



32 Lineare Geometrie und Determinanten

Matrizen zur Beschreibung von Bewegungen

Gegeben sei eine Bewegung φ .

Wenn die Bilder der zwei Einheitsvektoren bekannt sind,

d.h. wenn z.B. $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gilt,

dann lautet die durch diese Bilder eindeutig beschriebene Matrix $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$,

d.h. die Bilder der Einheitsvektoren bilden die Spalten der Matrix und es gilt $\varphi(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}$.

Beweis: Es ist

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Definition Drehung: die Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt $(0,0)$ mit mathematisch positivem Drehsinn um den Drehwinkel α wird beschrieben durch $D_{(0,0),\alpha}$.

Definition Spiegelung: die Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \vec{n} \circ \vec{x} = d\}$ wird beschrieben durch $S_{(\vec{n},d)}$.

Aufgabe 32.1:

Beschreiben Sie die folgenden Bewegungen jeweils durch eine geeignete Matrix:

a) die Drehung $D_{(0,0),\alpha}$

b) die Spiegelung $S_{(\vec{n},0)}$.

Lösung von Aufgabe 32.1:

32.1a) Die Bilder der Einheitsvektoren können direkt einer Zeichnung abgelesen werden:

Drehung

Die Drehung um den Nullpunkt um einen Winkel α (in mathematisch positivem Sinn) kann beschrieben werden durch die Matrix

$$D_{(0,0),\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

32.1b) Idee:

1. Die Spiegelungsgerade nennen wir g und setzen $\vec{n} = (n_1, n_2)$.

Dann ist $g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \vec{n} \circ \vec{x} = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, n_1 \cdot x + n_2 \cdot y = 0\}$.

Wenn $n_2 = 0$ ist, so ist g die y -Achse.

Wenn $n_2 \neq 0$ ist, so lautet die Geradengleichung $g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -\frac{n_1}{n_2} \cdot x\}$ und wir können den Schnittwinkel φ zwischen der x -Achse und der Geraden g bestimmen:

$$\tan(\varphi) = -\frac{n_1}{n_2}$$

Wir konstruieren die Bilder $S_{(\vec{n},0)}(1,0)$ und $S_{(\vec{n},0)}(0,1)$ der Einheitsvektoren $(1,0)$ und $(0,1)$.
Bemerke, dass die Bilder (wie auch die Einheitsvektoren) auf einem Kreis um $(0,0)$ mit dem Radius 1 liegen.

2. Verbinde den Nullpunkt mit $S_{(\vec{n},d)}(1,0)$ und bemerke, dass die Geraden g die Winkelhalbierende zwischen der x -Achse und dieser Verbindungsgeraden ist. Damit können die Koordinaten von $S_{(\vec{n},d)}(1,0)$ bestimmt werden:

$$S_{(\vec{n},d)}(1,0) = (\cos(2 \cdot \varphi), \sin(2 \cdot \varphi)).$$

3. Verbinde den Nullpunkt mit $S_{(\vec{n},d)}(0,1)$ und bemerke, dass in diesem Falle die Geraden g die Winkelhalbierende zwischen der y -Achse und dieser Verbindungsgeraden ist. Der Winkel zwischen der x -Achse und der Verbindungsgeraden ist $\left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \varphi\right)$.

Damit können die Koordinaten von $S_{(\vec{n},d)}(0,1)$ bestimmt werden:

$$S_{(\vec{n},d)}(0,1) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \varphi\right), -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \varphi\right)\right).$$

4. Nach Formelsammlung gilt $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \heartsuit\right) = \cos(\heartsuit)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \heartsuit\right) = \sin(\heartsuit)$.

5. Insgesamt gilt also

Geradenspiegelung

Die Spiegelung an einer Geraden

$$g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \vec{n} \circ \vec{x} = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, n_1 \cdot x + n_2 \cdot y = 0\} \\ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -\frac{n_1}{n_2} \cdot x\}$$

$$\text{durch } (0,0) \text{ mit } \begin{cases} \tan(\varphi) = -\frac{n_1}{n_2} & \text{für } n_2 \neq 0 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} & \text{für } n_2 = 0 \end{cases}$$

wird beschrieben durch die Matrix

$$S_{(\vec{n},0)} = \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \varphi) & \sin(2 \cdot \varphi) \\ \sin(2 \cdot \varphi) & -\cos(2 \cdot \varphi) \end{pmatrix}$$

Anderer Weg:

Der Punkt $(1, 0)$ wird um den Winkel $2 \cdot \varphi$ gedreht, also lautet sein Bild $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$.
 Vom Punkt $(0, 1)$ wird das Lot auf die Gerade gefällt: Für den Lotfußpunkt $\vec{L}$ gibt es ein λ_0 mit $\vec{L} = (0, 1) + \lambda_0 \cdot (n_1, n_2)$

und für den Spiegelpunkt $\vec{S}$ von $(0, 1)$ gilt

$$\vec{S} = (0, 1) + 2 \cdot \lambda_0 \cdot (n_1, n_2)$$

Da der Lotfußpunkt $\vec{L}$ auch auf der Geraden g liegt, gibt es ein μ_0 mit $\vec{L} = \mu_0 \cdot (-n_2, n_1)$.

Damit ergeben sich die beiden Gleichungen

$$0 + \lambda_0 \cdot n_1 = -\mu_0 \cdot n_2 \text{ und } 1 + \lambda_0 \cdot n_2 = \mu_0 \cdot n_1$$

$$\text{also } \mu_0 = -\lambda_0 \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

$$\text{und damit } 1 + \lambda_0 \cdot n_2 = -\lambda_0 \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot n_1 \text{ oder } \lambda_0 \cdot \left(n_2 + \frac{n_1^2}{n_2} \right) = -1$$

$$\text{oder } \lambda_0 = -\frac{n_2}{n_1^2 + n_2^2}$$

Für den Spiegelpunkt $\vec{S}$ gilt daher

$$\vec{S} = (0, 1) + 2 \cdot \lambda_0 \cdot (n_1, n_2) = (0, 1) - 2 \cdot \frac{n_2}{n_1^2 + n_2^2} \cdot (n_1, n_2)$$

$$\text{oder } \vec{S} = \left(0 - 2 \cdot \frac{n_2}{n_1^2 + n_2^2} \cdot n_1, 1 - 2 \cdot \frac{n_2}{n_1^2 + n_2^2} \cdot n_2 \right) = \left(\frac{-2 \cdot n_2}{n_1^2 + n_2^2} \cdot n_1, \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} \right)$$

Insgesamt gilt also

Geradenspiegelung

Die Spiegelung an einer Geraden

$$g = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \vec{n} \circ \vec{x} = 0 \} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, n_1 \cdot x + n_2 \cdot y = 0 \}$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -\frac{n_1}{n_2} \cdot x \}$$

$$\text{durch } (0, 0) \text{ mit } \begin{cases} \tan(\varphi) = -\frac{n_1}{n_2} & \text{für } n_2 \neq 0 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} & \text{für } n_2 = 0 \end{cases}$$

wird beschrieben durch die Matrix

$$S_{(\vec{n}, 0)} = \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \varphi) & -\frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2}{n_1^2 + n_2^2} \\ \sin(2 \cdot \varphi) & \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe: Zuerst um 30° drehen, dann an der Geraden $y = x$ spiegeln.

