



## 37 Statistik

### 37.1 Wahrscheinlichkeiten

#### Literatur:

E.Kreyszig: *Statistische Methoden und ihre Anwendungen*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1968.

H.-P. Beck-Bornhold, H.-H. Dubben: *Der Hund, der Eier legt* rororo sachbuch 61154.

#### Aufgabe 37.1 (Statistik für Kuchenesser)

Sie backen einen Kuchen. In Abwandlung des Originalrezeptes geben Sie 1 Kaffeebohne in den fertigen Teig. Bitte gründlich umrühren. Nach dem Backen soll der Kuchen in 20 gleich große Stücke zerschnitten werden.

**Frage 37.1.1:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die Kaffeebohne in dem ersten Stück befindet?

**Antwort 37.1.1:**  $W_1 = \frac{1}{20}$ .

Nun geben Sie 2 Kaffeebohnen in den fertigen Teig und rühren wieder gründlich um.

**Frage 37.1.2:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich je eine Kaffeebohne in dem ersten und in dem zweiten Stück befindet?

**Antwort 37.1.2:**  $\frac{2}{20}$  für die erste Bohne und  $\frac{1}{20}$  für die zweite Bohne,

insgesamt also  $W_2 = \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{20}$ .

Nun geben Sie 20 Kaffeebohnen in den fertigen Teig und rühren wieder gründlich um.

**Frage 37.1.2.0:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich je eine Kaffeebohne in jedem Stück befindet?

**Antwort 37.1.2.0:**  $\frac{20}{20}$  für die erste Bohne und  $\frac{1}{20}$  für die zwanzigste Bohne, insgesamt also

$W_{20} = \frac{20}{20} \cdot \frac{19}{20} \cdots \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{20}$ .

**Frage 37.1.2.1:** Wenn daher jeder der 86 000 000 Bundesbürger einen Kuchen mit 20 Kaffeebohnen backen würde - in wie vielen Kuchen würde dann erwartungsgemäß in jedem Stück genau eine Kaffeebohne zu finden sein?

**Antwort 37.1.2.1:**  $W_{20} = \frac{20!}{20^{20}} = \frac{1}{43\,099\,804}$ , also sind im Mittel etwa 2 Kuchen mit gleichmäßiger Bohnenverteilung zu erwarten.

**Problem 37.1.3 (Leukämie-Szenario)**

Als Versuchsfeld benötigen wir ein Quadrat mit  $36 = 6 \times 6$  Feldern und zwei unterscheidbare Würfel (z.B. einen schwarzen und einen weißen). Jedes Feld ist durch seine Koordinaten  $(x, y)$  (mit  $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  und  $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ) gekennzeichnet. Der weiße Würfel gibt den  $y$ -Wert (also die Zeile) und der schwarze den  $x$ -Wert (also die Spalte) an.

Um unserem Versuchsfeld einen realistischen Bezug zu geben, wird es als Landkarte interpretiert:

Am Ort  $K = (5, 2)$  befindet sich ein Kernkraftwerk.

Am Ort  $C = (2, 5)$  befindet sich eine Chemiefabrik.

Am Ort  $M = (2, 2)$  befindet sich eine Mülldeponie.

An den Orten  $H_1 = (4, 6)$ ,  $H_2 = (5, 5)$  und  $H_3 = (6, 4)$  befindet sich eine Hochspannungsleitung.

Nun wird gewürfelt: eine weiße 2 und eine schwarze 4 beschreiben, dass am Ort  $(4, 2)$  z.B. ein Fall einer seltenen Erkrankung wie einer Leukämie im Kindesalter aufgetreten ist.

Die durchschnittliche Leukämie-Rate **auf dem gesamten Versuchsfeld** ist jetzt  $W_g = \frac{1}{36}$ , denn wir haben einen Treffer auf 36 Kästchen.

Die Leukämie-Rate **auf dem Feld (4,2)** ist jetzt  $W_f = 1$ , denn wir haben einen Treffer auf 1 Kästchen.

Die Leukämie-Rate in diesem Kästchen ist also um den Faktor 36 höher als der Durchschnitt. (Das ist zwar zweifellos eine richtige Feststellung, aber ohne Relevanz, denn irgendwo musste der Treffer ja schliesslich landen!)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der zehnte Wurf zu einem bereits markierten Feld führt, beträgt  $W_{10} = \frac{9}{36} = 0.25 = 25\%$ !

**Aufgabe 37.1.4:** Würfeln Sie 36 mal und tragen Sie die Ergebnisse in eine Zeichnung ein (im Durchschnitt sollte - wie bei dem Kuchen - ein Treffer pro Feld erfolgt sein).

|                       |   |         |   |   |                |                |                |
|-----------------------|---|---------|---|---|----------------|----------------|----------------|
| w<br>e<br>i<br>s<br>s | 6 |         |   |   | H <sub>1</sub> |                |                |
|                       | 5 |         | C |   |                | H <sub>2</sub> |                |
|                       | 4 |         |   |   |                |                | H <sub>3</sub> |
|                       | 3 |         |   |   |                |                |                |
|                       | 2 |         | M |   |                | K              |                |
|                       | 1 |         |   |   |                |                |                |
|                       |   | 1       | 2 | 3 | 4              | 5              | 6              |
|                       |   | schwarz |   |   |                |                |                |

Aufgabe 37.1.4: Leukämie-Szenario

Die (unterschiedlichen) Ergebnisse etwa innerhalb unserer Gruppe lassen sich interpretieren als die Leukämiefälle an verschiedenen Tagen (oder Wochen). Dann gibt es also Tage, an denen im Bereich von Kraftwerken mehr Leukämiefälle auftreten als anderswo!

### POISSON-Verteilung

Nach POISSON gilt

$$P(x, m) = \frac{m^x \cdot e^{-m}}{x!}$$

wobei

- bei  $w$  Würfeln und  $f$  Feldern ist  $m = \frac{w}{f}$ , also ist  $m = 1$  bei  $w = 36$  Würfeln und  $f = 36$  Feldern
- $x$  die Anzahl der in einem Feld  $F$  zu erwartenden Treffer ist
- $P(x, m)$  die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass auf einem Feld  $F$  gerade  $x$  Treffer (Leukämiefälle) auftreten.

**Frage 37.1.5:** Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf einem Feld  $x = 3$  Treffer auftreten?

**Antwort 37.1.5:** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf einem Feld  $x = 3$  Treffer auftreten, ist

$$P(3, 1) = \frac{1^3 \cdot e^{-1}}{3!} = \frac{1}{e \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \approx \frac{1}{16.3} \approx 0.061 = 6.1\%.$$

**Frage 37.1.6:** Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf einem Feld  $x = 0$  Treffer auftreten?

**Antwort 37.1.6:** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf einem Feld  $x = 0$  Treffer auftreten, ist

$$P(0, 1) = \frac{1^0 \cdot e^{-1}}{0!} = \frac{1}{e} \approx 0.368 = 36.8\%.$$

**Bemerkung zu 37.1.5 und 37.1.6:** Dabei ist es erstaunlicherweise egal, ob wir 36 Treffer auf 36 Felder oder 1000 Treffer auf 1000 Felder verteilen - wichtig ist nur, dass  $m = \frac{36}{36} = \frac{1000}{1000} = 1$  ist.

**Frage 37.1.7:** Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für eine Gleichverteilung mit genau einem Treffer in jedem Feld?

**Antwort 37.1.7:** Die Wahrscheinlichkeit für eine Gleichverteilung mit genau einem Treffer in jedem Feld beträgt  $\frac{36!}{36^{36}} = \frac{1}{285\,992\,600\,000\,000}$ .

## 37.2 Verteilungen

### Häufigkeitsverteilung

Bei statistischen Erhebungen werden die Beobachtungsergebnisse üblicherweise in der Reihenfolge nacheinander in Formulare eingetragen, in der sie anfallen. Die dabei entstehende Liste heißt das **Protokoll** oder die **Urliste**.

