



4 trigonometrische Funktionen

Aufgabe 4.1: Zeichnen Sie die folgenden Kurven:

4.1a): $y = \sin(x)$, $y = \sin(2 \cdot x)$ und $y = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$ für $0 < x < 2 \cdot \pi$

4.1b): $y = \cos(x)$, $y = 2 \cdot \cos(x)$ und $y = \frac{1}{2} \cdot \cos(x)$ für $0 < x < 2 \cdot \pi$

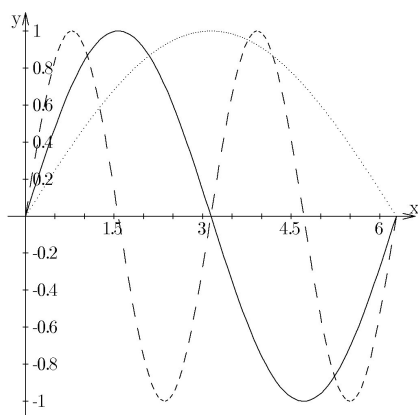
4.1c): $y = \tan(x)$, $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ und $y = \tan\left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\pi}{6}\right)$ für $0 < x < 2 \cdot \pi$

4.1d): $y = \cot(x)$, $y = \cot\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$ und $y = \frac{1}{4} \cdot \cot(2 \cdot x)$ für $0 < x < 2 \cdot \pi$

4.1e): $y = \sin(x)$ für $-\pi < x < 3 \cdot \pi$ und $y = \arcsin(x)$

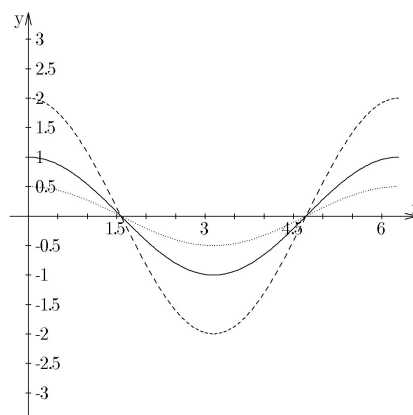
4.1f): $y = \cos(2 \cdot x)$ für $-\pi < x < 3 \cdot \pi$ und $y = \frac{1}{2} \cdot \arccos(x)$

Lösung 4.1



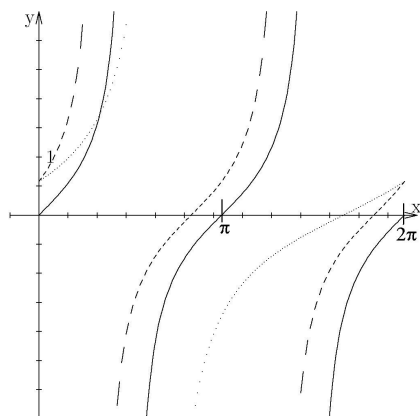
Aufgabe 4.1a)

$y = \sin(x)$ (ausgezogen)
 $y = \sin(2 \cdot x)$ (gestrichelt)
 $y = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$ (gepunktet)



Aufgabe 4.1b)

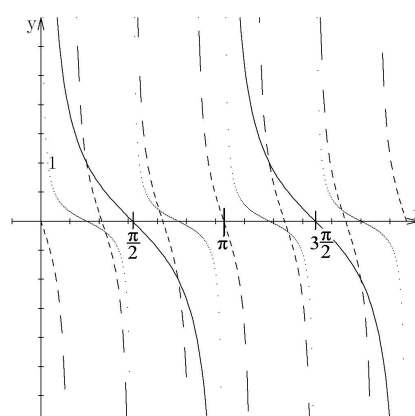
$y = \cos(x)$ (ausgezogen)
 $y = 2 \cdot \cos(x)$ (gestrichelt)
 $y = \frac{1}{2} \cdot \cos(x)$ (gepunktet)