Aufgabe 32.2a):

Bestimmen Sie die Abbildung, die sich graphisch und rechnerisch ergibt bei Hintereinanderausführung

1. der Drehung $D_{(0,0),30^\circ}$ und (anschliessend)
2. der Drehung $D_{(0,0),45^\circ}$

Lösung von Aufgabe 32.2a):

Die Hintereinanderausführung von zwei Drehungen um den Nullpunkt ist wieder eine Drehung um den Nullpunkt, denn es sind

$$D_{(0,0),30^\circ} = \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{und } D_{(0,0),45^\circ} = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$D_{(0,0),45^\circ} \cdot D_{(0,0),30^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} - \sqrt{2} & -\sqrt{6} - \sqrt{2} \\ \sqrt{6} + \sqrt{2} & \sqrt{6} - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Nun ist $\cos(75^\circ) = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})$ und $\sin(75^\circ) = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})$, d.h. es ist $D_{(0,0),45^\circ} \cdot D_{(0,0),30^\circ} = D_{(0,0),75^\circ}$.

Hintereinanderausführung von zwei Drehungen

Die Hintereinanderausführung von zwei Drehungen um den Nullpunkt ist wieder eine Drehung um den Nullpunkt.

Aufgabe 32.2b):

Bestimmen Sie die Abbildung, die sich graphisch und rechnerisch ergibt bei Hintereinanderausführung

1. der Spiegelung $S_{((0,1),0)}$ und (anschliessend)
2. der Spiegelung $S_{(\vec{n},0)}$ mit $\vec{n} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{2-\sqrt{3}}, \sqrt{2+\sqrt{3}} \right)$

Lösung von Aufgabe 32.2b):

Die Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen an Geraden durch den Nullpunkt ist eine Drehung um den Nullpunkt, denn:

Es ist $S_{((0,1),0)}$ die Spiegelung an der Geraden

$$g := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2, (0,1) \circ \vec{x} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$D = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\} = \{(x, \tan(0^\circ) \cdot x), x \in \mathbb{R}\} \text{ (also ist } g \text{ die } x\text{-Achse),}$$

und es ist $S_{(\vec{n},0)}$ mit $\vec{n} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{2-\sqrt{3}}, \sqrt{2+\sqrt{3}} \right)$ die Spiegelung an der Geraden

$$h := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \vec{n} \circ \vec{x} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot x + \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot y \right) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, -\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot x + \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot y = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \left(x, \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot x \right), x \in \mathbb{R} \right\}$$

oder $h = \{(x, \tan(15^\circ) \cdot x), x \in \mathbb{R}\}$

Nach der Lösung von Aufgabe 32.1b) kann die Spiegelung S an einer Geraden der Form

$$\{(x, x \cdot \tan(\alpha)), x \in \mathbb{R}\}$$

durch die Matrix $S_{(\vec{n},0)} = \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \varphi) & \sin(2 \cdot \varphi) \\ \sin(2 \cdot \varphi) & -\cos(2 \cdot \varphi) \end{pmatrix}$ beschrieben werden, also ist hier

$$S_{((0,1),0)} = \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \varphi) & \sin(2 \cdot \varphi) \\ \sin(2 \cdot \varphi) & -\cos(2 \cdot \varphi) \end{pmatrix} \stackrel{\varphi=0}{=} \begin{pmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \sin(0) & -\cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und mit $\vec{n} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)$, d.h. mit $\varphi = 15^\circ$,

$$S_{(\vec{n},0)} = \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) & \sin(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) & -\cos(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Die Hintereinanderausführung der Spiegelung $S_{((0,1),0)}$ und (anschliessend) der Spiegelung $S_{(\vec{n},0)}$ wird daher beschrieben durch das Produkt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} = D_{(0,0),30^\circ}$$

Aufgabe 32.2c):

Bestimmen Sie die Abbildung, die sich graphisch und rechnerisch ergibt bei Hintereinanderausführung

1. der Spiegelung $S_{(\vec{n},0)}$ mit $\vec{n} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{2 + \sqrt{3}}, \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)$ und (anschliessend)
2. der Spiegelung $S_{((1,0),0)}$.

Lösung von Aufgabe 32.2c):

Es ist $\sin(75^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ und $\cos(75^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

also ist die erste Spiegelungs-Gerade die Gerade $g := \{(x, x \cdot \tan(75^\circ)), x \in \mathbb{R}\}$.

Ferner ist die zweite Spiegelungsgerade die y -Achse, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Nach der Lösung von Aufgabe 32.1b) kann die Spiegelung S an einer Geraden der Form $y = x \cdot \tan(\alpha)$ durch die Matrix $S_{(\vec{n},0)} = \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \varphi) & \sin(2 \cdot \varphi) \\ \sin(2 \cdot \varphi) & -\cos(2 \cdot \varphi) \end{pmatrix}$ beschrieben werden, also ist hier

$$S_{(\vec{n},0)} = \begin{pmatrix} \cos(150^\circ) & \sin(150^\circ) \\ \sin(150^\circ) & -\cos(150^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{und } S_{((0,1),0)} = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & \sin(\pi) \\ \sin(\pi) & -\cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Hintereinanderausführung der Spiegelung $S_{(\vec{n},0)}$ und (anschliessend) der Spiegelung $S_{((1,0),0)}$ wird daher beschrieben durch das Produkt

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} = D_{(0,0),30^\circ}$$

Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen

Interpretation:

Es sei γ der Schnittwinkel zwischen zwei Geraden, die beide durch den Nullpunkt gehen, dann beschreibt die Hintereinanderausführung der beiden Geradenspiegelungen eine Drehung um den Nullpunkt um den Winkel $2 \cdot \gamma$.

Aufgabe 32.3:

Bestimmen Sie die Abbildung, die sich graphisch und rechnerisch ergibt bei

- a) Hintereinanderausführung der Drehung $D_{(0,0),30^\circ}$ und (anschliessend) der Spiegelung $S_{((-1/2 \cdot \sqrt{3}, 1/2), 0)}$.
- b) Hintereinanderausführung der Spiegelung $S_{((-1/2 \cdot \sqrt{3}, 1/2), 0)}$ und (anschliessend) der Drehung $D_{(0,0),30^\circ}$.

