



34 Hauptachsentransformation

Hauptachsentransformation 2-dimensional (siehe REP Seite 219)

Es sei die Gleichung eines Kegelschnittes in Matrizenform gegeben.

Wenn die Matrix die Normalform eines Kegelschnittes beschreiben soll, dann muss ein Koordinatensystem (u, v) bestimmt werden, für das gilt:

$$a_{11} \cdot u^2 + a_{22} \cdot v^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (u \ v) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 16 \quad (M1)$$

Wenn $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix}$ Eigenvektoren zu Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 bezüglich einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ sind, dann gilt nach Definition von Eigenwert und Eigenvektor

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} = \lambda_i \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} \quad \text{für } i \in \{1, 2\} \quad (M2)$$

oder

$$(A - \lambda_i \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{oder} \quad (M3)$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda_i & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } i \in \{1, 2\}$$

und damit für jedes $i \in \{1, 2\}$:

$$(x_{i,1} \ x_{i,2}) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} = (x_{i,1} \ x_{i,2}) \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} \quad (M4)$$

$$= (x_{i,1} \ x_{i,2}) \cdot \lambda_i \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} = \lambda_i \cdot (x_{i,1}^2 + x_{i,2}^2)$$

Wenn daher die Achsen eines Kegelschnittes Eigenvektoren der zugehörigen Matrix sind, dann hat die beschreibende Gleichung bezüglich des durch die Eigenvektoren definierten Koordinatensystems Normalform.

Aufgabe 34.1:

Bestimmen Sie die Kurve, die durch die Gleichung

$$7 \cdot x^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot y + 13 \cdot y^2 - 16 = 0 \quad (A)$$

beschrieben wird.

Lösung der Aufgabe 34.1:

Es wird angenommen, dass die Kurve ein Kegelschnitt ist, dessen Hauptachsen um einen Winkel φ gedreht wurden.

Wir wählen die Koordinaten (u, v) für dieses gedrehte Koordinatensystem; dann gibt es einen Winkel φ , so dass zwischen dem (x, y) -Koordinatensystem und dem (u, v) -Koordinatensystem folgender Zusammenhang besteht:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (B)$$

oder

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (C)$$

Direkte Lösung

Zur Abkürzung ersetzen wir $s := \sin(\varphi)$ und $c := \cos(\varphi)$. Dann ergibt sich aus der Gleichung (B):

$$\begin{aligned} x &= u \cdot \cos(\varphi) - v \cdot \sin(\varphi) = u \cdot c - v \cdot s \\ y &= u \cdot \sin(\varphi) + v \cdot \cos(\varphi) = u \cdot s + v \cdot c \end{aligned}$$

Diese Werte werden in die Gleichung (A) eingesetzt:

$$7 \cdot (u \cdot c - v \cdot s)^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot (u \cdot c - v \cdot s) \cdot (u \cdot s + v \cdot c) + 13 \cdot (u \cdot s + v \cdot c)^2 - 16 = 0$$

oder

$$\begin{aligned} &7 \cdot (u^2 \cdot c^2 - 2 \cdot u \cdot c \cdot v \cdot s + v^2 \cdot s^2) \\ &+ 6 \cdot \sqrt{3} \cdot (u^2 \cdot c \cdot s + u \cdot v \cdot (c^2 - s^2) - v^2 \cdot c \cdot s) \\ &+ 13 \cdot (u^2 \cdot s^2 + 2 \cdot u \cdot v \cdot c \cdot s + v^2 \cdot c^2) = 16 \end{aligned} \quad (D)$$

Diese Gleichung (D) kann nach Potenzen von u bzw. v sortiert werden:

$$\begin{aligned} &u^2 \cdot (7 \cdot c^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot c \cdot s + 13 \cdot s^2) \\ &+ u \cdot v \cdot (-14 \cdot c \cdot s + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot (c^2 - s^2) + 26 \cdot c \cdot s) \\ &+ v^2 \cdot (7 \cdot s^2 - 6 \cdot \sqrt{3} \cdot c \cdot s + 13 \cdot c^2) = 16 \end{aligned} \quad (E)$$

Aus der Gleichung (E) kann der Winkel φ bestimmt werden, denn wenn der Koeffizient von $u \cdot v$ gleich 0 ist, d.h. wenn gilt

$$-14 \cdot c \cdot s + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot (s^2 - c^2) + 26 \cdot c \cdot s = 0 \quad (F)$$

dann hat die Gleichung (E) Normalform.