**Aufgabe 4.1c)**

$$y = \tan(x) \text{ (ausgezogen)}$$

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (gestrichelt)}$$

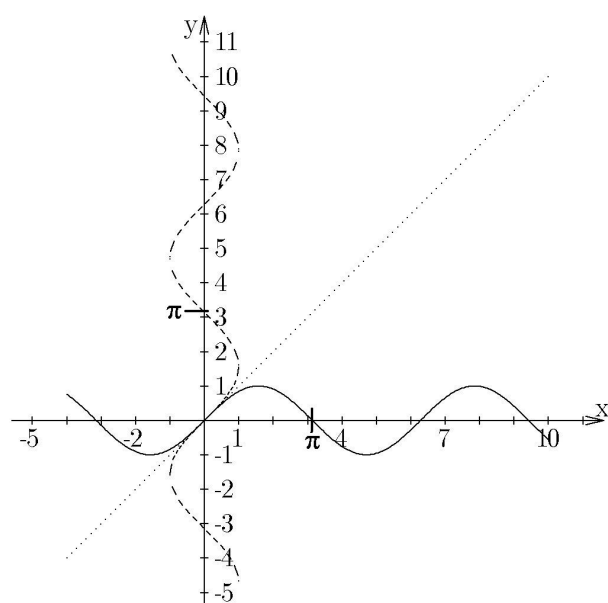
$$y = \tan\left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (gepunktet)}$$

**Aufgabe 4.1d)**

$$y = \cot(x) \text{ (ausgezogen)}$$

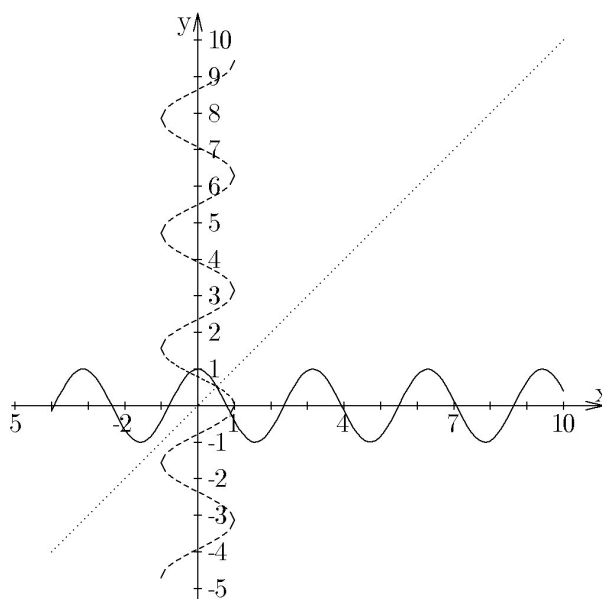
$$y = \cot\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (gestrichelt)}$$

$$y = \frac{1}{4} \cdot \cot(2 \cdot x) \text{ (gepunktet)}$$

**Aufgabe 4.1e)**

$$y = \sin(x) \text{ (ausgezogen)}$$

$$y = \arcsin(x) \text{ (gestrichelt)}$$

**Aufgabe 4.1f)**

$$y = \cos(2 \cdot x) \text{ (ausgezogen)}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \arccos(x) \text{ (gestrichelt)}$$

Aufgabe 4.2: Überlagerung von Schwingungen

Bestimmen und zeichnen Sie die Überlagerung der beiden Schwingungen

$$y_1(x) = 2 \cdot \sin\left(2 \cdot x + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \quad \text{und} \quad y_2(x) = -3 \cdot \cos\left(2 \cdot x - \frac{5}{6} \cdot \pi\right)$$

indem Sie eine reelle Zahl $A > 0$ und einen Winkel φ ($0 \leq \varphi < 2 \cdot \pi$) bestimmen mit

$$A \cdot \sin(2 \cdot x + \varphi) = y_1(x) + y_2(x)$$

Lösung 4.2

Nach den Additionstheoremen (F+H, F1) ist für $\spadesuit = 2 \cdot x$ und für $\diamond = \frac{2}{3} \cdot \pi$

$$y_1(x) = 2 \cdot \sin\left(2 \cdot x + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \sin(2 \cdot x) \cdot \cos\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right) + 2 \cdot \cos(2 \cdot x) \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right)$$

Wegen $\cos\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right) = -\frac{1}{2}$ und $\sin\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ ist dann

$$y_1(x) = -\sin(2 \cdot x) + \sqrt{3} \cdot \cos(2 \cdot x) \quad (1)$$

Entsprechend ist für $\spadesuit = 2 \cdot x$ und für $\diamond = -\frac{5}{6} \cdot \pi$

$$y_2(x) = -3 \cdot \cos\left(2 \cdot x - \frac{5}{6} \cdot \pi\right) = -3 \cdot \cos(2 \cdot x) \cdot \cos\left(\frac{5}{6} \cdot \pi\right) + \left(-3 \cdot \sin(2 \cdot x) \cdot \sin\left(\frac{5}{6} \cdot \pi\right)\right)$$