Lösung von Aufgabe 32.3a):

$$\text{Es ist } D_{(0,0),30^\circ} = \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{und } S_{((-1/2 \cdot \sqrt{3}, 1/2), 0)} \stackrel{\varphi=60^\circ}{=} \begin{pmatrix} \cos(120^\circ) & \sin(120^\circ) \\ \sin(120^\circ) & -\cos(120^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Daher ergibt die Hintereinanderausführung

$$A := S_{((-1/2 \cdot \sqrt{3}, 1/2), 0)} \cdot D_{(0,0),30^\circ} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gibt es einen Punkt oder eine Gerade, die bei dieser Abbildung fest bleibt? Dann sind sämtliche Punkte $\vec{x}$ zu bestimmen, für die gilt

$$A \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

oder $(A - 1 \cdot E) \cdot \vec{x} = 0$.

Also

	r.S.	$\sum$	Regie
-1	1	0	1
1	-1	0	1
0	0	0	1

$y = x$

wähle x als Parameter

Also bleibt die Gerade $g = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$ punktweise fest, d.h. die Matrix A beschreibt die Spiegelung an der Geraden g .

Lösung von Aufgabe 32.3b):

Hier ist - gegenüber der Aufgabe 32.3a) - die Reihenfolge vertauscht, also ergibt die Hintereinanderausführung hier

$$B := D_{(0,0),30^\circ} \cdot S_{((-1/2 \cdot \sqrt{3}, 1/2), 0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Gibt es einen Punkt oder eine Gerade, die bei dieser Abbildung fest bleibt? Dann sind sämtliche Punkte $\vec{x}$ zu bestimmen, für die gilt

$$B \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

oder $(B - 1 \cdot E) \cdot \vec{x} = 0$.

Also

	r.S.	$\sum$	Regie
$-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - 1$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2} \cdot (-\sqrt{3} - 1)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - 1$	0	$\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)$
$-\sqrt{3} - 2$	1	0	$-\sqrt{3} - 1$
1	$\sqrt{3} - 2$	0	$\sqrt{3} - 1$
0	0	0	0

$y = (\sqrt{3} + 2) \cdot x$

wähle x als Parameter

Also bleibt die Gerade $h = \{(x, (\sqrt{3} + 2) \cdot x), x \in \mathbb{R}\} = \{(x, x \cdot \tan(75^\circ)), x \in \mathbb{R}\}$ punktweise fest, d.h. die Matrix B beschreibt die Spiegelung an der Geraden h .

Translationen

Eine Translation (Verschiebung) um einen Vektor $\vec{a}$ wird beschrieben durch

$$T_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$$

Aufgabe 32.4:

Bestimmen Sie die Abbildung, die sich graphisch und rechnerisch ergibt bei

- a) Spiegelung an der Geraden $g = \{(1, y), y \in \mathbb{R}\}$
- b) Spiegelung an der Geraden $h = \{(x, 2 \cdot x + 1), x \in \mathbb{R}\}$

Lösung von Aufgabe 32.4a):

Wir führen zunächst eine Translation durch, bei der die Gerade g in den Nullpunkt verschoben wird. Dann spiegeln wir an dieser Geraden und dann verschieben wir alles wieder zurück.

Die Translation $T_{(-1,0)}$ verschiebt die Gerade in den Nullpunkt.

Dann wird die Spiegelung $S_{(1,0),0}$ ausgeführt.

Anschliessend wird wieder zurück verschoben mit der Translation $T_{(1,0)}$.

Also

$$\begin{aligned} T_{(1,0)} \cdot S_{(1,0),0} \cdot T_{(-1,0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T_{(1,0)} \cdot S_{(1,0),0} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} = T_{(1,0)} \begin{pmatrix} -(x-1) \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(x-1)+1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 32.4b):

Es ist $h = \{(x, 2 \cdot x + 1), x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -2 \cdot x + y = 1\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, (-2, 1) \circ \vec{x} = 1\}$.

Die Gerade h wird zunächst in den Nullpunkt verschoben - dazu ist der Abstand der Geraden zum Nullpunkt zu bestimmen, d.h. h in der Hesseschen Normalform zu beschreiben:

$$h = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-2, 1) \cdot \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{5}}\}.$$

Da $|(-2, 1)| = \sqrt{5}$ ist, wird h mit der Translation $T_{\frac{1}{5} \cdot (-2, -1)}$ in den Nullpunkt geschoben.

Die Gerade h schneidet die x -Achse unter einem Winkel α mit $\tan(\alpha) = -\frac{n_1}{n_2} = 2$, also $\varphi = 63.4^\circ$. Daher wird die Spiegelung $S_{(-2,1),0}$ beschrieben durch

$$S_{(-2,1),0} = \begin{pmatrix} \cos(126.8^\circ) & \sin(126.8^\circ) \\ \sin(126.8^\circ) & -\cos(126.8^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

ausgeführt.

Anschliessend wird wieder zurück verschoben mit der Translation $T_{\frac{1}{5} \cdot (-2, 1)}$.

Also wird die gesamte Bewegung beschrieben durch

$$\begin{aligned}
 & T_{\frac{1}{5},(-2,1)} \cdot S_{(-2,1),0} \cdot T_{\frac{1}{5},(2,-1)}(x, y) \\
 &= T_{\frac{1}{5},(-2,1)} \cdot \begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + \frac{2}{5} \\ y - \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\
 &= T_{\frac{1}{5},(-2,1)} \cdot \begin{pmatrix} -0.6 \cdot (x + 0.4) + 0.8 \cdot (y - 0.2) \\ 0.8 \cdot (x + 0.4) + 0.6 \cdot (y - 0.2) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -0.6 \cdot (x + 0.4) + 0.8 \cdot (y - 0.2) - 0.4 \\ 0.8 \cdot (x + 0.4) + 0.6 \cdot (y - 0.2) + 0.2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -0.6 \cdot x + 0.8 \cdot y - 0.8 \\ 0.8 \cdot x + 0.6 \cdot y + 0.4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Gibt es Vektoren $\vec{x}$, die fest bleiben? (wir erwarten, dass die Spiegelungsgerade fest bleibt.)