Nun wird der Winkel φ bestimmt, für den die Gleichung (F) gilt:

Wegen $\tan(\varphi) = \frac{s}{c} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$ wird die Gleichung (F) durch c^2 geteilt:

$$\begin{aligned} -14 \cdot \tan(\varphi) + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot (\tan^2(\varphi) - 1) + 26 \cdot \tan(\varphi) &= 0 \\ \text{oder} & \\ 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \tan^2(\varphi) + 12 \cdot \tan(\varphi) - 6 \cdot \sqrt{3} &= 0 \end{aligned} \quad (G)$$

Diese quadratische Gleichung (G) hat die Lösungen

$$\tan(\varphi_{1,2}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \begin{cases} \sqrt{3} \\ -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \end{cases} \quad (H)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wählen wir willkürlich

$$\varphi = 60^\circ \quad (I)$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} s = \sin(60^\circ) &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \quad \text{und} \quad c = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \\ &\text{sowie} \\ c \cdot s &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \quad \text{und} \quad s^2 = \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad c^2 = \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (J)$$

Werden diese Werte in Gleichung (E) eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &u^2 \cdot \left(7 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} + 13 \cdot \frac{3}{4}\right) \\ + &v^2 \cdot \left(7 \cdot \frac{3}{4} - 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} + 13 \cdot \frac{1}{4}\right) = 16 \\ &\text{oder} \\ &u^2 \cdot \left(\frac{7}{4} + \frac{18}{4} + \frac{39}{4}\right) + v^2 \cdot \left(\frac{21}{4} - \frac{18}{4} + \frac{13}{4}\right) = 16 \end{aligned}$$

und damit

$$u^2 \cdot 16 + v^2 \cdot 4 = 16 \quad \text{oder} \quad \frac{u^2}{1} + \frac{v^2}{4} = 1 \quad (K)$$

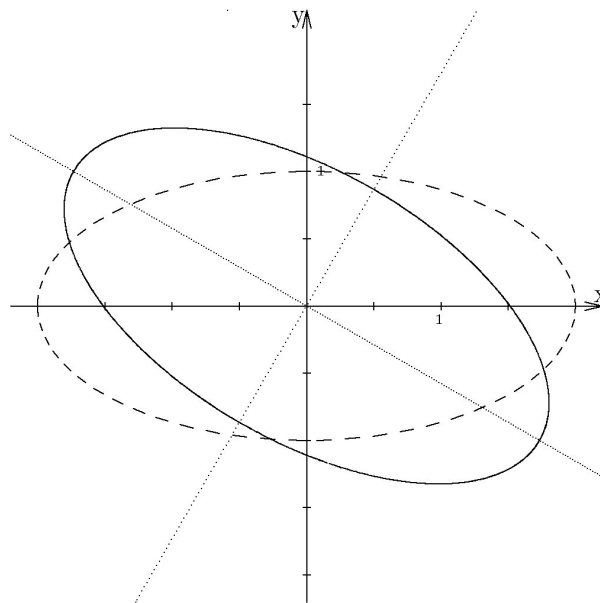


Bild zu Aufgabe 34.1: Hauptachsentransformation

$$7 \cdot x^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot y + 13 \cdot y^2 - 16 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{u^2}{1} + \frac{v^2}{4} = 1$$

Lösung als Eigenwertproblem (siehe REP Seite 219)

Wir schreiben die Gleichung (A) in Matrizenform:

$$7 \cdot x^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot y + 13 \cdot y^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 16 \quad (L)$$

Wenn die Matrixgleichung die Normalform eines Kegelschnittes beschreiben soll, dann muss ein Koordinatensystem (u, v) bestimmt werden, für das entsprechend der Gleichung (L) gilt:

$$a_{11} \cdot u^2 + a_{22} \cdot v^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (u \ v) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 16 \quad (M1)$$

Wenn $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix}$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 bezüglich einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ sind, dann gilt nach Definition von Eigenwert und Eigenvektor

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} = \lambda_i \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} \quad \text{für } i \in \{1, 2\} \quad (M2)$$

oder

$$(A - \lambda_i \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (M2)$$

oder

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda_i & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } i \in \{1, 2\} \quad (M3)$$

und damit

$$\begin{aligned} (x_{i,1} \ x_{i,2}) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} &= (x_{i,1} \ x_{i,2}) \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} \\ &= (x_{i,1} \ x_{i,2}) \cdot \lambda_i \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} = \lambda_i \cdot (x_{i,1}^2 + x_{i,2}^2) \quad \text{für } i \in \{1, 2\} \end{aligned} \quad (M4)$$

Wenn daher die Achsen eines Kegelschnittes die Eigenvektoren der zugehörigen Matrix sind, dann hat die beschreibende Gleichung bezüglich des durch die Eigenvektoren definierten Koordinatensystems Normalform.

Folglich ist es zur Lösung der hier gestellten Aufgabe sinnvoll, Eigenwerte und -vektoren der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}$$

aus der Gleichung (L) zu bestimmen.