Die folgende Tabelle 37.3 ist eine solche Urliste. Sie enthält 90 Werte, nämlich die Druckfestigkeit von 90 Betonwürfeln mit jeweils 20 cm Kantenlänge. Das sind also  $n(= 90)$  Zahlen  $x_i$  als Ergebnisse von 90 Beobachtungen (Messungen) ( $i = 1, \dots, 90$ ). Diese bilden zusammen eine **Stichprobe** vom **Umfang**  $n$ , aus der man später Schlüsse auf die zugehörige Grundgesamtheit ziehen will. Die Zahlen heißen **Stichprobenwerte**.

### Beispiel ES:

Druckfestigkeit in  $kg/cm^2$  von Betonwürfeln mit 20 cm Kantenlänge (nach W.Eberl und G.Schneeweiss, Öst. Ing. Arch. **11**, 1957, 173)

|   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 358 | 392 | 368 | 324 | 307 | 308 | 235 | 228 | 237 | 317 |
| 1 | 346 | 276 | 299 | 284 | 293 | 330 | 376 | 381 | 333 | 389 |
| 2 | 371 | 333 | 334 | 364 | 443 | 489 | 401 | 434 | 354 | 366 |
| 3 | 328 | 341 | 374 | 279 | 302 | 320 | 453 | 458 | 410 | 261 |
| 4 | 279 | 244 | 353 | 345 | 361 | 301 | 402 | 379 | 250 | 230 |
| 5 | 278 | 335 | 342 | 300 | 290 | 352 | 358 | 239 | 349 | 315 |
| 6 | 359 | 397 | 394 | 324 | 336 | 352 | 328 | 302 | 316 | 285 |
| 7 | 285 | 303 | 314 | 318 | 355 | 271 | 245 | 209 | 246 | 272 |
| 8 | 317 | 322 | 386 | 328 | 378 | 368 | 353 | 419 | 344 | 355 |

**Tabelle 37.3:** Stichprobenwerte aus Beispiel ES

Wie stellt man nun eine Stichprobe übersichtlich dar?

### Klassenbildung

Kommen in einer Stichprobe sehr viele zahlenmäßig verschiedene Werte vor, so ist die Tabelle oder die Zeichnung der Häufigkeitsfunktion meist noch recht unübersichtlich. Wir können dann aber die Stichprobe weiter vereinfachen durch eine **Klassenbildung**.

Dabei gehen wir von einem Intervall aus, in dem alle Stichprobenwerte liegen. Dieses unterteilen wir in Teilintervalle, die als **Klassenintervalle** bezeichnet werden. Die Mitten dieser Intervalle heißen **Klassenmitten**. Alle Stichprobenwerte in einem solchen Intervall bilden zusammen jeweils eine **Klasse** von Werten. Deren Anzahl heißt die *zu dem betreffenden gehörige absolute Häufigkeit* oder kürzer die **absolute Klassenhäufigkeit** der Stichprobenwerte.

Division durch den Stichprobenumfang ergibt daraus die **relative Klassenhäufigkeit**.

Die folgende Tabelle 37.3a) beschreibt obiges Beispiel ES, in dem ein Klassenbildung vorgenommen wurde.

### Aufgabe 37.3

Vervollständigen Sie diese Tabelle.

| Klassenmitte<br>[kg/cm <sup>2</sup> ] | Klassenintervall<br>[kg/cm <sup>2</sup> ] | Absolute Häufigkeit |      | Relative<br>Häufigkeit |
|---------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------|------|------------------------|
|                                       |                                           | Strichliste         | Wert |                        |
| 200                                   | 187,5-212,5                               | /                   | 1    | 0,011                  |
| 225                                   | 212,5-237,5                               | ////                | 4    | 0,044                  |
| 250                                   | 237,5-262,5                               | ////////            | 6    | 0,067                  |
| 275                                   | 262,5-287,5                               |                     | 9    | 0,100                  |
| 300                                   | 287,5-312,5                               |                     | 10   | 0,111                  |
| 325                                   | 312,5-337,5                               |                     | 19   | 0,211                  |
| 350                                   | 337,5-362,5                               |                     | 17   | 0,189                  |
| 375                                   | 362,5-387,5                               |                     | 11   | 0,122                  |
| 400                                   | 387,5-412,5                               |                     | 7    | 0,078                  |
| 425                                   | 412,5-437,5                               |                     | 2    | 0,022                  |
| 450                                   | 437,5-462,5                               |                     | 3    | 0,033                  |
| 475                                   | 462,5-487,5                               |                     | 0    | 0,000                  |
| 500                                   | 487,5-512,5                               |                     | 1    | 0,011                  |

**Tabelle 37.3a):** Stichprobenwerte nach Klassenbildung aus Beispiel ES

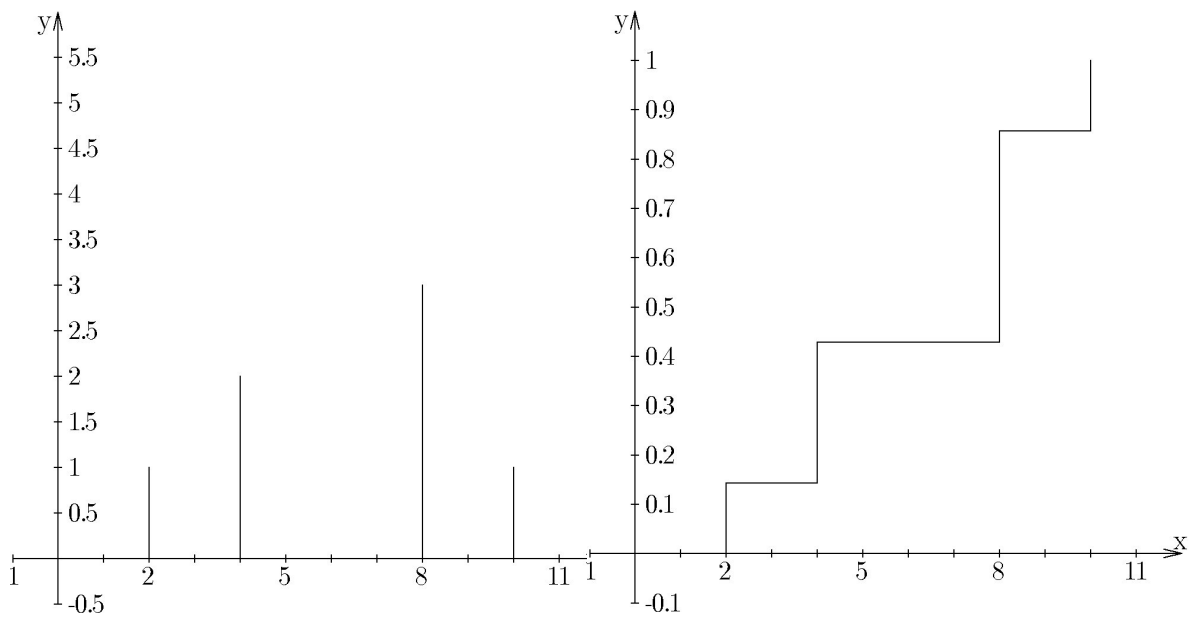
## Darstellung als Dichte- oder als Verteilungsfunktion

Eine Stichprobe lässt sich durch eine **Häufigkeits-** bzw. **Dichte**-Funktion darstellen oder auch durch eine **Summenhäufigkeits-** bzw. **Verteilungs**-Funktion darstellen.

**Beispiel 37.4:** Stichprobenwerte:

|        |   |   |   |   |   |   |    |
|--------|---|---|---|---|---|---|----|
| $i$    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7  |
| $x(i)$ | 2 | 4 | 4 | 8 | 8 | 8 | 10 |

**Beispiel 37.4:** Stichprobenwerte



*Beispiel 37.4:*  
Häufigkeits-Funktion  
(Dichte-Funktion)

*Beispiel 37.4:*  
Summenhäufigkeits-Funktion  
(Verteilungs-Funktion)

**Mittelwert**

Der **Mittelwert** einer Verteilung ist das arithmetische Mittel der Stichprobenwerte und wird mit  $\mu$  bezeichnet:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

In Beispiel 37.4 ist dann  $\mu = \frac{44}{7} \approx 6.29$ .

