



36 Mittelwert, Standardabweichung, Normalverteilung

Aufgabe:

Es wird vorausgesetzt, dass Sie eine physikalische Grösse n mal gemessen haben. Die Messwerte seien $x_1, \dots, x_n$.

Berechnen Sie das arithmetische Mittel μ dieser Messwerte und geben Sie das Intervall an, in dem 95% der Messwerte liegen würden, wenn diese um μ normalverteilt wären.

Lösung der Aufgabe:

Bekannt ist der Begriff der „Normalverteilung“ $N(\mu, \sigma^2)$, z.B. aus F+H, Seite 200:

$$N(\mu, \sigma^2) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

mit

$$\begin{array}{l|l} \mu & \text{„Erwartungswert“ oder „Mittelwert“} \\ \sigma & \text{„Standardabweichung“} \\ \sigma^2 & \text{„Varianz“} \end{array}$$

Um die Genauigkeit einer Messung zu beschreiben, kann z.B.

1. für den Erwartungswert μ das arithmetische Mittel von n Versuchsdaten x_i , also $\mu =$

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

2. für die Varianz $\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$

gewählt werden. Dazu gehört dann die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$.

Von dieser Kurve ist bekannt:

Der Flächeninhalt zwischen x -Achse und Kurve beträgt

1. im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$: 68%

2. im Intervall $[\mu - 2 \cdot \sigma, \mu + 2 \cdot \sigma]$: 95%

3. im Intervall $[\mu - 3 \cdot \sigma, \mu + 3 \cdot \sigma]$: 99%

1-, 2- und 3- σ -Intervalle

Die Meßgenauigkeit kann dann durch das Intervall $[\mu - 2 \cdot \sigma, \mu + 2 \cdot \sigma]$ beschrieben werden: Falls die Messungen normalverteilt sind, würden 95% aller Messwerte innerhalb dieses Intervalles liegen.

Beispiel: Messwerte, sortiert nach ihrer Grösse:

Messwert	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8
	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Dann ist

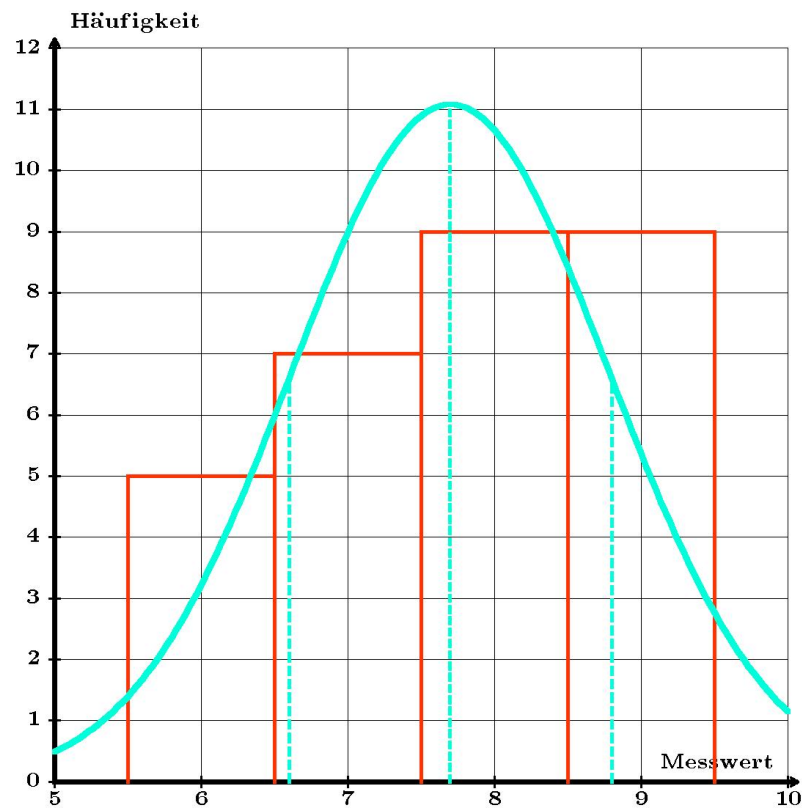
$$\mu = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{30} \cdot (5 \cdot 6 + 7 \cdot 7 + 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9) = \frac{1}{30} \cdot (30 + 49 + 72 + 81) = \frac{232}{30} \approx 7.7$$

und

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{29} \cdot (5 \cdot (6 - 7.7)^2 + 7 \cdot (7 - 7.7)^2 + 9 \cdot (8 - 7.7)^2 + 9 \cdot (9 - 7.7)^2) \\ &= \frac{1}{29} \cdot (5 \cdot 2.89 + 7 \cdot 0.49 + 9 \cdot 0.09 + 9 \cdot 1.69) = \frac{33.9}{29} \approx 1.17 \end{aligned}$$

und damit $\sigma = 1.08$ Damit würde bei Normalverteilung der Messwerte gelten:

$$6.5 \leq \text{Messwert} \leq 8.9 \quad \text{gilt für 95\% aller Messwerte}$$



Die x -Achse ist aufgeteilt in Intervalle: $[5.5, 6.5]$, $[6.5, 7.5]$, ...

Ein Balkendiagramm (in rot) zeigt die jeweilige Häufigkeit der Messwerte.

Der Flächeninhalt der Balken beträgt 30.

Es ergab sich aus den Messwerten
das arithmetische Mittel $\mu = 7.7$ und
die Standardabweichung $\sigma = 1.08$.

Damit konnte die Normalverteilungskurve für diese Messwerte so gezeichnet werden,
dass zwischen der x -Achse und der Kurve der gleiche Flächeninhalt entsteht
wie bei dem Balkendiagramm, also 30:

$$y = 30 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Die Zeichnung enthält auch den Mittelwert μ
sowie die Fehlergrenzen für 95% einer normalverteilten Messung
(jeweils gestrichelt)