Bestimmung der Eigenwerte

Es ist

$$\left| \begin{pmatrix} 7 - \lambda & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 - \lambda \end{pmatrix} \right| = (7 - \lambda) \cdot (13 - \lambda) - (3 \cdot \sqrt{3}) \cdot (3 \cdot \sqrt{3}) = 91 - 20 \cdot \lambda + \lambda^2 - 27 = \lambda^2 - 20 \cdot \lambda + 64 \quad (N)$$

Die Nullstellen dieser Determinante (N) sind dann die Eigenwerte, also

$$\lambda_{1,2} = 10 \pm \sqrt{10^2 - 64} = 10 \pm 6 = \begin{cases} 16 \\ 4 \end{cases} \quad \text{wir setzen } \lambda_1 = 16 \text{ und } \lambda_2 = 4 \quad (O)$$

Zu diesen Eigenwerten $\lambda_1 = 16$ und $\lambda_2 = 4$ werden nun die Eigenvektoren bestimmt:

Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 16$ bezüglich der Matrix B :

Es werden (Eigen-)Vektoren (x_1, y_1) gesucht, für die gilt:

$$\begin{pmatrix} 7 - 16 & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 - 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (P)$$

Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} -9 \cdot x_1 + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot y_1 = 0 \\ 3 \cdot \sqrt{3} \cdot x_1 - 3 \cdot y_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y_1 \Rightarrow 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y_1 - 3 \cdot y_1 = 0 \quad (Q)$$

Folglich kann y_1 beliebig gewählt werden:

$$(x_1, y_1) = y_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right)$$

Wir wählen y_1 so, dass der Vektor (x_1, y_1) die Länge 1 hat, d.h. dass gilt $\frac{1}{3} \cdot y_1^2 + y_1^2 = 1$ also $y_1^2 = \frac{3}{4}$ und damit $y_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$.

Daraus ergibt sich $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}$.

Dann lautet also der (normierte) Eigenvektor $(x_{1,n}, y_{1,n})$ zu dem Eigenwert $\lambda_1 = 16$:

$$(x_{1,n}, y_{1,n}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \right) \quad (R1)$$

Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ bezüglich der Matrix B :

Es werden (Eigen-)Vektoren (x_2, y_2) gesucht, für die gilt:

$$\begin{pmatrix} 7-4 & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot x_2 + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot y_2 = 0 \\ 3 \cdot \sqrt{3} \cdot x_2 + 9 \cdot y_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_2 = -\sqrt{3} \cdot y_2 \Rightarrow -3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot y_2 + 9 \cdot y_2 = 0$$

Folglich kann auch y_2 beliebig gewählt werden:

$$(x_2, y_2) = y_2 \cdot \left(-\sqrt{3}, 1 \right)$$

Wir wählen y_2 so, dass der Vektor (x_2, y_2) die Länge 1 hat, d.h. dass gilt $3 \cdot y_2^2 + y_2^2 = 1$ also $y_2^2 = \frac{1}{4}$ und damit $y_2 = \frac{1}{2}$.

Daraus ergibt sich $x_2 = -\sqrt{3} \cdot y_2 = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$.

Dann lautet also der (normierte) Eigenvektor $(x_{2,n}, y_{2,n})$ zu dem Eigenwert $\lambda_2 = 4$:

$$(x_{2,n}, y_{2,n}) = \left(-\frac{1}{2} \sqrt{3}, \frac{1}{2} \right) \quad (R2)$$

Prinzipiell ist das Problem jetzt gelöst: Wählt man als Hauptachsen die beiden normierten Eigenvektoren $(x_{1,n}, y_{1,n})$ und $(x_{2,n}, y_{2,n})$, so hat die Kurve bezüglich dieser "Basis" als Achsen ihre Normalform, und die Halbachsen sind λ_1 beziehungsweise λ_2 .

Aber wir können auch weiter rechnen:

Wir entscheiden uns, den Eigenvektor (x_1, y_1) auf die x -Achse abzubilden, also nach (R1) soll

$$(x_{1,n}, y_{1,n}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right) \text{ auf } (1, 0)$$

abgebildet werden.

Dann sollte der Eigenvektor (x_2, y_2) auf die y -Achse, also nach (R2)

$$(x_{2,n}, y_{2,n}) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right) \text{ auf } (0, 1)$$

so abgebildet werden, dass die

$$\text{zugehörige Matrix } A = \begin{pmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} \\ y_{1,n} & y_{2,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

eine Drehmatrix ist, d.h. $|A| = 1$. Diese Bedingung ist für A erfüllt.

(Bemerkung: Die Matrix A ist eine Drehmatrix - es kann der Drehwinkel φ bestimmt werden ($\cos(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot (x_{1,n} + y_{1,n}) = \frac{1}{2} \cdot 1$) und dieser ist dann $\varphi = 60^\circ$ - wie in Gleichung (I).)

Die „gedrehten“ Koordinaten sollen mit (u, v) bezeichnet werden. Ein beliebiger Punkt (x, y) im ursprünglichen Koordinatensystem hängt dann durch die folgende Gleichung mit den Koordinaten im gedrehten Koordinatensystem zusammen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (S1)$$

Die Gleichung (S1) kann transponiert werden:

$$(x \ y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\top = \left(A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)^\top = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^\top \cdot A^\top = (u \ v) \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad (S2)$$

Nun kann - unter Verwendung der Gleichung (S1) und (S2) - in der Gleichung (L) das gedrehte Koordinatensystem verwendet werden:

$$\begin{aligned} (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 16 \\ \Leftrightarrow (u \ v) \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= 16 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot (u \ v) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= 16 \quad (T) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot (u \ v) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7+9 & -4 \cdot \sqrt{3} \\ 16 \cdot \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= 16 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot (u \ v) \cdot \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= 16 \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\frac{1}{4} \cdot (64 \cdot u^2 + 16 \cdot v^2) = 16$$

oder

$$\frac{u^2}{1} + \frac{v^2}{4} = 1$$

Aufgabe 34.2:

Bestimmen Sie die Kurve, die durch die Gleichung

$$2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y - y^2 - 6 = 0 \quad (A)$$

beschrieben wird.