**Varianz und Standardabweichung**

Die **Varianz** einer Verteilung wird mit  $\sigma^2$  bezeichnet:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n - 1}$$

Die **Standardabweichung** einer Verteilung wird mit  $\sigma$  bezeichnet:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n - 1}}$$

(Die Varianz ist ein Maß für die **Streuung** der Werte, die die betreffende Zufallsvariable annehmen kann <sup>a)</sup>.)

---

<sup>a)</sup> Vorsicht: Die Standardabweichung ist **nicht** ein Maß für die Streuung, auch wenn diese (für  $\sigma > 1$ ) kleiner ist als die Varianz! Nach E. Kreyszig: a.a.O., S.39: Leider bezeichnen gewisse Autoren die Standardabweichung  $\sigma$  als Streuung. Wenn man solche Literatur liest, muß man aufpassen.

Die Varianz  $\sigma^2$  der Verteilung in Beispiel 37.4 beträgt  $\sigma^2 = 7.347$ , und die Standardabweichung damit  $\sigma = 2.71$ .

**Aufgabe 37.5:**

Berechnen Sie Mittelwert, Varianz und Standardabweichung für Beispiel ES

a) nach Tabelle 37.3

b) nach Tabelle 37.3a): Verwenden Sie dazu die jeweilige Klassenmitte und die zugehörige Häufigkeit.

**Lösung von Aufgabe 37.5:****Beispiel ES:**

37.5a) Mittelwert  $m = 332$  nach Tabelle 1, Varianz  $\sigma^2 = 3131$ , Standardabweichung  $\sigma = 56$ .

37.5b) Wir sortieren zunächst die Tabelle 1 nach der Größe:

Druckfestigkeit in  $kg/cm^2$  von Betonwürfeln mit  $20\text{ cm}$  Kantenlänge (nach W.Eberl und G.Schneeweiss, Öst. Ing. Arch. bf 11, 1957, 173)

|   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 209 | 228 | 230 | 235 | 237 | 239 | 244 | 245 | 246 | 250 |
| 1 | 261 | 271 | 272 | 276 | 278 | 279 | 279 | 284 | 285 | 285 |
| 2 | 290 | 293 | 299 | 300 | 301 | 302 | 302 | 303 | 307 | 308 |
| 3 | 314 | 315 | 316 | 317 | 317 | 318 | 320 | 322 | 324 | 324 |
| 4 | 328 | 328 | 328 | 330 | 333 | 333 | 334 | 335 | 336 | 341 |
| 5 | 342 | 344 | 345 | 346 | 349 | 352 | 352 | 353 | 353 | 354 |
| 6 | 355 | 355 | 358 | 358 | 359 | 361 | 364 | 366 | 368 | 368 |
| 7 | 371 | 374 | 376 | 378 | 379 | 381 | 386 | 389 | 392 | 394 |
| 8 | 397 | 401 | 402 | 410 | 419 | 434 | 443 | 453 | 458 | 489 |

**Tabelle 37.5a):** Stichprobenwerte aus Beispiel ES  
sortiert

Dann ergeben sich folgende Klassenmitten und zugehörige Häufigkeiten:

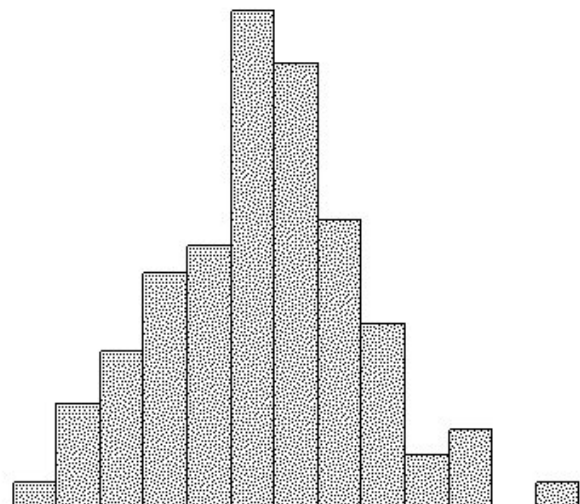
| Häufigkeit   | 1   | 4   | 6   | 9   | 10  | 19  | 17  | 11  | 7   | 2   | 3   | 0   | 1   |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Klassenmitte | 200 | 225 | 250 | 275 | 300 | 325 | 350 | 375 | 400 | 425 | 450 | 475 | 500 |

**Tabelle 37.5b):** Häufigkeitsverteilung nach Klassenbildung zu Beispiel ES

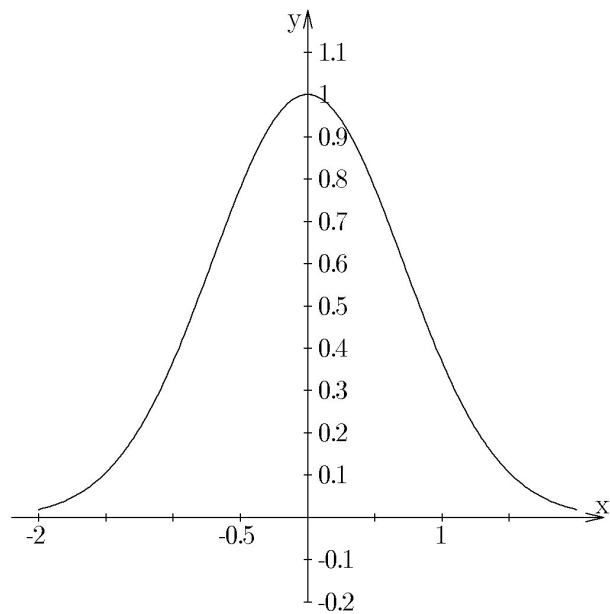
Dann ergibt sich:

Mittelwert  $m_k = 331$  Varianz  $\sigma_k^2 = 3252$

Standardabweichung  $\sigma_k = 57$ . Diese Werte sind etwa gleich den Werten der einzelnen 90 Stichprobenwerte.



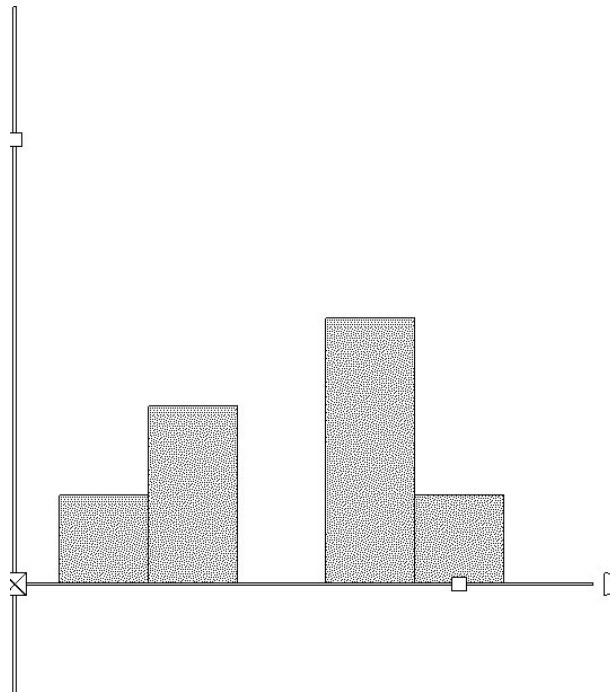
*Aufgabe 37.5b)* (Beispiel ES)  
Klasseneinteilung.

**Aufgabe 37.6****37.6a)** Zeichnen Sie die Kurve  $f(x) = e^{-x^2}$ .**37.6b)** Zeichnen Sie die Normalverteilungskurve für das Beispiel 37.4.**37.6c)** Zeichnen Sie die Normalverteilungskurve für das Beispiel ES.**Lösung von Aufgabe 37.6**

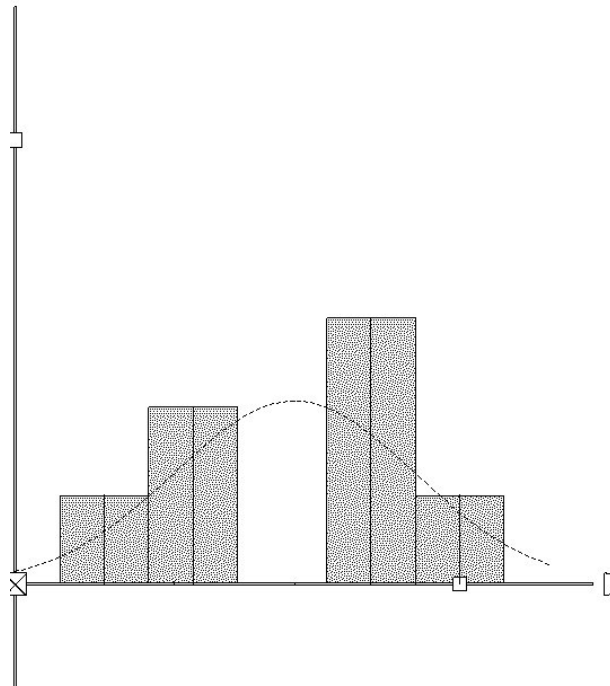
*Aufgabe 37.6a):*  
Kurve  $f(x) = e^{-x^2}$ .