Wegen $\cos\left(\frac{5}{6} \cdot \pi\right) = -\frac{1}{2}$ und $\sin\left(\frac{5}{6} \cdot \pi\right) = \frac{1}{2}$ ist dann

$$y_2(x) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(2 \cdot x) - \frac{3}{2} \cdot \sin(2 \cdot x) \quad (2)$$

Damit folgt aus (1) und (2)

$$y_1(x) + y_2(x) = -\frac{5}{2} \cdot \sin(2 \cdot x) + \frac{5}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(2 \cdot x) \quad (3)$$

Andererseits ist nach den Additionstheoremen

$$A \cdot \sin(2 \cdot x + \varphi) = A \cdot \sin(2 \cdot x) \cdot \cos(\varphi) + A \cdot \cos(2 \cdot x) \cdot \sin(\varphi)$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$A \cdot \cos(\varphi) = -\frac{5}{2} \quad \text{und} \quad A \cdot \sin(\varphi) = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{3} \quad (4)$$

Bestimmung von A :

Es ist nach dem Pythagoras der Winkelfunktionen

$$A^2 = A^2 \cdot (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) = (A \cdot \sin(\varphi))^2 + (A \cdot \cos(\varphi))^2 = \frac{25}{4} + \frac{75}{4} = 25 \quad \Rightarrow \quad A = \pm 5$$

Hier wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit gewählt: $A = 5$. Bestimmung von φ :

Wegen $A = 5$ ist nun nach (4)

$$5 \cdot \cos(\varphi) = -\frac{5}{2} \quad \text{und} \quad 5 \cdot \sin(\varphi) = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{3} \quad \text{oder} \quad \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \quad \text{und} \quad \cos(\varphi) = -\frac{1}{2} \quad (5)$$

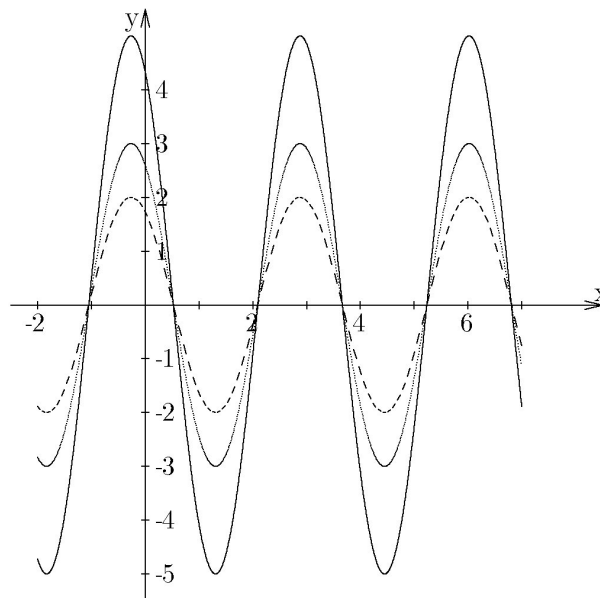
Folglich muss für φ damit auch

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

erfüllt sein.

Also muss gelten $\varphi = -\frac{1}{3} \cdot \pi \pm \pi$.

Diese Bedingungen wird von (5) nur erfüllt für $\varphi = \frac{2}{3} \cdot \pi = 120^\circ$.



Aufgabe 4.2

$$y = 2 \cdot \sin\left(2 \cdot x + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \quad (\text{gestrichelt})$$

$$y = -3 \cdot \cos\left(2 \cdot x - \frac{5}{6} \cdot \pi\right) \quad (\text{gepunktet})$$

$$y = A \cdot \sin(2 \cdot x + \varphi) \quad (\text{ausgezogen}) \quad \text{mit } A = 5 \quad \text{und } \varphi = \frac{2}{3} \cdot \pi$$