Lösung der Aufgabe 34.2:

Es wird angenommen, dass die Kurve ein Kegelschnitt ist, dessen Hauptachsen um einen Winkel φ gedreht wurden.

Wir wählen die Koordinaten (u, v) für dieses gedrehte Koordinatensystem; dann gibt es einen Winkel φ , so dass zwischen dem (x, y) -Koordinatensystem und dem (u, v) -Koordinatensystem folgender Zusammenhang besteht:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (B)$$

oder Direkte Lösung

Zur Abkürzung ersetzen wir $s := \sin(\varphi)$ und $c := \cos(\varphi)$. Dann ergibt sich aus der Gleichung (B):

$$\begin{aligned} x &= u \cdot \cos(\varphi) - v \cdot \sin(\varphi) = u \cdot c - v \cdot s \\ y &= u \cdot \sin(\varphi) + v \cdot \cos(\varphi) = u \cdot s + v \cdot c \end{aligned}$$

Diese Werte werden in die Gleichung (A) eingesetzt:

$$2 \cdot (u \cdot c - v \cdot s)^2 + 4 \cdot (u \cdot c - v \cdot s) \cdot (u \cdot s + v \cdot c) - (u \cdot s + v \cdot c)^2 - 6 = 0$$

oder

$$\begin{aligned} &2 \cdot (u^2 \cdot c^2 - 2 \cdot u \cdot c \cdot v \cdot s + v^2 \cdot s^2) \\ &+ 4 \cdot (u^2 \cdot c \cdot s + u \cdot v \cdot (c^2 - s^2) - v^2 \cdot c \cdot s) \\ &- (u^2 \cdot s^2 + 2 \cdot u \cdot v \cdot c \cdot s + v^2 \cdot c^2) = 6 \end{aligned} \quad (C)$$

Diese Gleichung (C) kann nach Potenzen von u bzw. v sortiert werden:

$$\begin{aligned} &u^2 \cdot (2 \cdot c^2 + 4 \cdot c \cdot s - s^2) \\ &+ u \cdot v \cdot (-4 \cdot c \cdot s + 4 \cdot (c^2 - s^2) - 2 \cdot c \cdot s) \\ &+ v^2 \cdot (2 \cdot s^2 - 4 \cdot c \cdot s - c^2) = 6 \end{aligned} \quad (D)$$

Aus der Gleichung (D) kann der Winkel φ bestimmt werden, denn wenn der Koeffizient von $u \cdot v$ gleich 0 ist, d.h. wenn gilt

$$-4 \cdot c \cdot s + 4 \cdot (c^2 - s^2) - 2 \cdot c \cdot s = 0 \quad (E)$$

dann hat die Gleichung (D) Normalform.

Nun wird der Winkel φ bestimmt, für den die Gleichung (E) gilt:

Wegen $\tan(\varphi) = \frac{s}{c} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$ wird die Gleichung (E) durch c^2 geteilt:

$$\begin{aligned} &-4 \cdot \tan(\varphi) + 4 \cdot (1 - \tan^2(\varphi)) - 2 \cdot \tan(\varphi) = 0 \\ &\text{oder} \\ &4 \cdot \tan^2(\varphi) + 6 \cdot \tan(\varphi) - 4 = 0 \end{aligned} \quad (F)$$

Diese quadratische Gleichung (F) hat die Lösungen

$$\tan(\varphi_{1,2}) = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases} \quad (G)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wählen wir willkürlich

$$\tan(\varphi) = \frac{1}{2} \quad (H)$$

Nach F+H ist dann

$$s = \sin(\varphi) = \frac{\tan(\varphi)}{\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad c = \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

sowie $c \cdot s = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$ und $s^2 = \frac{1}{5}$ und $c^2 = \frac{4}{5}$

(I)

Werden diese Werte in Gleichung (D) eingesetzt, so ergibt sich

$$u^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) + v^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{5} - 4 \cdot \frac{2}{5} - \frac{4}{5}\right) = 6 \quad \text{oder} \quad u^2 \cdot 3 - v^2 \cdot 2 = 6$$

und damit

$$\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{3} = 1 \quad (J)$$

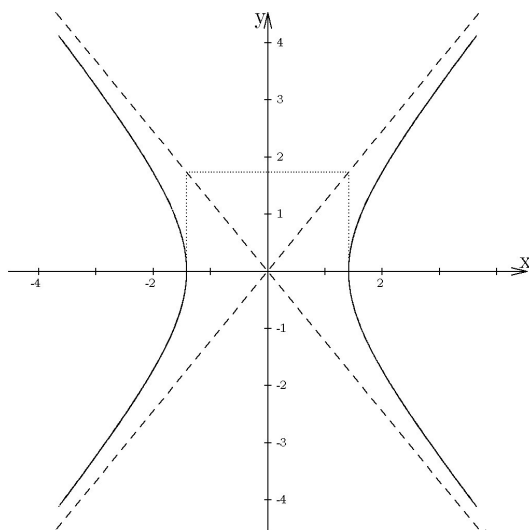


Bild zu Aufgabe 34.2:
Hauptachsentransformation
Hyperbel $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$
in Hauptachsenlage