Lösung zu Aufgabe 37.6b)

Wir teilen hier in Klassen der Breite ES auf:



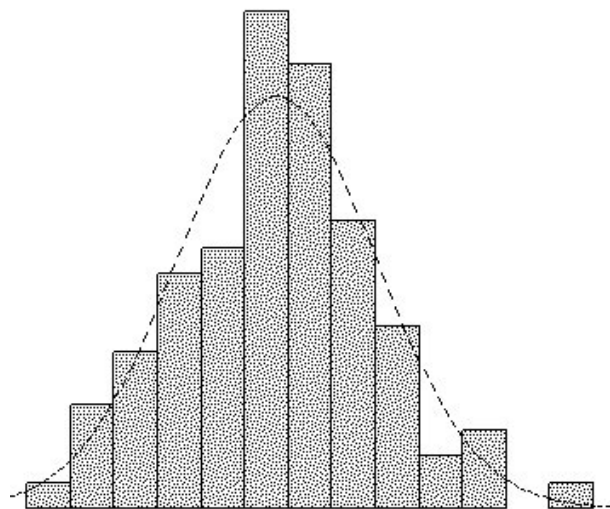
*Aufgabe 37.6b)* (Beispiel 37.4)  
Klasseneinteilung



*Aufgabe 37.6b)* (Beispiel 37.4)  
Klasseneinteilung mit Normalverteilung

Der Flächeninhalt unter der Normalverteilungskurve ist normiert und beträgt 1.

Daher wurde in dem Bild 37.6b) der Flächeninhalt unserer Dichtefunktion ( $F = 2 \cdot 7$ ) mit dem Flächeninhalt unter der Normalverteilungskurve gleichgesetzt, d.h. die Funktion  $f$  der Normalverteilung mit 14 überhöht:  $f(x) = \frac{14}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$  Bei dieser Darstellung von Beispiel 37.4 fällt auf, dass der Mittelwert in einer Klasse liegt, in der kein Stichprobenwert lag!



*Aufgabe 37.6c):* (Beispiel ES)  
Klasseneinteilung mit Normalverteilung

In dem Bild 37.6c) wurde der Flächeninhalt unserer Dichtefunktion ( $F = 25 \cdot 90$ ) mit dem Flächeninhalt unter der Normalverteilungskurve gleichgesetzt, d.h. die Funktion  $f$  der Normalverteilung mit 2250 überhöht:  $f(x) = \frac{2250}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

### 37.3 energetische Normalverteilung

#### energetische Verteilung

Hier soll z.B. die Verteilung von Lärmpegeln untersucht werden.

Es soll auf der  $x$ -Achse

bei  $x = 2$  der Pegelwert  $L = 60 \text{ dB}(A)$

angegeben sein. Dazu wird eine Abbildung  $f$  gesucht mit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ L & \rightarrow f(L) \end{cases}$ .

Die Summe zweier Pegel  $L_1$  und  $L_2$  ist definiert durch

$$L_1 \oplus L_2 := 10 \cdot \log_{10} (10^{L_1 \cdot 0.1} + 10^{L_2 \cdot 0.1}) \quad (1)$$

Dieser (energetischen) Summe von  $L_1$  und  $L_2$  soll auf der  $x$ -Achse die (lineare) Summe  $x_1 + x_2$  zugeordnet werden, also  $f(L_1 \oplus L_2) = f(L_1) + f(L_2)$ .

#### Aufgabe 37.7

Zeigen Sie, dass für jedes  $a \in \mathbb{R}_+$  die Abbildung  $f_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ L & \rightarrow a \cdot 10^{0.1 \cdot L} \end{cases}$  folgende Eigenschaft hat:

$$f_a(L_1 \oplus L_2) = f_a(L_1) + f_a(L_2) \quad (2)$$

wobei  $L_1 \oplus L_2$  wie in (1) definiert ist.

#### Lösung von Aufgabe 37.7

Es ist

$$\begin{aligned} f_a(L_1 \oplus L_2) &= f_a(10 \cdot \log_{10} [10^{0.1 \cdot L_1} + 10^{0.1 \cdot L_2}]) = a \cdot 10^{0.1 \cdot (10 \cdot \log_{10} [10^{0.1 \cdot L_1} + 10^{0.1 \cdot L_2}])} \\ &= a \cdot 10^{\log_{10} [10^{0.1 \cdot L_1} + 10^{0.1 \cdot L_2}]} = a \cdot [10^{0.1 \cdot L_1} + 10^{0.1 \cdot L_2}] \\ &= a \cdot 10^{0.1 \cdot L_1} + a \cdot 10^{0.1 \cdot L_2} = f_a(L_1) + f_a(L_2) \end{aligned}$$

#### Aufgabe 37.8

Bestimmen Sie die Zahl  $a \in \mathbb{R}^*$  so, dass für die Abbildung  $f_a$  gilt  $f_a(60) = 2$ . Berechnen Sie dann  $f_a(80)$  und zeigen Sie, dass für  $L_1 = 60$  und  $L_2 = 80$  die Eigenschaft (2) erfüllt ist.

#### Lösung von Aufgabe 37.8

Nach Aufgabe 37.7 ist  $a$  so zu bestimmen, dass gilt  $2 = f_a(60) = a \cdot 10^{0.1 \cdot 60} = a \cdot 10^6$ , also

$$a = 2 \cdot 10^{-6}$$

Für diesen Wert von  $a$  ist  $f_a(80) = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8 = 2 \cdot 10^2 = 200$ ,

und für die Summe  $S = 60 \oplus 80 = 10 \cdot \log_{10} (10^6 + 10^8) \approx 80.043$  ist

$$f_a(S) = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{8.0043} = 2 \cdot 10^{2.0043} \approx 202.$$

Andererseits ist  $f_a(60) + f_a(80) = 2 + 200 = 202$ .

Also ist die Eigenschaft (2) erfüllt.

**Aufgabe 37.9**

Der Mittelwert  $M(L_1, L_2)$  zweier Schallpegel  $L_1$  und  $L_2$  ist definiert durch

$$M(L_1, L_2) := 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{1}{2} \cdot [10^{L_1 \cdot 0.1} + 10^{L_2 \cdot 0.1}] \right) \quad (3)$$

Berechnen Sie  $M(60, 80)$  und den  $x$ -Wert  $f_a(M(L_1, L_2))$  und zeigen Sie, dass  $f_a(M(L_1, L_2))$  Mittelpunkt von  $f_a(L_1)$  und  $f_a(L_2)$  ist.

**Lösung von Aufgabe 37.9**

Nach (3) ist  $M(60, 80) \approx 77.033 \text{ dB(A)}$  und daher ist

$$f_a(M(L_1, L_2)) = f_a(77.033) = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{7.7033} \approx 2 \cdot 50.5 = 101.$$

$f_a(M(L_1, L_2)) = 101$  ist Mittelpunkt von  $f_a(L_1) = 2$  und  $f_a(L_2) = 200$ .

**Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsvariablen**

Die beobachteten Werte einer normalverteilten Zufallsvariablen mit dem Mittelwert  $\mu$  und der Standardabweichung  $\sigma$  verteilen sich (bei einer großen Zahl von Versuchen) ungefähr folgendermaßen:

- Im Intervall  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$  liegen 68 % aller beobachteter Werte
- Im Intervall  $[\mu - 2 \cdot \sigma, \mu + 2 \cdot \sigma]$  liegen 95.5 % aller beobachteter Werte
- Im Intervall  $[\mu - 3 \cdot \sigma, \mu + 3 \cdot \sigma]$  liegen 99.7 % aller beobachteter Werte

## 37.4 test auf Normalverteilung

### $\chi^2$ -Test

Mit dem  $\chi^2$ -Test wird die Hypothese getestet, dass  $F(x)$  die Verteilungsfunktion der Grundgesamtheit ist, der die Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  entnommen ist.

1. Man „schätze“ den Mittelwert  $\tilde{\mu}$  und die Standardabweichung  $\tilde{\sigma}$  aus den Messwerten:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{und} \quad \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{\mu})^2}$$

2. Man unterteile die  $x$ -Achse in  $K$  Intervalle  $I_1, I_2, \dots, I_K$ , und zwar derart, dass jedes Intervall mindestens 5 Werte der gegebenen Stichprobe enthält.  
Für jedes Intervall  $I_j$  bestimme  $b_j$  die Anzahl der Stichprobenwerte, die in  $I_j$  liegen. (Ein Wert, der auf eine Intervallgrenze fällt, wird je zur Hälfte in den beiden angrenzenden Intervallen gezählt.)

3. Aus  $F(x)$  berechne man für jedes Intervall  $I_j$  die Wahrscheinlichkeit  $p_j$ , mit der die betreffende Zufallsvariable  $X$  irgendeinen Wert aus  $I_j$  annimmt. Daraus berechne man die Anzahl

$$e_j = n \cdot p_j$$

der theoretisch in  $I_j$  zu erwartenden Stichprobenwerte.

4. Man berechne die Abweichung

$$\chi_0^2 = \sum_{j=1}^K \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j} \quad (4)$$

5. Man wähle eine Signifikanzzahl  $\alpha$ , z.B.  $\alpha = 5\%$ .

6. Man bestimme die Lösung  $c$  der Gleichung

$$P(\chi^2 \leq c) = 1 - \alpha$$

aus der Tafel der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $K$  Freiheitsgraden ( $K$ =Anzahl der Intervalle).

Ist  $\chi_0^2 \leq c$ , so wird die Hypothese angenommen.

Ist  $\chi_0^2 > c$ , so wird die Hypothese verworfen.

### Aufgabe 37.10

Bei einer Vorbeifahrtsgeschwindigkeit von  $100 \text{ km/h}$  seien die Vorbeifahrtpegel einer Lokomotive und 18 Güterzügen gemessen worden (die Angabe „Anz“ gibt die Anzahl der einzelnen Wagen (Lok und Güterwagen) an):

| Bez.     | Nr | Pegel | Anz | Bez.     | Nr | Pegel | Anz | Bez.      | Nr | Pegel | Anz |
|----------|----|-------|-----|----------|----|-------|-----|-----------|----|-------|-----|
| Lok      | 1  | 78.9  | 1   |          |    |       |     |           |    |       |     |
| Kessel   | 2  | 81.3  | 6   | gemischt | 8  | 86.6  | 37  | Container | 14 | 88.7  | 13  |
| Rungen   | 3  | 84.6  | 20  | Tank     | 9  | 87.0  | 26  | gemischt  | 15 | 89.4  | 27  |
| gemischt | 4  | 85.6  | 16  | Flach    | 10 | 87.5  | 19  | gemischt  | 16 | 90.1  | 23  |
| gemischt | 5  | 85.9  | 23  | gemischt | 11 | 87.8  | 17  | Schotter  | 17 | 90.4  | 36  |
| gemischt | 6  | 86.1  | 18  | Kessel   | 12 | 88.1  | 23  | gedeckt   | 18 | 91.0  | 32  |
| gemischt | 7  | 86.1  | 33  | gemischt | 13 | 88.4  | 25  | gedeckt   | 19 | 92.1  | 28  |

Tabelle 120.1: Beispiel 3

- 37.10a) Wählen Sie  $a$  aus Aufgabe 37.7 so, dass gilt  $f_a(78) = 2$ .
- 37.10b) „Schätzen“ Sie unter der Annahme einer (energetischen) Normalverteilung der Pegel aus Beispiel 3 den Mittelwert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  dieses Güterzuges.
- 37.10c) Zeichnen Sie die Normalverteilungskurve für diese Verteilung mit zwei Maßstäben auf der x-Achse.
- 37.10d) Bei einer Normalverteilung liegen 68 % der Messwerte innerhalb des Intervalls  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ . Bestimmen Sie diese Grenzen und untersuchen Sie, ob 68 % der Messwerte in diesem Intervall liegen.
- 37.10e) Testen Sie die Hypothese, dass die Stichprobe aus Beispiel 3 einer normalverteilten Grundgesamtheit entstammt.

**Lösung von Aufgabe 37.10 a)**

Es soll gelten  $f_a(78) = 2$ , also muss gelten  $2 = a \cdot 10^{7.8}$  oder

$$a = 3.169785 \cdot 10^{-8}$$

Dann ergeben sich folgende Koordinaten

| Pegel | $x$ -Wert | Pegel | $x$ -Wert | Pegel | $x$ -Wert |
|-------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|
| 78.0  | 2.0       | 80.0  | 3.2       | 82.0  | 5.0       |
| 84.0  | 8.0       | 86.0  | 12.6      | 88.0  | 20.0      |
| 90.0  | 31.7      | 92.0  | 50.2      | 94.0  | 79.6      |

Tabelle 37.10.2: Beispiel 3

Ferner ergibt sich für die Lage der Messwerte im energetischen Koordinatensystem:

| $i$ | Pegel<br>$p(i)$ | $x$<br>$x_i$ | Anz<br>$a(i)$ | $i$ | Pegel<br>$p(i)$ | $x$<br>$x_i$ | Anz<br>$a(i)$ | $i$ | Pegel<br>$p(i)$ | $x$<br>$x_i$ | Anz<br>$a(i)$ |
|-----|-----------------|--------------|---------------|-----|-----------------|--------------|---------------|-----|-----------------|--------------|---------------|
| 1   | 78.9            | 2.5          | 1             | 8   | 86.6            | 14.5         | 37            | 14  | 88.7            | 23.5         | 13            |
| 2   | 81.3            | 4.3          | 6             | 9   | 87.0            | 15.9         | 26            | 15  | 89.4            | 27.6         | 27            |
| 3   | 84.6            | 9.1          | 20            | 10  | 87.5            | 17.8         | 19            | 16  | 90.1            | 32.4         | 23            |
| 4   | 85.6            | 11.5         | 16            | 11  | 87.8            | 19.1         | 17            | 17  | 90.4            | 34.8         | 36            |
| 5   | 85.9            | 12.3         | 23            | 12  | 88.1            | 20.5         | 23            | 18  | 91.0            | 39.9         | 32            |
| 6   | 86.1            | 12.9         | 18            | 13  | 88.4            | 21.9         | 25            | 19  | 92.1            | 51.4         | 28            |
| 7   | 86.1            | 12.9         | 33            |     |                 |              |               |     |                 |              |               |

Tabelle 37.10.3: Beispiel 3

**Lösung von Aufgabe 37.10 b)**

Wir wollen untersuchen, ob diese Messwerte zu einer Normalverteilung gehören.

**ohne Berücksichtigung der Wagenzahl**

Dazu „schätzen“ wir den Mittelwert und die Standardabweichung. Zu dem (geschätzten, d.h. unter der Annahme einer Normalverteilung bestimmten) energetischen Mittelwert:

$$\tilde{\mu}_e = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{1}{19} \cdot \sum_{i=1}^{19} 10^{0.1 \cdot p(i)} \right) = 88.055 \text{ dB(A)}$$

Dazu gehört der  $x$ -Wert  $\tilde{\mu}_a = f_a(\tilde{\mu}_e) = 20.3$ .