Aus $\begin{cases} -0.6 \cdot x + 0.8 \cdot y - 0.8 = x & \implies y = 2 \cdot x + 1 \\ 0.8 \cdot x + 0.6 \cdot y + 0.4 = y & \implies x = \frac{1}{2} \cdot y - \frac{1}{2} \end{cases}$
 ergibt sich: **Nur die Gerade $\{(x, 2 \cdot x + 1), x \in \mathbb{R}\}$ bleibt fest.**

Spiegelung an einer beliebigen Geraden

Es sei $g = \{\vec{x}, \vec{n} \cdot \vec{x} = d\}$ mit $|\vec{n}| = 1$ eine Gerade. Dann verschiebt der Vektor

$$\vec{a} := -d \cdot \vec{n} = -d \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

die Gerade in den Nullpunkt. Die Spiegelung $S_{\vec{n},d}$ an dieser Geraden kann daher beschrieben werden durch

$$S_{\vec{n},d} = T_{-\vec{a}} \circ S_{\vec{n},0} \circ T_{\vec{a}}$$

Die einzelnen Abbildungen sind bereits vorher beschrieben, also $S_{\vec{n},d} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$$\begin{aligned}
 & T_{-\vec{a}} \circ S_{\vec{n},0} \begin{pmatrix} x - d \cdot n_1 \\ y - d \cdot n_2 \end{pmatrix} \\
 &= T_{-\vec{a}} \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \varphi) & \sin(2 \cdot \varphi) \\ \sin(2 \cdot \varphi) & -\cos(2 \cdot \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - d \cdot n_1 \\ y - d \cdot n_2 \end{pmatrix} \\
 &= T_{-\vec{a}} \begin{pmatrix} (x - d \cdot n_1) \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + (y - d \cdot n_2) \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \\ (x - d \cdot n_1) \cdot \sin(2 \cdot \varphi) - (y - d \cdot n_2) \cdot \cos(2 \cdot \varphi) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (x - d \cdot n_1) \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + (y - d \cdot n_2) \cdot \sin(2 \cdot \varphi) + d \cdot n_1 \\ (x - d \cdot n_1) \cdot \sin(2 \cdot \varphi) - (y - d \cdot n_2) \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + d \cdot n_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Anwendung auf Aufgabe 32.4:

a) hier ist $\vec{n} = (1, 0)$ und $d = 1$, also $\varphi = 90^\circ$.

Dann ist

$$S_{(1,0),1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x - 1 \cdot 1) \cdot \cos(180^\circ) + (y - 1 \cdot 0) \cdot \sin(180^\circ) + 1 \cdot 1 \\ (x - 1 \cdot 1) \cdot \sin(180^\circ) - (y - 1 \cdot 0) \cdot \cos(180^\circ) + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x - 1) + 1 \\ y \end{pmatrix}$$

b) hier ist $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-2, 1)$ und $d = \frac{1}{\sqrt{5}}$, also $\varphi = 63.4^\circ$.

Dann ist

$$\begin{aligned}
 S_{\frac{1}{\sqrt{5}},(-2,1),\frac{1}{\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (x + \frac{2}{5}) \cdot \cos(126.8^\circ) + (y - \frac{1}{5}) \cdot \sin(126^\circ) - \frac{2}{5} \\ (x + \frac{2}{5}) \cdot \sin(126.8^\circ) - (y - \frac{1}{5}) \cdot \cos(126^\circ) + \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -0.6 \cdot x - 0.6 \cdot \frac{2}{5} + 0.8 \cdot y - 0.8 \cdot \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \\ 0.8 \cdot x + 0.8 \cdot \frac{2}{5} + 0.6 \cdot y - 0.8 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 \cdot x + 0.8 \cdot y - 0.8 \\ 0.8 \cdot x + 0.6 \cdot y + 0.4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 32.5:

Bestimmen Sie die Abbildung, die sich graphisch und rechnerisch ergibt bei Hintereinanderausführung der Spiegelungen

- a) an der Geraden $g = \{(1, y), y \in \mathbb{R}\}$ und
(anschliessend) an der Geraden $h = \{(3, y), y \in \mathbb{R}\}$
- b) die Spiegelung an der Geraden $g = \{(x, 2 \cdot x + 1), x \in \mathbb{R}\}$ und
(anschliessend) an der Geraden $h = \{(x, -2 \cdot x + 1), x \in \mathbb{R}\}$

Lösung von Aufgabe 32.5a):

Es ist $\tilde{g} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - x \\ y \end{pmatrix}$ und $\tilde{h} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - x \\ y \end{pmatrix}$
und daher $\tilde{h} \left(\tilde{g} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \tilde{h} \begin{pmatrix} 2 - x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - (2 - x) \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Also ist die Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen an zueinander parallelen Geraden eine Translation.

Lösung von Aufgabe 32.5b):

Es ist $\tilde{g} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 \cdot x + 0.8 \cdot y - 0.8 \\ 0.8 \cdot x + 0.6 \cdot y + 0.4 \end{pmatrix}$ und $\tilde{h} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 \cdot x - 0.8 \cdot y + 0.8 \\ -0.8 \cdot x + 0.6 \cdot y + 0.4 \end{pmatrix}$
und daher $\tilde{h} \left(\tilde{g} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \tilde{h} \begin{pmatrix} -0.6 \cdot x + 0.8 \cdot y - 0.8 \\ 0.8 \cdot x + 0.6 \cdot y + 0.4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -0.6 \cdot (-0.6 \cdot x + 0.8 \cdot y - 0.8) - 0.8 \cdot (0.8 \cdot x + 0.6 \cdot y + 0.4) + 0.8 \\ -0.8 \cdot (-0.6 \cdot x + 0.8 \cdot y - 0.8) + 0.6 \cdot (0.8 \cdot x + 0.6 \cdot y + 0.4) + 0.4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.28 \cdot x - 0.96 \cdot y + 0.96 \\ 0.96 \cdot x - 0.28 \cdot y + 1.28 \end{pmatrix}$$

Also ist die Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen an sich schneidenden Geraden eine Drehung.

Aufgabe 32.6:

Bestimmen Sie die Abbildung, die sich graphisch und rechnerisch ergibt bei Hintereinanderausführung der drei Spiegelungen

- an der Geraden $g = \{(1, y), y \in \mathbb{R}\}$, dann
an der Geraden $h = \{(3, y), y \in \mathbb{R}\}$ und (anschliessend)
an der Geraden $k = \{(x, 2 \cdot x + 1), x \in \mathbb{R}\}.$

Lösung von Aufgabe 32.6:

Es ist $\tilde{k} \left(\tilde{h} \left(\tilde{g} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right) = \tilde{k} \begin{pmatrix} x + 4 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 \cdot (x + 4) + 0.8 \cdot y - 0.8 \\ 0.8 \cdot (x + 4) + 0.6 \cdot y + 0.4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -0.6 \cdot x + 0.8 \cdot y - 3.2 \\ 0.8 \cdot x + 0.6 \cdot y + 3.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3.2 \\ 3.6 \end{pmatrix}$$

Also ist die Hintereinanderausführung von drei Spiegelungen an zwei zueinander parallelen und einer diese beiden schneidenden Geraden eine „Schubspiegelung“.

Aufgabe 32.7: Abwicklung

Problem: Wenn eine geknickte Fläche aus einem ebenen Blech hergestellt werden soll, so sind der Zuschnitt und die Knickkanten des Bleches zu bestimmen. Hier soll vereinfachend nicht eine geknickte Fläche, sondern ein geknickter Streckenzug gegeben sein, der aus einem geraden Stab hergestellt werden soll. Es sind die Knickstellen zu markieren.