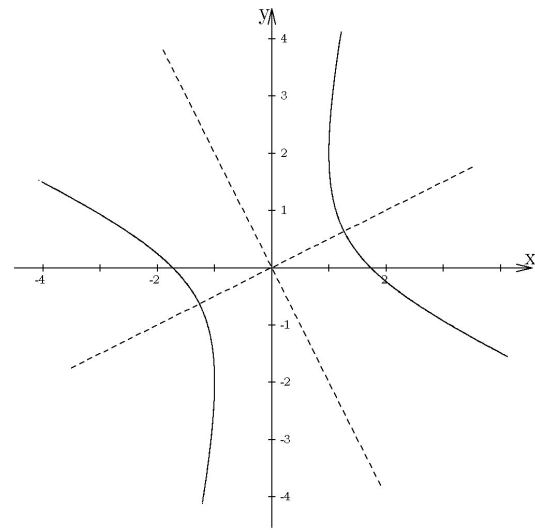


Bild zu Aufgabe 34.2:
Hauptachsentransformation
 $2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y - y^2 - 6 = 0$
und $\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{3} = 1$

Aufgabe 34.3

Bestimmen Sie die Fläche, die durch die Gleichung

$$16 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 + 16 \cdot z^2 + 40 \cdot x \cdot z - 36 = 0 \quad (A)$$

beschrieben wird.

Lösung der Aufgabe 34.3

REP Seite 224:

Allgemeine Form einer Quadrik

in Koordinaten-schreibweise:

$$a_{1,1} \cdot x^2 + a_{2,2} \cdot y^2 + a_{3,3} \cdot z^2 + 2 \cdot a_{1,2} \cdot x \cdot y + 2 \cdot a_{2,3} \cdot y \cdot z + 2 \cdot a_{1,3} \cdot x \cdot z + a_{0,0} = 0$$

in Matrizen-schreibweise (symmetrische Matrix):

$$\vec{x}^\top \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + a_{0,0} = 0 \text{ mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

also hier:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 0 & 20 \\ 0 & 9 & 0 \\ 20 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 36 = 0 \text{ mit } M := \begin{pmatrix} 16 & 0 & 20 \\ 0 & 9 & 0 \\ 20 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Man bestimmt:

(1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als Eigenwerte von M :

Es ist

$$\begin{vmatrix} 16 - \lambda & 0 & 20 \\ 0 & 9 - \lambda & 0 \\ 20 & 0 & 16 - \lambda \end{vmatrix} = (9 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 16 - \lambda & 20 \\ 20 & 16 - \lambda \end{vmatrix} = (9 - \lambda) \cdot [(16 - \lambda)^2 - 400] \\ = (9 - \lambda) \cdot [\lambda^2 - 32 \cdot \lambda - 144] = (9 - \lambda) \cdot (\lambda + 4) \cdot (\lambda - 36) = 0$$

also erhalten wir die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -4 \text{ und } \lambda_3 = 36.$$

Ergebnis: $9 \cdot u^2 - 4 \cdot v^2 + 36 \cdot w^2 = 36$, also ein Ellipsoid. Es sind noch die Achsenrichtungen von u, v und w zu bestimmen.

(2) Zu diesen Eigenwerten gehören folgende Eigenvektoren bzw. Eigenräume:

(2a) Eigenraum V_9 zum Eigenwert $\lambda_1 = 9$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 16 - \lambda_1 & 0 & 20 \\ 0 & 9 - \lambda_1 & 0 \\ 20 & 0 & 16 - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 7 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\vec{x}_9 = \mu \cdot (0, 1, 0) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}$$

(2b) Eigenraum V_{-4} zum Eigenwert $\lambda_2 = -4$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 16 - \lambda_2 & 0 & 20 \\ 0 & 9 - \lambda_2 & 0 \\ 20 & 0 & 16 - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 20 & 0 & 20 \\ 0 & 13 & 0 \\ 20 & 0 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\boxed{\vec{x}_{-4} = \mu \cdot (1, 0, -1) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}}$$

(2c) Eigenraum V_{36} zum Eigenwert $\lambda_3 = 36$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 16 - \lambda_3 & 0 & 20 \\ 0 & 9 - \lambda_3 & 0 \\ 20 & 0 & 16 - \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} -20 & 0 & 20 \\ 0 & -27 & 0 \\ 20 & 0 & -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\boxed{\vec{x}_{36} = \mu \cdot (1, 0, -1) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}}$$

(3) Drehmatrix aus den Eigenvektoren:

Wir können nun festlegen, auf welchen der drei (auf die Länge 1 normierten) Eigenvektoren \vec{x}_9 , \vec{x}_{-4} und \vec{x}_{36} jeweils die Einheits-Vektoren $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ abgebildet werden sollen.