Nun kann arithmetisch gerechnet werden: Zu dem Mittelwert  $\tilde{\mu}_a = 20.3$  ergibt sich die (arithmetische) Varianz

$$\tilde{\sigma}_a^2 = \frac{1}{19} \cdot \sum_{i=1}^{19} (x_i - \tilde{\mu}_a)^2 = 147$$

und damit die Standardabweichung

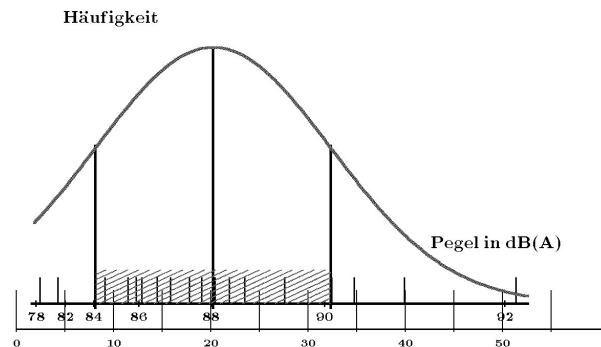
$$\tilde{\sigma}_a = 12.1$$

Wir schätzen daher, dass unsere Stichprobe einer Normalverteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{1}{\tilde{\sigma}_a \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - \tilde{\mu}_a}{\tilde{\sigma}_a}\right)^2} = \frac{1}{12.1 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - 20.3}{12.1}\right)^2}$$

entstammt.

### Lösung von Aufgabe 37.10 c)



Aufgabe 37.10 c): Güterzug-Normalverteilungskurve  
(ohne Berücksichtigung der Wagenanzahl)

### Lösung von Aufgabe 37.10 d)

Dann sollten sich 68 % der Messwerte im Intervall

$$[\tilde{\mu}_a - \tilde{\sigma}_a, \tilde{\mu}_a + \tilde{\sigma}_a] = [8.2, 32.3]$$

befinden!.

In dieses Intervall fallen die Züge  $i = 3$  bis  $i = 15$ , also 13 von 19 Zügen. - Das sind genau 68 %.

Aber damit ist noch nicht gezeigt, dass wir hier eine Normalverteilung vorliegen haben; dazu ist erst der  $\chi^2$ -Test erforderlich.

### mit Berücksichtigung der Wagenzahl

#### Lösung von Aufgabe 37.10 b)

Dann ergibt sich

$$\tilde{\mu}_e = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{1}{243} \cdot \sum_{i=1}^{19} a(i) \cdot 10^{0.1 \cdot p(i)} \right) = 85.6 \text{ dB(A)}$$

Dazu gehört der  $x$ -Wert  $\tilde{\mu}_a = f_a(\tilde{\mu}_e) = 11.5$ .

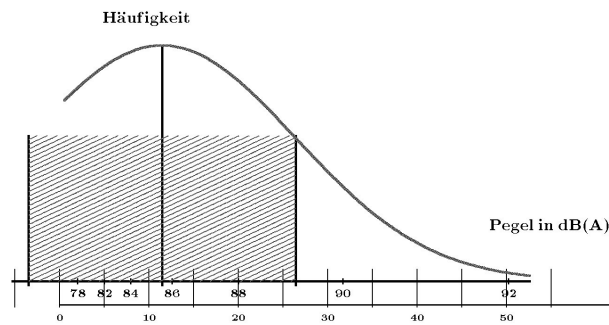
Nun kann arithmetisch gerechnet werden: Zu dem Mittelwert  $\tilde{\mu}_a = 11.5$  ergibt sich die (arithmetische) Varianz

$$\tilde{\sigma}_a^2 = \frac{1}{243} \cdot \sum_{i=1}^{19} a(i) \cdot (x_i - \tilde{\mu}_a)^2 = 224$$

und damit die Standardabweichung

$$\tilde{\sigma}_a = 14.950$$

und damit das folgende Bild:

**Lösung von Aufgabe 37.10 c)**

*Aufgabe 37.10:* Güterzug, geschätzter Mittelwert  $\tilde{\mu}_e = 85.6 \text{ dB(A)}$   
mit Klasseneinteilung

**Lösung von Aufgabe 37.10 d)**

Dann sollten sich 68 % der Messwerte im Intervall

$$[\tilde{\mu}_a - \tilde{\sigma}_a, \tilde{\mu}_a + \tilde{\sigma}_a] = [-3.466, 26.434]$$

befinden!.

In dieses Intervall fallen die Züge  $i = 0$  bis  $i = 14$ , und dazu zählen 277 Wagen von 423 Wagen.  
- Das sind 65 %.

**Lösung von Aufgabe 37.10 e)**

Wir verwenden nun die „Gebrauchsanweisung“ für den  $\chi^2$ -Test.

**1.** Wir haben bereits den Mittelwert  $\tilde{\mu}_a = 11.5$  und die Standardabweichung  $\tilde{\sigma}_a = 14.950$  aus den Messwerten abgeschätzt.

**2.** Hier soll eine Aufteilung in Klassen erfolgen:

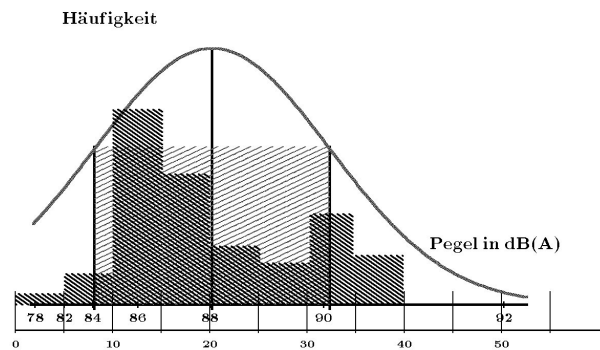
| Bez.     | Nr | Pegel | Anz | Bez.     | Nr | Pegel | Anz | Bez.      | Nr | Pegel | Anz |
|----------|----|-------|-----|----------|----|-------|-----|-----------|----|-------|-----|
| Lok      | 1  | 78.9  | 1   |          |    |       |     |           |    |       |     |
| Kessel   | 2  | 81.3  | 6   | gemischt | 8  | 86.6  | 37  | Container | 14 | 88.7  | 13  |
| Rungen   | 3  | 84.6  | 20  | Tank     | 9  | 87.0  | 26  | gemischt  | 15 | 89.4  | 27  |
| gemischt | 4  | 85.6  | 16  | Flach    | 10 | 87.5  | 19  | gemischt  | 16 | 90.1  | 23  |
| gemischt | 5  | 85.9  | 23  | gemischt | 11 | 87.8  | 17  | Schotter  | 17 | 90.4  | 36  |
| gemischt | 6  | 86.1  | 18  | Kessel   | 12 | 88.1  | 23  | gedeckt   | 18 | 91.0  | 32  |
| gemischt | 7  | 86.1  | 33  | gemischt | 13 | 88.4  | 25  | gedeckt   | 19 | 92.1  | 28  |

*Tabelle 37.10.4:* Beispiel 3, Aufteilung in Klassen gleicher (linearer) Breite

| Klasse | Pegel      |               | Anz   | Klasse | Pegel      |               | Anz   |
|--------|------------|---------------|-------|--------|------------|---------------|-------|
| $j$    | $x$ -Werte | dB(A)-Werte   | $b_j$ | $j$    | $x$ -Werte | dB(A)-Werte   | $b_j$ |
| 1      | 0 ... 5    | 0 ... 82.0    | 7     | 6      | 25 ... 30  | 89.0 ... 89.8 | 27    |
| 2      | 5 ... 10   | 82.0 ... 85.0 | 20    | 7      | 30 ... 35  | 89.8 ... 90.4 | 59    |
| 3      | 10 ... 15  | 85.0 ... 86.8 | 127   | 8      | 35 ... 40  | 90.4 ... 91.0 | 32    |
| 4      | 15 ... 20  | 86.8 ... 88.0 | 85    | 9      | 40 ... 45  | 91.0 ... 91.5 | 0     |
| 5      | 20 ... 25  | 88.0 ... 89.0 | 38    | 10     | 45 ... 50  | 91.5 ... 92.0 | 0     |
|        |            |               |       | 11     | 50 ... 55  | 92.0 ... 92.4 | 28    |

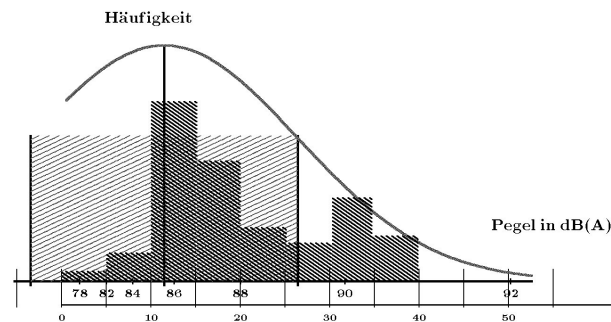
*Tabelle 37.10.5:* Beispiel 3, Klasseneinteilung

Damit ergeben sich dann folgende Darstellungen:



*Aufgabe 37.10:* Güterzug, geschätzter Mittelwert  $\tilde{\mu}_e = 88.055 \text{ dB(A)}$  mit Klasseneinteilung, ohne Berücksichtigung der Wagenzahl

und



*Aufgabe 37.10:* Güterzug, geschätzter Mittelwert  $\tilde{\mu}_e = 88.055 \text{ dB(A)}$  mit Klasseneinteilung, mit Berücksichtigung der Wagenzahl

Bei diesem Bild „sieht“ man, dass der Mittelwert der Normalverteilungskurve als „gewichtetes“ Mittel geschätzt werden sollte (unteres Bild).

