ruhepegel von $40 \text{ dB}(A)$ herrscht.

Wie hoch ist der Mittelungspegel?

Lösung 3.4e3): Der Vorbeifahrpegel jedes der Züge bleibt bei seinem Schallpegel von $80 \text{ dB}(A)$, und der Mittelungspegel kann gemäß 3.4e1) bestimmt werden: Es ist

$$L(100) = 10 \cdot \lg [n] + 48.4 = 10 \cdot \lg [100] + 48.4 = 20 + 48.8 = 68.8$$

Der Mittelungspegel erhöhte sich zwar (und der Unterschied zwischen Mittelungspegel und Vorbeifahrpegel verringerte sich) gegenüber der Aufgabe 3.4e2), aber aber die Zahl der Vorbeifahrten und damit möglicher Aufweckreaktionen erhöhte sich ebenfalls.

³⁾ in der technischen Literatur wird oft $\lg$ anstelle $\log_{10}$ verwendet.