Dabei ist darauf zu achten, dass auch die drei Bildvektoren \vec{x}_9 , \vec{x}_{-4} und \vec{x}_{36} in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden (wie die 3 Einheitsvektoren $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$) so dass die Determinante der zugehörigen Drehmatrix gleich +1 ist.

Wir versuchen es mit folgendem Ansatz:

$$\begin{cases} (1, 0, 0) \rightarrow \vec{x}_9 = (0, 1, 0) \\ (0, 1, 0) \rightarrow \vec{x}_{-4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1, 0, -1) \\ (0, 0, 1) \rightarrow \vec{x}_{36} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow D := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Leider ist $\det(D) = -1$.

Nun vertauschen wir die beiden letzten Vektoren und versuchen es neu:

$$\begin{cases} (1, 0, 0) \rightarrow \vec{x}_9 = (0, 1, 0) \\ (0, 1, 0) \rightarrow \vec{x}_{36} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1, 0, 1) \\ (0, 0, 1) \rightarrow \vec{x}_{-4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow D := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dann ist $\det(D) = 1$.

(4) Drehachse und Drehwinkel:

Die Drehachse \vec{a} ist ein Eigenvektor der Drehmatrix D zum Eigenwert 1.

Für den zu \vec{a} gehörigen Drehwinkel α gilt:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\text{spur}D - 1)}$$

(4a) Berechnung des Drehwinkels α von D :

Es ist $\text{spur}D = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

und folglich $\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\text{spur}D - 1) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - 1)$,

also $\boxed{\alpha = 149^\circ}$.

(4b) Berechnung der Drehachse von D :

Zunächst ist der Eigenvektor zu dem Eigenwert 1 der Drehmatrix D zu finden - falls die Matrix einen solchen Eigenwert besitzt. Also suchen wir nach den Eigenwerten der (richtigen) Drehmatrix D : Es ist

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 1 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - \lambda \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \right) \right]$$

$$= -\lambda^3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \lambda^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \lambda + 1$$

Also ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert von D , denn es ist

$$-1^3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + 1 = 0$$

Die Drehachse $G_{dreh} = \mathbb{R} \cdot (x_D, y_D, z_D)$ dieser Drehung wird dann bestimmt als der Eigenvektor zu dem Eigenwert $\lambda = 1$, dh. es muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 0 - 1 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 1 & 0 - 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

| Zeile | x_D | y_D | z_D | r.S. | Regie |
|-------|---|--------------------------|---|------|--|
| 1 | -1 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | 1 |
| 2 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 0 $x_D = y_D$ |
| 3 | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ | 0 | 1 |
| 4 | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ $z_D = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot y_D$ |
| 5 | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 6 | 0 | A | 0 | 0 | |

mit $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$

also ist y_D nach Zeile 6 als freier Parameter zu wählen, z.B. $y_D = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dann ist $z_D = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot y_D = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ nach Zeile 4, also $z_D = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

und $x_D = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nach Zeile 2.

Damit ist die Drehachse definiert durch

Drehachse: $G_{dreh} := \mathbb{R} \cdot (x_D, y_D, z_D) = \mathbb{R} \cdot (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}) = \mathbb{R} \cdot (1, 1, \sqrt{2} - 1)$

(5) Hauptachsentransformation:

Unsere Ausgangsgleichung in Matrixschreibweise lautete:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 0 & 20 \\ 0 & 9 & 0 \\ 20 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 36 = 0 \text{ mit } M := \begin{pmatrix} 16 & 0 & 20 \\ 0 & 9 & 0 \\ 20 & 0 & 16 \end{pmatrix},$$

also

$$\boxed{\vec{x}^\top \cdot M \cdot \vec{x} = 36}$$

Nun wollen wir das natürliche Koordinatensystem um die Drehachse G_{dreh} mit dem Drehwinkel α drehen. Dazu haben wir die Drehmatrix D bestimmt.

Also wählen wir $\boxed{\vec{x} = D \cdot \vec{u}}$ mit $\vec{u} = (u, v, w)$.

Also ergibt sich die folgende Beschreibung aus der obigen Darstellung:

$$36 = \vec{x}^\top \cdot M \cdot \vec{x} = (D \cdot \vec{u})^\top \cdot M \cdot D \cdot \vec{u}.$$

Wegen $(D \cdot \vec{u})^\top = \vec{u}^\top \cdot D^\top$ wird aus dieser Gleichung

$$36 = \vec{u}^\top \cdot D^\top \cdot M \cdot D \cdot \vec{u}.$$

Hierin ist

$$D^\top = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

und damit

$$\begin{aligned} D^\top \cdot M \cdot D &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 0 & 20 \\ 0 & 9 & 0 \\ 20 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 18 \cdot \sqrt{2} & 0 & 18 \cdot \sqrt{2} \\ -2 \cdot \sqrt{2} & 0 & 2 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also gilt:

$$36 = \vec{x}^\top \cdot M \cdot \vec{x} = \vec{u}^\top \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = 9 \cdot u^2 + 36 \cdot v^2 - 4 \cdot w^2.$$

oder

$$\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{1} - \frac{w^2}{9} = 1.$$

Eine solche Normalform beschreibt ein einschaliges Hyperboloid.