Für jedes Intervall  $I_j$  ist die Anzahl  $b_j$  der Stichprobenwerte, die in  $I_j$  liegen, in der Tabelle 37.10.5 bestimmt.

**3.** Wir betrachten nun die arithmetischen Werte, also  $\tilde{\mu}_a = 11.484$  und  $\tilde{\sigma}_a = 14.950$ , und untersuchen die Funktion

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - 11.484}{14.959}\right) \quad \text{mit} \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Die Klassengrenzen können aus der Tabelle 37.10.5 abgelesen werden.

Es ergibt sich damit:

Für  $x = -\infty$  bis zur ersten Klassengrenze ( $x = 5$ ) kann nach der Normalverteilungs-Tafel 3a (siehe Anhang) der Anteil  $p_1$  der Messwerte bestimmt werden, der bei einer Normalverteilung in dem Gebiet vor dieser Grenze liegt:

Dazu ist für  $u = \frac{x - \tilde{\mu}_a}{\tilde{\sigma}_a} = \frac{x - 11.484}{14.959}$  die Zahl  $\Phi(u)$  der Tabelle zu entnehmen:

Es ist  $u = \frac{5 - 11.484}{14.959} = -0.43$  und damit  $\Phi(u) = 0.3336$ ,

bei 423 Wagen wären bei Normalverteilung daher  $e_1 = 423 \cdot 0.3336 = 141$  Wagen leiser als  $82 \text{ dB}(A)$ .

Für  $x = -\infty$  bis zur zweiten Klassengrenze ( $x = 10$ ) ist  $u = \frac{10 - 11.484}{14.959} = -0.10$  und damit  $\Phi(u) = 0.4602$ ,

bei 423 Wagen wären bei Normalverteilung daher  $423 \cdot 0.4602 = 195$  Wagen leiser als  $85 \text{ dB}(A)$ , d.h.  $e_2 = 195 - e_1 = 195 - 141 = 54$ .

Für  $x = -\infty$  bis zur dritten Klassengrenze ( $x = 15$ ) ist  $u = \frac{15 - 11.484}{14.959} = 0.24$  und damit  $\Phi(u) = 0.5948$ , bei 423 Wagen wären bei Normalverteilung daher  $423 \cdot 0.5958 = 252$  Wagen leiser als  $86.8 \text{ dB}(A)$ , d.h.  $e_3 = 252 - 195 = 57$ .

Für  $x = -\infty$  bis zur 4. Klassengrenze ( $x = 20$ ) ist  $u = \frac{20 - 11.484}{14.959} = 0.57$  und damit  $\Phi(u) = 0.7157$ , bei 423 Wagen wären bei Normalverteilung daher  $423 \cdot 0.7157 = 303$  Wagen leiser als  $88 \text{ dB}(A)$ , d.h.  $e_4 = 303 - 252 = 51$ .

Für  $x = -\infty$  bis zur 5. Klassengrenze ( $x = 25$ ) ist  $u = \frac{25 - 11.484}{14.959} = 0.90$  und damit  $\Phi(u) = 0.8159$ , bei 423 Wagen wären bei Normalverteilung daher  $423 \cdot 0.8159 = 345$  Wagen leiser als  $89 \text{ dB}(A)$ , d.h.  $e_5 = 345 - 303 = 42$ .

Für  $x = -\infty$  bis zur 6. Klassengrenze ( $x = 30$ ) ist  $u = \frac{30 - 11.484}{14.959} = 1.24$  und damit  $\Phi(u) = 0.8925$ , bei 423 Wagen wären bei Normalverteilung daher  $423 \cdot 0.8925 = 377$  Wagen leiser als  $89.8 \text{ dB}(A)$ , d.h.  $e_6 = 377 - 345 = 32$ .

Für  $x = -\infty$  bis zur 7. Klassengrenze ( $x = 35$ ) ist  $u = \frac{35 - 11.484}{14.959} = 1.57$  und damit  $\Phi(u) = 0.9418$ , bei 423 Wagen wären bei Normalverteilung daher  $423 \cdot 0.9418 = 398$  Wagen leiser als  $90.4 \text{ dB}(A)$ , d.h.  $e_7 = 398 - 377 = 21$ .

Für  $x = -\infty$  bis zur 8. Klassengrenze ( $x = 40$ ) ist  $u = \frac{40 - 11.484}{14.959} = 1.91$  und damit  $\Phi(u) = 0.9719$ , bei 423 Wagen wären bei Normalverteilung daher  $423 \cdot 0.9719 = 411$  Wagen leiser als  $91.0 \text{ dB}(A)$ , d.h.  $e_8 = 411 - 398 = 13$ .

Für  $x = -\infty$  bis zur 9. Klassengrenze ( $x = 45$ ) ist  $u = \frac{45 - 11.484}{14.959} = 2.24$  und damit  $\Phi(u) = 0.9875$ , bei 423 Wagen wären bei Normalverteilung daher  $423 \cdot 0.9875 = 418$  Wagen leiser als  $91.5 \text{ dB}(A)$ , d.h.  $e_9 = 418 - 411 = 7$ .

Für  $x = -\infty$  bis zur 10. Klassengrenze ( $x = 50$ ) ist  $u = \frac{50 - 11.484}{14.959} = 2.58$  und damit  $\Phi(u) = 0.9951$ , bei 423 Wagen wären bei Normalverteilung daher  $423 \cdot 0.9951 = 421$  Wagen leiser als  $92.0 \text{ dB}(A)$ , d.h.  $e_{10} = 421 - 418 = 3$ .

Für  $x = -\infty$  bis zur 11. Klassengrenze ( $x = 55$ ) ist  $u = \frac{55 - 11.484}{14.959} = 2.91$  und damit  $\Phi(u) = 0.9982$ , bei 423 Wagen wären bei Normalverteilung daher  $423 \cdot 0.9982 = 422$  Wagen leiser als  $92.0 \text{ dB}(A)$ , d.h.  $e_{11} = 422 - 421 = 1$ .

4. Nun berechnen wir die Abweichungen  $\chi_0^2 = \sum_{j=1}^K A_j = \sum_{j=1}^K \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j}$  in der folgenden Tabelle

| Klasse | $x$ | $p$  | $b_j$ | $e_j$ | $A_j$ | Klasse | $x$ | $p$  | $b_j$ | $e_j$ | $A_j$ |
|--------|-----|------|-------|-------|-------|--------|-----|------|-------|-------|-------|
| 1      | 5   | 82.0 | 7     | 141   | 127   | 6      | 30  | 89.8 | 27    | 32    | 1     |
| 2      | 10  | 85.0 | 20    | 54    | 21    | 7      | 35  | 90.4 | 59    | 21    | 69    |
| 3      | 15  | 86.8 | 127   | 57    | 86    | 8      | 40  | 91.0 | 32    | 13    | 28    |
| 4      | 20  | 88.0 | 85    | 51    | 23    | 9      | 45  | 91.5 | 0     | 7     | 7     |
| 5      | 25  | 89.0 | 38    | 42    | 0     | 10     | 50  | 92.0 | 0     | 3     | 3     |
|        |     |      |       |       |       | 11     | 55  | 92.4 | 28    | 1     | 729   |

Tabelle 37.10.6: Beispiel 3,  $\chi^2$ -Test

Damit ist

$$\chi_0^2 = 1094$$

4. Wir wählen  $\alpha = 5\%$ .

5. In unserem Falle haben wir  $K = 11$  Klassen. Daher haben wir ein  $c$  zu bestimmen mit  $P(\chi^2 \leq c) = 0.95$  bei  $K - 1 = 10$  Freiheitsgraden. Nach Tabelle ist dann  $c = 18.31$ .