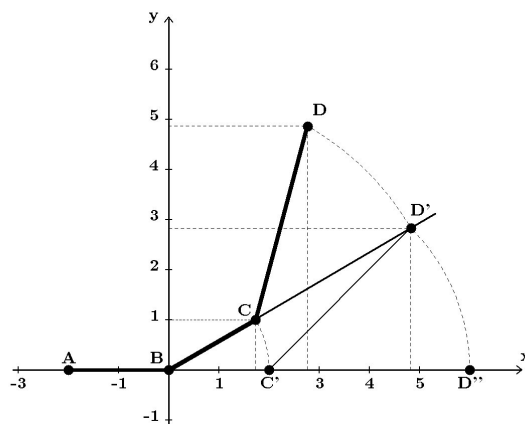
Aufgabe: In der Ebene R^2 sei der Streckenzug durch die Punkte

$A = (-2, 0)$, $B = (0, 0)$, $C = (\sqrt{3}, 1)$ und $D = (-\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}, 1 + \sqrt{2} + \sqrt{6})$ gegeben.

Dieser Streckenzug soll - von A aus beginnend - auf die x -Achse in zwei Schritten abgewickelt werden (bei einer Abwicklung bleiben Längen erhalten und Geraden werden auf Geraden abgebildet).

1. Bestimmen Sie die Abbildung Γ , bei der C auf einen Punkt $C' = \Gamma(C)$ auf der x -Achse abgebildet wird. Die Koordinaten von $D' = \Gamma(D)$ sind zu berechnen.
2. Bestimmen Sie die Abbildung Δ , bei der D' auf einen Punkt D'' auf der x -Achse abgebildet wird.
3. Bestimmen Sie die Koordinaten von D'' .

Gesucht ist sowohl eine mathematische als auch eine graphische Lösung - und ein Vergleich der beiden Ergebnisse.

Lösung von Aufgabe 32.7 (Abwicklung)

Γ ist eine Drehung um den Punkt $B = (0, 0)$ um den Winkel $\frac{\pi}{6}$ im Uhrzeigersinn, also

$$\Gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und diese Abbildung ist auf C und D anzuwenden:

$$C' = \Gamma(C) = (2, 0) \text{ und } D' = \Gamma(D) = (2 + 2 \cdot \sqrt{2}, 2 \cdot \sqrt{2})$$

Δ ist eine Drehung um den Punkt $C' = (c'_x, c'_y) = (2, 0)$ um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ im Uhrzeigersinn, also

$$\Delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c'_x \\ c'_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - c'_x \\ y - c'_y \end{pmatrix}$$

und diese Abbildung ist auf D' anzuwenden: $D'' = (2, 0) + (4, 0) = (6, 0)$.

Aufgabe 32.8

Es sei das folgende Dreieck $\Delta(A, B, C)$ gegeben

$$A = (0, 0) \quad B = (3, 0) \quad C = (0, 4)$$

Zu diesem Dreieck wird ein kongruentes Dreieck $\Delta(\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C))$ gesucht, wobei

$$\varphi(B) = (3, 1) \quad \text{und} \quad \varphi(C) = (8, 1)$$

ist.

Gesucht ist sowohl eine mathematische als auch eine graphische Lösung - und ein Vergleich der beiden Ergebnisse.

Tip: Konstruieren Sie zunächst graphisch die Geradenspiegelungen, die die Hypotenuse des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ auf die Gerade $\overline{\varphi(B), \varphi(C)}$ abbildet.

Lösung von Aufgabe 32.8:

Es sei $\tilde{g}$ die Spiegelung an der Geraden g .

1. Mittelsenkrechten zu B und $\varphi(B)$

Zunächst wird an der Mittelsenkrechten zu B und $\varphi(B)$ gespiegelt.

Die Gleichung der Spiegelungsgeraden lautet

$$g := \left\{ \left(x, \frac{1}{2} \right), x \in \mathbb{R} \right\}$$

Diese bildet ab:

Mathematische Lösung:

1. Verschiebung mit $\vec{a}_1(x, y) = (x, y - 0.5)$:

$$A = (0, 0) \rightarrow A_1 = (0, -0.5) \quad \text{und} \quad B = (3, 0) \rightarrow B_1 = (3, -0.5) \\ \text{und} \quad C = (0, 4) \rightarrow C_1 = (0, 3.5)$$

2. Spiegelung an der x -Achse:

$$A_1 = (0, -0.5) \rightarrow A_2 = (0, 0.5) \quad \text{und} \quad B_1 = (3, -0.5) \rightarrow B_2 = (3, 0.5) \\ \text{und} \quad C_1 = (0, 3.5) \rightarrow C_2 = (0, -3.5)$$

3. Verschiebung mit $\vec{a}_3(x, y) = (x, y + 0.5)$:

$$A_2 = (0, 0.5) \rightarrow A_3 = (0, 1) \quad \text{und} \quad B_2 = (3, 0.5) \rightarrow B_3 = (3, 1) \\ \text{und} \quad C_2 = (0, -3.5) \rightarrow C_3 = (0, -3)$$

Graphische Lösung:

$$\tilde{g}(B) = \varphi(B)$$

$$\tilde{g}(A) = (0, 1)$$

$$\tilde{g}(C) = (0, -3).$$

2. Mittelsenkrechte von $\tilde{g}(C)$ und $\varphi(C)$

Nun wird die Mittelsenkrechte von $\tilde{g}(C)$ und $\varphi(C)$ bestimmt:

$$\text{Es ist } \overline{\tilde{g}(C), \varphi(C)} = \left\{ \left(x, \frac{1}{2} \cdot x - 3 \right), x \in \mathbb{R} \right\},$$

und der Mittelpunkt zwischen $\tilde{g}(C)$ und $\varphi(C)$ hat die Koordinaten $(4, -1)$. Daher lautet die Gleichung der Mittelsenkrechten (und damit der Spiegelungsgeraden)

$$h := \{(x, -2 \cdot x + 7), x \in \mathbb{R}\}$$

Bei dieser Abbildung gilt:

Graphische Lösung:

$$\tilde{h} \circ \tilde{g}(B) = \varphi(B)$$

$$\tilde{h} \circ \tilde{g}(C) = \tilde{h}(0, -3) = \varphi(C).$$

$$\tilde{h} \circ \tilde{g}(A) = \tilde{h}(0, 1) = ?$$

Mathematische Lösung:

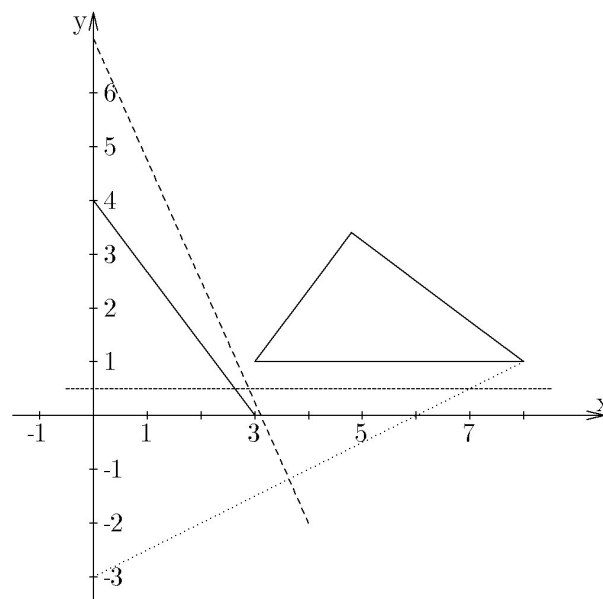
Es ist $\tilde{g}(A) = C_3$ und $\tilde{g}(B) = B_3 = \varphi(B)$ und $\tilde{g}(C) = C_3$.