Aufgabe 34.4

Bestimmen Sie die Fläche, die durch die Gleichung

$$5 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 + 18 \cdot z^2 - 6 \cdot x \cdot y = 72 \quad (A)$$

beschrieben wird.

Lösung der Aufgabe 34.4

REP Seite 224:

Allgemeine Form einer Quadrik

in Koordinaten-schreibweise:

$$a_{1,1} \cdot x^2 + a_{2,2} \cdot y^2 + a_{3,3} \cdot z^2 + 2 \cdot a_{1,2} \cdot x \cdot y + 2 \cdot a_{2,3} \cdot y \cdot z + 2 \cdot a_{1,3} \cdot x \cdot z + a_{0,0} = 0$$

in Matrizen-schreibweise (symmetrische Matrix):

$$\vec{x}^T \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + a_{0,0} = 0 \text{ mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

also hier:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 72 = 0 \text{ mit } M := \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Man bestimmt:

(1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als Eigenwerte von M :

Es ist

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 & 0 \\ -3 & 5 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 18 - \lambda \end{vmatrix} = (18 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ -3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (18 - \lambda) \cdot [(5 - \lambda)^2 - 9]$$

$$= (18 - \lambda) \cdot [\lambda^2 - 10 \cdot \lambda + 16] = (18 - \lambda) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 8) = 0$$

also erhalten wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$ und $\lambda_3 = 18$.

Ergebnis: $2 \cdot u^2 + 8 \cdot v^2 + 18 \cdot w^2 = 72$, also ein Ellipsoid. Es sind noch die Achsenrichtungen von u , v und w zu bestimmen.

(2) Zu diesen Eigenwerten gehören folgende Eigenvektoren bzw. Eigenräume:

(2a) Eigenraum V_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda_1 & -3 & 0 \\ -3 & 5 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\vec{x}_1 = \mu \cdot (1, 1, 0) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}$$

(2b) Eigenraum V_2 zum Eigenwert $\lambda_2 = 8$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda_2 & -3 & 0 \\ -3 & 5 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\vec{x}_2 = \mu \cdot (1, -1, 0) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}$$

(2c) Eigenraum V_2 zum Eigenwert $\lambda_3 = 18$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda_3 & -3 & 0 \\ -3 & 5 - \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 18 - \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} -15 & -3 & 0 \\ -3 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\boxed{\vec{x}_3 = \mu \cdot (0, 0, 1) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}}$$

(3) Drehmatrix aus den Eigenvektoren:

Wir können nun festlegen, auf welchen der drei (auf die Länge 1 normierten) Eigenvektoren \vec{x}_1 , \vec{x}_2 und \vec{x}_3 der Vektor $(1, 0)$ abgebildet werden soll.

Wir wählen: $(1, 0, 0)$ auf $\vec{x}_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1, 1, 0)$,

$(0, 1, 0)$ auf $\vec{x}_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1, -1, 0)$ und

$(0, 0, 1)$ auf $\vec{x}_3 = (0, 0, 1)$:

$$D := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) Drehachse und Drehwinkel:

Die Drehachse \vec{a} ist ein Eigenvektor der Drehmatrix D zum Eigenwert 1.

Für den zu \vec{a} gehörigen Drehwinkel α gilt:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\text{spur}D - 1)}$$

Berechnung des Drehwinkels α von D :

Es ist $\text{spur}D = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + 1 = 1$

und folglich $\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\text{spur}D - 1) = 0$, also $\alpha = 90^\circ$.

Berechnung der Drehachse von D :

Zunächst ist der Eigenvektor zu dem Eigenwert 1 der Drehmatrix D zu finden - falls die Matrix einen solchen Eigenwert besitzt. Dann würde für die Drehachse $\mathbb{R} \cdot (x_D, y_D, z_D)$ gelten:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - 1 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(5) Diagonalmatrix als Hauptachsentransformation:

$$\text{Es ist } D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt $D^{-1} = D^\top$ (weil für D gilt $|D| = 1$).