Wenn nun  $\chi_0^2 < c$  ist, dann nehmen wir an, dass es sich hier um eine Normalverteilung handelt.

Es ist aber  $\chi_0^2 = 1094 > c = 18.31$ . Folglich entstammt diese Verteilung keiner Normalverteilung.

## 37.5 beliebige Verteilung

### Aufgabe 37.11:

#### Schienenschleifen:

Es gibt in Deutschland nur ein Messgerät, mit dem ein „akustisches“ Schienenschleifen beurteilt wird: das ist ein Schallmesswagen, der der DB gehört.

Dieser Schallmesswagen ist so eingestellt, dass er den Aussenpegel berechnet, indem er den zwischen seinen Rädern ermittelten Pegel auswertet. Der Wagen selbst ist ein IC-Wagen, dessen Räder sehr sorgfältig rundgeschliffen wurden. Also wird durch den Schallmesswagen (unter der Annahme einer hinreichend geneuen Korrelation) der Vorbeifahrpegel eines IC-Wagens zu dem überfahrenen Gleis bestimmt.

In Deutschland sollte der Schienenzustand eigentlich überall „durchschnittlich gut“ sein; zur Zeit wird versucht zu begründen, dass der Mittelwert aller Schienenzustände in Deutschland „durchschnittlich gut“ ist.

Dieser Zustand kann (bisher) nur mit dem Schallmesswagen geprüft werden; also wird durch den Schallmesswagen der (auf IC-Wagen bezogenen) Grundwert bestimmt.

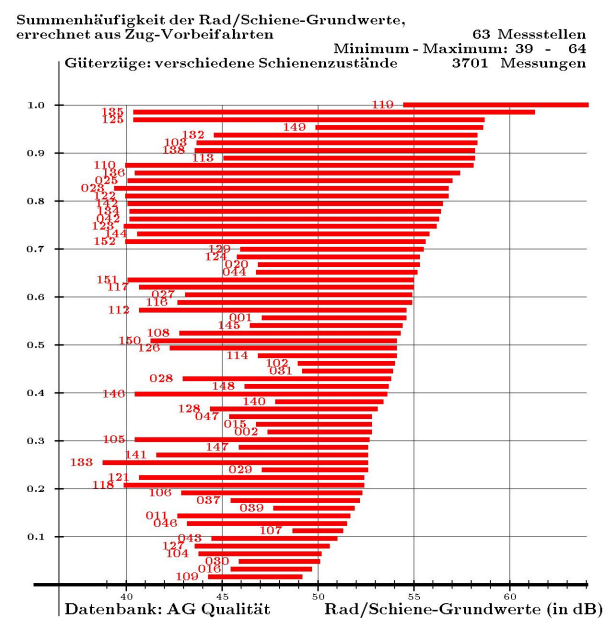
aus Schall 03:

„Beschreibung der Änderungen gegenüber der Fassung 1976“:

Einführung des Begriffs „Grundwert“ mit dem Zahlenwert 51. Er ist der auf 1 Stunde bezogene Mittelungspegel eines Zuges in 25 m seitlicher Entfernung, 3,5 m über Grund in ebenem Gelände. Dieser Zug hat eine Länge von 100 m, fährt 100 km/h und besteht zu 100% aus Fahrzeugen, die mit Scheibenbremsen ausgerüstet sind. Vorausgesetzt wird ferner ein durchschnittlich guter Schienenzustand.

Da in Deutschland die Bahn für die Pflege der Schienen verantwortlich ist, kann es nicht sinnvoll sein, dass dieser Wagen der Bahn gehört und nicht einer Aufsichtsbehörde (z.B. TÜV oder EBA).

Emissionswerte von Rädern streuen natürlicherweise so stark, dass es keine vernünftigen Tabellen gibt und geben kann; ich schicke Ihnen nebenstehende Graphik, die Ihnen für Güterzüge die Streubreite der (aus gemessenen Vorbeifahrpegeln berechnete) Grundwerte an vielen verschiedenen Orten aufzeigt: An jedem der Orte kann davon ausgegangen werden, dass sich der Schienenzustand nicht änderte. Also beschreibt jeweils die Länge der roten Linie die Streuung der „Qualität“ der Räder.



Aus dieser Graphik ist erkennbar, dass die Schienenzustände nicht normalverteilt sind, d.h. es ist nicht sinnvoll, etwa das arithmetische oder energetische Mittel zu wählen. Daher wurde hier entschieden, anstelle eines Mittelwertes einen

95%-Rad/Schiene-Grundwert

anzugeben:

Der 95%-Rad/Schiene-Grundwert beschreibt für eine Fahrzeugart den auf 1 Stunde bezogenen Mittelungspegel, der an 95% aller bisher untersuchten Messstellen von 95% aller Fahrzeuge dieser Art unterschritten wird.

Der 95%-Rad/Schiene-Grundwert beträgt für Güterwagen  $57 \text{ dB}(A)$ .

## 37.6 Ziegenproblem

### Das Problem (nach WIKIPEDIA)

Bei einer Spielshow soll der Kandidat eines von drei aufgebauten Toren auswählen. Hinter einem verbirgt sich der Gewinn, ein Auto, hinter den anderen beiden jeweils eine Ziege, also Nieten (oder Trostpreise). Folgender Spielablauf ist immer gleich und den Kandidaten vorab bekannt:

1. Der Kandidat wählt ein Tor aus, welches aber vorerst verschlossen bleibt.
2. Daraufhin öffnet der Moderator, der die Position des Gewinns kennt, eines der beiden nicht vom Kandidaten ausgewählten Tore, und zwar eines, hinter dem sich eine Ziege befindet. Im Spiel befinden sich also noch ein Gewinn und eine Niete.
3. Der Moderator bietet dem Kandidaten an, seine Entscheidung zu überdenken und das andere Tor zu wählen.

### Wie soll der Kandidat sich entscheiden, um seine Gewinnchance zu maximieren?

Bei einer „Immer-Wechsel“-Strategie zeigen sich drei Fälle, anhand der drei vom Kandidaten gewählten Türen:

|                   |                                                                           | Ergebnis bei Wechsel<br>der ersten Wahl |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| Auto hinter Tor C | Der Kandidat wählt vorerst A,<br>die Ziege B wird ihm gezeigt             | <b>Auto / Ziege</b>                     |
| Auto hinter Tor C | Der Kandidat wählt vorerst B,<br>die Ziege A wird ihm gezeigt             | <b>Auto / Ziege</b>                     |
| Auto hinter Tor C | Der Kandidat wählt vorerst C,<br>die Ziege A (oder B) wird ihm<br>gezeigt | <b>Auto / Ziege</b>                     |

**Fazit:** Der Kandidat gewinnt das Auto in ..... von drei Fällen, wenn er seine erste Wahl ändert.

|                   |                                                                           | Ergebnis bei Wechsel<br>der ersten Wahl                                |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Auto hinter Tor C | Der Kandidat wählt vorerst A,<br>die Ziege B wird ihm gezeigt             | durch einen Wechsel<br>(von A auf C) <b>gewinnt</b> er.                |
| Auto hinter Tor C | Der Kandidat wählt vorerst B,<br>die Ziege A wird ihm gezeigt             | durch einen Wechsel<br>(von B auf C) <b>gewinnt</b> er.                |
| Auto hinter Tor C | Der Kandidat wählt vorerst C,<br>die Ziege A (oder B) wird ihm<br>gezeigt | durch einen Wechsel<br>(von C auf B bzw. auf A)<br><b>verliert</b> er. |

**Fazit:** Er gewinnt in zwei von drei Fällen durch einen Wechsel.