4. Verschiebung mit $\vec{a}_4(x, y) = (x, y - 7)$:
 $A_3 = (0, 1) \rightarrow A_4 = (0, -6)$ und $B_3 = (3, 1) \rightarrow B_4 = (3, -6)$
 und $C_3 = (0, -3) \rightarrow C_4 = (0, -10)$
5. Spiegelung an der Geraden $h_5 := \{(x, -2 \cdot x), x \in \mathbb{R}\}$:
 Aus $\tan(\alpha) = -2$ folgt $\alpha = 116,6^\circ$,
 daher wird diese Spiegelung beschrieben durch die Matrix

$$\tilde{h}_5 = \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot 116,6^\circ) & \sin(2 \cdot 116,6^\circ) \\ \sin(2 \cdot 116,6^\circ) & -\sin(2 \cdot 116,6^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 & -0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

 $A_4 = (0, -6) \rightarrow A_5 = (4.8, -3.6)$ und $B_4 = (3, -6) \rightarrow B_5 = (3, -6)$
 und $C_4 = (0, -10) \rightarrow C_5 = (8, -6)$
6. Verschiebung mit $\vec{a}_6(x, y) = (x, y + 7)$:
 $A_5 = (4.8, -3.6) \rightarrow A_6 = (4.8, 3.4)$ und $B_5 = (3, -6) \rightarrow B_6 = (3, 1)$
 und $C_5 = (8, -6) \rightarrow C_6 = (8, 1)$

Also ist $\tilde{h} \circ \tilde{g}(A) = \tilde{h}(0, 1) = A_6 = (4.8, 3.4)$



Aufgabe 32.8: Abbildung eines Dreiecks

33 Determinanten

Determinanten (siehe REP Seite 186)

Die **elementaren Umformungen** einer Matrix wirken sich folgendermaßen auf ihre Determinante aus:

1. Vertauscht man zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.
2. Multipliziert man eine Zeile mit einer Zahl a , so multipliziert sich die Determinante mit a .
3. Addiert man das a -fache einer Zeile zu einer anderen Zeile, so ändert sich der Wert der Determinante nicht (für $a \in \mathbb{R}$).

Ferner verwendet man zur Berechnung einer Determinante den **LAPLACESchen Entwicklungssatz**:

Es sei $A = (a_{i,j})$ eine (quadratische) $(n \times n)$ -Matrix und $A_{k,l}$ die $((n-1) \times (n-1))$ -Matrix, die durch Streichen der k -ten Zeile und der l -ten Spalte hervorgeht.

Dann gilt

$$\det A = \det (a_{i,j}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot |A_{i,j}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot |A_{i,j}|$$

Beispiel 1: $A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & s \\ t & u \end{vmatrix}.$

Diese Determinante wollen wir nach der 1. Spalte entwickeln (also $j = 1$). Dann ist

$$|A| = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} a_{i,1} \cdot A_{i,1} = a_{1,1} \cdot A_{1,1} - a_{2,1} \cdot A_{2,1} = r \cdot \det(u) - s \cdot \det(t) = r \cdot u - s \cdot t.$$

Beispiel 2: $A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$

Diese Determinante wollen wir nach der 2. Spalte entwickeln (also $j = 2$). Dann ist

$$|A| = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+2} a_{i,2} \cdot A_{i,2} = -a_{1,2} \cdot A_{1,2} + a_{2,2} \cdot A_{2,2} - a_{3,2} \cdot A_{3,2}$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Beispiel 1}}{=} -2 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1 + 3) - 2 \cdot (-3) = 4$$

Beispiel 3 (Regel von Sarrus, REP Seite 183): $A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}.$

Diese Determinante wollen wir nach der 1. Spalte entwickeln (also $j = 1$). Dann ist

$$|A| = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} a_{i,1} \cdot A_{i,1} = a_{1,1} \cdot A_{1,1} + a_{2,1} \cdot A_{2,1} - a_{3,1} \cdot A_{3,1}$$

$$= a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \stackrel{\text{Beispiel 1}}{=}$$

$$a_{1,1} \cdot (a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,2}) - a_{2,1} \cdot (a_{1,2} \cdot a_{3,3} - a_{1,3} \cdot a_{3,2}) + a_{3,1} \cdot (a_{1,2} \cdot a_{2,3} - a_{1,3} \cdot a_{2,2})$$

$$= (a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{3,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,3} + a_{2,1} \cdot a_{1,3} \cdot a_{3,2}) \\ - (a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} + a_{2,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{3,3} + a_{3,1} \cdot a_{1,3} \cdot a_{2,2})$$

Aufgabe 32.9a)

Berechnen Sie die Determinate der in Aufgabe 30.3 beschriebenen Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung von Aufgabe 32.9a)

Faktor		Σ	Regie
1	1 0 2	3	1
	2 1 4	7	1 -2
	1 2 1	4	1
1	1 0 2	3	
	2 1 4	7	
	-3 0 -7	-10	
	Entwicklung nach der 2.Spalte		
1	1 2	3	
	-3 -7	-10	

Also ist $|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Beispiel 1}}{=} 1 \cdot (-7 + 6) = -1$

Aufgabe 32.9b)

Berechnen Sie die Determinate der in Aufgabe 30.3 beschriebenen Matrix $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung von Aufgabe 32.9b)

Faktor		Σ	Regie
1	7 -2 -3	2	1
	-5 1 2	-2	2 1 -1
	-3 1 1	-1	1
1	-3 0 1	-2	
	-5 1 2	-2	
	2 0 -1	1	
	Entwicklung nach der 2.Spalte		
1	-3 1		
	2 -1		

Also ist $|B| = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Beispiel 1}}{=} 1 \cdot (3 - 2) = 1$

Aufgabe 32.9c)

Berechnen Sie die Determinate der in Aufgabe 30.3 beschriebenen Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ -2 & 17 & 9 \end{pmatrix}$

Lösung von Aufgabe 32.9c)

Faktor		Σ	Regie
1	$\boxed{1}$ -2 -1	-2	1 -3 2
	3 7 4	14	1
	-2 17 9	24	1
1	$\boxed{1}$ -2 -1	-2	
	0 13 7	20	
	0 13 7	20	
	Entwicklung nach der 1.Spalte		
1	13 7		
	13 7		

Also ist

$$|C| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 13 & 7 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Beispiel 1}}{=} 1 \cdot 0 = 0$$

Aufgabe 32.10

Berechnen Sie jeweils die Determinate der in Aufgabe 30.4 beschriebenen Hilbert Matrizen A_2 , A_3 und A_4 .