Also ist

$$D^{-1} \cdot M \cdot D = D^\top \cdot M \cdot D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 34.5

Es seien

$$q(x, y, z) = 5 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 - 4 \cdot z^2 + 8 \cdot x \cdot y = 36 \quad \text{und} \quad \vec{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (A)$$

- a) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit $q = \vec{x}^\top \cdot A \cdot \vec{x}$.
- b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A .
- c) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix D als Drehmatrix des \mathbb{R}^3 mit der Drehachse als Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Lösung der Aufgabe 34.5a

In Matrizen-Schreibweise lautet die Gleichung (A):

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 36 \quad \text{mit} \quad M := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Lösung der Aufgabe 34.5b $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als Eigenwerte von M :

Es ist

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 & 0 \\ 4 & 5 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = [(5 - \lambda)^2 \cdot (-4 - \lambda)] - [(-4 - \lambda) \cdot 16] \\ = (-4 - \lambda) \cdot [(5 - \lambda)^2 - 16] = (-4 - \lambda) \cdot (25 - 10 \cdot \lambda + \lambda^2 - 16) \\ = (-4 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 10 \cdot \lambda + 9) = (-4 - \lambda) \cdot (9 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) = 0$$

also erhalten wir die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 9 \text{ und } \lambda_3 = 1.$$

Lösung der Aufgabe 34.5c

Zu den Eigenwerten aus 34.5b) gehören folgende Eigenvektoren bzw. Eigenräume:

(c1) Eigenraum V_{-4} zum Eigenwert $\lambda_1 = -4$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda_1 & 4 & 0 \\ 4 & 5 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$V_{-4} = \mu \cdot (0, 0, 1) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R} \text{ und } \vec{x}_1 = (0, 0, 1)$$

(c2) Eigenraum V_9 zum Eigenwert $\lambda_2 = 9$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda_2 & 4 & 0 \\ 4 & 5 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$V_9 = \mu \cdot (1, 1, 0) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R} \text{ und } \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1, 0)$$

(c3) Eigenraum V_1 zum Eigenwert $\lambda_3 = 1$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda_3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 - \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 - \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\boxed{V_1 = \mu \cdot (1, -1, 0) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}}$$

Es ist

$$\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also bilden die Eigenvektoren $\vec{x}_1 = (0, 0, 1)$, $\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1, 0)$ und $\vec{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1, 1, 0)$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem und eine Orthonormalbasis.

Die zugehörige Drehmatrix lautet daher:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 34.6

Es seien

$$q(x, y, z) = 4 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 + 4 \cdot z^2 + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y \cdot z + 2 \cdot x \cdot z = 12 \quad \text{und} \quad \vec{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (A)$$

- a) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit $q = \vec{x}^\top \cdot M \cdot \vec{x}$.
- b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von M .
- b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix D als Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 mit den Eigenwerten von M .

Lösung der Aufgabe 34.6a)

Es ist

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 12 \text{ mit } M := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung der Aufgabe 34.6b):

Man bestimmt:

(1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als Eigenwerte von A :

Es werden alle Lösungen λ gesucht mit

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 4 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = [(4 - \lambda)^3 + 1 + 1] - [(4 - \lambda) \cdot 3] \\ = 64 - 48 \cdot \lambda + 12 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 12 + 3 \cdot \lambda = 54 - 45 \cdot \lambda + 12 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

also erhalten wir die Eigenwerte

$$\boxed{\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3 \text{ und } \lambda_3 = 6.}$$

Lösung der Aufgabe 34.6c):

Zu diesen Eigenwerten gehören folgende Eigenvektoren bzw. Eigenräume:

(c1) Eigenraum V_3 zum (doppelten) Eigenwert $\lambda_1 = 3$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 - \lambda_1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 - \lambda_1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

| x | y | z | r.S. | Regie |
|-----|-----|-----|------|--------------------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | -1 -1 $x = -y - z$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | |

Wähle y und z als Parameter; dann ist

$$V_3 = y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der Eigenraum zu dem Eigenwert λ_1 .

(c2) Eigenraum V_6 zum (einfachen) Eigenwert $\lambda_3 = 6$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 - \lambda_3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 - \lambda_3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 - \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

| x | y | z | r.S. | Regie |
|-----|-----|-----|------|--------------------------|
| -2 | 1 | 1 | 0 | 2 -1 $y = 2 \cdot x - z$ |
| 1 | -2 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | -2 | 0 | 1 |
| -3 | 0 | 3 | 0 | 1 $z = x$ |
| 3 | 0 | -3 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | |

Wähle x als Parameter; dann ist

$$\vec{x}_3 = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der Eigenvektor zu dem Eigenwert λ_3 .

Wir wählen nun als Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1, 0, 1) \in V_3 \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1, 1, 1)$$

und bilden den dritten Basisvektor: $\vec{e}_3 := \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$. Es ist dann

$$\vec{e}_3 := \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit lautet dann die Drehmatrix D :

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(und diese hat den Eigenwert 1.)

Basis $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$$F = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3, 3 \cdot u^2 + 6 \cdot v^2 + 3 \cdot w^2 = 12\}$$

oder

$$F = \left\{ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{4} = 12 \right\}$$

Zusatz: Nun setzen wir $\vec{x} = D \cdot \vec{u}$. Dann ist

$$\begin{aligned} D^T \cdot A \cdot D &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{3}} \\ -\frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{6}{\sqrt{6}} & -\frac{3}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit $12 = (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (u \ v \ w) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

oder

$$\boxed{3 \cdot u^2 + 6 \cdot v^2 + 3 \cdot w^2 = 12 \quad \text{oder} \quad \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{4} = 12}$$