Lösung von Aufgabe 32.10 (A_2): Es ist $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \stackrel{\text{Beispiel 1}}{=} \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

Lösung von Aufgabe 32.10 (A_3): Zur Berechnung von $|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$:

Faktor		Σ	Regie
1	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$		6
	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$		24
	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$		60
$\frac{1}{6 \cdot 24 \cdot 60}$	6 3 $\boxed{2}$	11	1 -3 -6
	12 8 6	26	1
	20 15 12	47	1
$\frac{1}{6 \cdot 24 \cdot 60}$	6 3 $\boxed{2}$	11	
	-6 -1 0	-7	
	-16 -3 0	-19	
	Entwicklung nach der 3.Spalte		
$\frac{2}{6 \cdot 24 \cdot 60}$	-6 -1	-7	
	-16 -3	-19	

Also ist $|A_3| = \frac{2}{6 \cdot 24 \cdot 60} \cdot \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -16 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Beispiel 1}}{=} \frac{1}{4320} \cdot (18 - 16) = \frac{1}{2160}$

Lösung von Aufgabe 32.10 (A_4): Es ist $|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{6\,048\,000}$

Aufgabe 32.11a) Berechnen Sie $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Lösung von Aufgabe 32.11a):

Faktor		Σ	Regie
1	2 1 0 -2	1	1 -2 -2 2
	1 2 3 -1	5	1
	3 2 4 -3	6	1
	2 -2 2 3	5	1
1	2 1 0 -2	1	1 -2 -2 2
	-3 0 3 3	3	1
	-1 0 4 1	4	1
	6 0 2 -1	7	1
Entwicklung nach der 2.Spalte			
-1	-3 3 3	3	1
	-1 4 1	4	-3 1 1
	6 2 -1	7	1
-1	0 -9 0	-9	
	-1 4 1	4	
	5 6 0	11	
Entwicklung nach der 3.Spalte			
1	0 -9	-9	
	5 6	11	

Also ist $A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Beispiel 1}}{=} 45$

Aufgabe 32.11b) Berechnen Sie $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

und bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $B = 0$.

Lösung von Aufgabe 32.11b):

Faktor					Σ	Regie				
1	1	1	1	x	3+x	1				
	1	1	x	1	3+x	1				
	1	x	1	1	3+x	1				
	x	1	1	1	3+x	1				
1	3+x	3+x	3+x	3+x	12 + 4 · x					
	1	1	x	1	3+x					
	1	x	1	1	3+x					
	x	1	1	1	3+x					
(3 + x)	1	1	1	1	4	1	-1	-1	-1	
	1	1	x	1	3+x		1			
	1	x	1	1	3+x			1		
	x	1	1	1	3+x				1	
-(3 + x)	1	1	1	1	4					
	0	0	x-1	0	x-1					
	0	x-1	0	0	x-1					
	x-1	0	0	0	x-1					
Entwicklung nach der 4.Spalte										
-(3 + x)	0	0	x-1		x-1					
	0	x-1	0		x-1					
	x-1	0	0		x-1					
Entwicklung nach der 3.Spalte										
-(3 + x) · (x - 1)	0	x-1			x-1					
	x-1	0			x-1					

Also ist $B = -(3 + x) \cdot (x - 1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & x-1 \\ x-1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Beispiel 1}}{=} (3 + x) \cdot (x - 1)^3$

Es gilt $B = 0$ für $x_1 = -3$ (einfache Nullstelle) und für $x_2 = 1$ (dreifache Nullstelle).

Aufgabe 32.11c): Berechnen Sie $C = \begin{vmatrix} 4-x & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2-x & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4-x \end{vmatrix}$ und bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $C = 0$.

Lösung von Aufgabe 32.11c):

Faktor		Σ	Regie
1	$\begin{vmatrix} 4-x & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2-x & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4-x \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 10-x \\ 10-x \\ 4-x \\ 8-x \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 8-x & 8-x & 8-x & 8-x \\ 3 & 2-x & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4-x \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 32-4 \cdot x \\ 10-x \\ 4-x \\ 8-x \end{vmatrix}$	
$(8-x)$	$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2-x & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4-x \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 \\ 10-x \\ 4-x \\ 8-x \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{vmatrix}$
$(8-x)$	$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-x & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1-x & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3-x \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 \\ -2-x \\ 4-x \\ 4-x \end{vmatrix}$	
Entwicklung nach der 1.Spalte			
$(8-x)$	$\begin{vmatrix} & -1-x & 1 & -2 \\ & 1 & 1-x & 2 \\ & 1 & 0 & 3-x \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2-x \\ 4-x \\ 4-x \end{vmatrix}$	
$(8-x)$	$\begin{vmatrix} & -1-x & \boxed{1} & -2 \\ & 1 & 1-x & 2 \\ & 1 & 0 & 3-x \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2-x \\ 4-x \\ 4-x \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1+x \\ & 1 \\ & & 1 \end{vmatrix}$
Es darf auch mit 0 multipliziert werden, daher ist $-1+x$ als Multiplikator zulässig			
$(8-x)$	$\begin{vmatrix} & -1-x & \boxed{1} & -2 \\ & 2-x^2 & 0 & 4-2 \cdot x \\ & 1 & 0 & 3-x \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2-x \\ 6-2 \cdot x-x^2 \\ 4-x \end{vmatrix}$	
$-(8-x)$	$\begin{vmatrix} & 2-x^2 & & 4-2 \cdot x \\ & \boxed{1} & & 3-x \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6-2 \cdot x-x^2 \\ 4-x \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ x^2-2 & 1 \end{vmatrix}$
$-(8-x)$	$\begin{vmatrix} & 0 & 2-3 \cdot x^2+x^3 \\ & \boxed{1} & 3-x \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2-3 \cdot x^2+x^3 \\ 4-x \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x^2-2 \end{vmatrix}$
$-(8-x)$	$\begin{vmatrix} & & 2-3 \cdot x^2+x^3 \end{vmatrix}$	$2-3 \cdot x^2+x^3$	

Also ist $C = -(8-x) \cdot (2-3 \cdot x^2+x^3)$

mit den Nullstellen $x_1 = 8$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1 + \sqrt{3}$, $x_4 = 1 - \sqrt{3}$.

Aufgabe 32.12a): Zeigen Sie: Wenn eine Matrix M eine Bewegung beschreibt, bei welcher für je zwei Punkte P_1 und P_2 der Abstand $|\overline{P_1, P_2}|$ erhalten bleibt, dann gilt $|M| = \pm 1$.

Lösung zu Aufgabe 32.12a)

Wir wählen $P_1 = (0, 0)$ und setzen $P_2 = (x, y)$. Dann ist

$$|\overline{P_1, P_2}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wenn auf diese beiden Punkte die Matrix $M =: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ angewandt wird,

erhalten wir die Punkte $Q_1 := (0, 0) = P_1$ und $Q_2 := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$.

Der Abstand zwischen Q_1 und Q_2 beträgt

$$|\overline{Q_1, Q_2}| = \sqrt{(a \cdot x + b \cdot y)^2 + (c \cdot x + d \cdot y)^2}.$$

Hier soll gelten $|\overline{P_1, P_2}| = |\overline{Q_1, Q_2}|$, also soll für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$x^2 + y^2 = (a \cdot x + b \cdot y)^2 + (c \cdot x + d \cdot y)^2$$

oder

$$x^2 \cdot (1 - (a^2 + c^2)) + y^2 \cdot (1 - (b^2 + d^2)) = 2 \cdot (a \cdot b + c \cdot d) \cdot x \cdot y.$$

Dann muss gelten

$$1. \quad 1 = a^2 + c^2 \quad \text{und} \quad 2. \quad 1 = b^2 + d^2 \quad \text{und} \quad 3. \quad a \cdot b + c \cdot d = 0.$$

Wegen $1 = a^2 + c^2$ substituieren wir $\cos(\alpha) := a$ für ein geeignetes α und erhalten $c = \pm \sin(\alpha)$.

Wegen $1 = b^2 + d^2$ substituieren wir $\cos(\beta) := d$ für ein geeignetes β und erhalten $b = \pm \sin(\beta)$.

Dann soll mit diesen Substitutionen die 3. Bedingung gelten.

1. Falls gilt $(b = +\sin(\beta) \text{ und } c = +\sin(\alpha))$ oder $(b = -\sin(\beta) \text{ und } c = -\sin(\alpha))$,

soll also gelten

$$0 = a \cdot b + c \cdot d = \pm [\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)] \stackrel{\text{Additionstheoreme}}{=} \pm \sin(\alpha + \beta).$$

Es ist $\sin(\heartsuit) = 0$ für $\heartsuit = 0$ oder für $\heartsuit = \pi$, also muss gelten

$$\alpha + \beta = 0 \text{ oder } \alpha + \beta = \pi.$$

Dann ist

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \cos(\alpha + \beta)$$

also

$$|M| = 1 \text{ im Falle } \alpha + \beta = 0$$

$$\text{und } |M| = -1 \text{ im Falle } \alpha + \beta = \pi$$

2. Falls gilt $(b = +\sin(\beta) \text{ und } c = -\sin(\alpha))$ oder $(b = -\sin(\beta) \text{ und } c = +\sin(\alpha))$,

soll also gelten

$$0 = a \cdot b + c \cdot d = \pm [\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)] \stackrel{\text{Additionstheoreme}}{=} \pm \sin(\alpha + \beta).$$

Es ist $\sin(\heartsuit) = 0$ für $\heartsuit = 0$ oder für $\heartsuit = \pi$, also muss gelten

$$\alpha - \beta = 0 \text{ oder } \alpha - \beta = \pi.$$

Dann ist

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta)$$

also

$$|M| = 1 \text{ im Falle } \alpha - \beta = 0$$

$$\text{und } |M| = -1 \text{ im Falle } \alpha - \beta = \pi$$

Aufgabe 32.12b) Zeigen Sie: Für die Determinante einer Spiegelung $S_{(\vec{n},0)}$ gilt $|S_{(\vec{n},0)}| = -1$.

Lösung zu Aufgabe 32.12b)

Nach Aufgabe 32.1 gilt:

Geradenspiegelung

Die Spiegelung an einer Geraden

$$g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \vec{n} \circ \vec{x} = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, n_1 \cdot x + n_2 \cdot y = 0\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -\frac{n_1}{n_2} \cdot x\}$$

durch $(0,0)$ mit
$$\begin{cases} \tan(\varphi) = -\frac{n_1}{n_2} & \text{für } n_2 \neq 0 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} & \text{für } n_2 = 0 \end{cases}$$

wird beschrieben durch die Matrix

$$S_{(\vec{n},0)} = \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \varphi) & \sin(2 \cdot \varphi) \\ \sin(2 \cdot \varphi) & -\cos(2 \cdot \varphi) \end{pmatrix}$$

Also wird die Spiegelung an einer Geraden

$$g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \vec{n} \circ \vec{x} = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, n_1 \cdot x + n_2 \cdot y = 0\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -\frac{n_1}{n_2} \cdot x\}$$

durch $(0,0)$ mit
$$\begin{cases} \tan(\varphi) = -\frac{n_1}{n_2} & \text{für } n_2 \neq 0 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} & \text{für } n_2 = 0 \end{cases}$$

beschrieben durch die Matrix
$$S_{(\vec{n},0)} = \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \varphi) & \sin(2 \cdot \varphi) \\ \sin(2 \cdot \varphi) & -\cos(2 \cdot \varphi) \end{pmatrix}$$

Also ist hier die Determinante $|S_{(\vec{n},0)}|$ zu berechnen. - Es ist

$$|S_{(\vec{n},0)}| = \begin{vmatrix} \cos(2 \cdot \varphi) & \sin(2 \cdot \varphi) \\ \sin(2 \cdot \varphi) & -\cos(2 \cdot \varphi) \end{vmatrix} = -\cos^2(2 \cdot \varphi) - \sin^2(2 \cdot \varphi) = -1$$

Aufgabe 32.12c) Zeigen Sie: Für die Determinante einer Drehung $D_{(0,0),\alpha}$ gilt $|D_{(0,0),\alpha}| = 1$.

Lösung zu Aufgabe 32.12c)

Aus Aufgabe 32.1:

Drehung

Die Drehung um den Nullpunkt um einen Winkel α (in mathematisch positivem Sinn) kann beschrieben werden durch die Matrix

$$D_{(0,0),\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Nach Aufgabe 32.1 wird die Drehung $D_{(0,0),\alpha}$ um den Nullpunkt um einen Winkel α (in mathematisch positivem Sinn) beschrieben durch die Matrix

$$D_{(0,0),\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Also ist hier die Determinante $|D_{(0,0),\alpha}|$ zu berechnen. - Es ist

$$|D_{(0,0),\alpha}| = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$