Aufgabe 4.3: (Generalsubstitution) (F+H 8.1)**4.3a): Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgende Substitution gültig ist**

$$t := \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

wenn für diese folgende Eigenschaften gelten sollen:

$$\sin(x) = \frac{2 \cdot t}{1 + t^2} \quad , \quad \cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{und} \quad dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$$

Lösung 4.3a)

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot t}{1 + t^2} &\stackrel{t := \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \frac{2 \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \stackrel{\tan(\heartsuit) = \frac{\sin(\heartsuit)}{\cos(\heartsuit)}}{=} \frac{2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \\ &\stackrel{\sin^2(\heartsuit) + \cos^2(\heartsuit) = 1}{=} \frac{2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\stackrel{\text{Additionstheorem des Sinus}}{=} \sin(x) \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{1 - t^2}{1 + t^2} &\stackrel{t := \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \stackrel{\tan(\heartsuit) = \frac{\sin(\heartsuit)}{\cos(\heartsuit)}}{=} \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \\ &\stackrel{\sin^2(\heartsuit) + \cos^2(\heartsuit) = 1}{=} \frac{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)] \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \stackrel{\text{Additionstheorem des Cosinus}}{=} \cos(x) \end{aligned}$$

Ausserdem gilt für x mit $\frac{x}{2} = \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

$$\arctan(t) = \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{x}{2}$$

also $x = 2 \cdot \arctan(t)$. Dann ist

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} 2 \cdot \arctan(t) \stackrel{\text{F+H F4}}{=} 2 \cdot \frac{1}{1 + t^2} \quad \text{für } x \text{ mit } \frac{x}{2} = \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Also gilt diese Generalsubstitution nur für diese x , d.h. für $-\pi < x \leq \pi$ (siehe Bild zu Aufgabe 4.3a)).

Aufgabe 4.3b) Wenden Sie diese Erfahrung an auf die Berechnung von

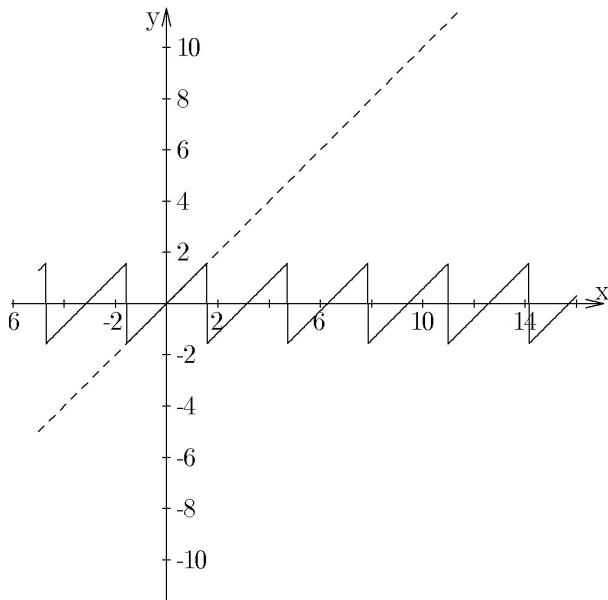
$$\int_{x=2}^{x=14} \frac{1}{3 + \cos(x)} dx$$

Erkenntnis: Bei der Stammfunktion ist die Konstante im allgemeinen abhängig vom betrachteten Intervall.

Lösung 4.3b)

$$\begin{aligned} \int_{x=2}^{x=14} \frac{1}{3 + \cos(x)} dx &\stackrel{\text{General-substitution}}{=} \int_{x=2}^{x=14} \frac{1}{3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_{x=2}^{x=14} \frac{1+t^2}{3 \cdot (1+t^2) + (1-t^2)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_{x=2}^{x=14} \frac{2}{4 + 2 \cdot t^2} dt = \int_{x=2}^{x=14} \frac{1}{2 + t^2} dt \\ &\stackrel{F+H8.3}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\arctan \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right]_{x=2}^{x=14} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\arctan \left(\frac{\tan(\frac{x}{2})}{\sqrt{2}} \right) \right]_{x=2}^{x=14} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\arctan \left(\frac{\tan(7)}{\sqrt{2}} \right) - \arctan \left(\frac{\tan(1)}{\sqrt{2}} \right) \right] \approx 0.2 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist falsch, wie an einer groben Abschätzung des Flächeninhalts in untenstehender Abbildung abgelesen werden kann.

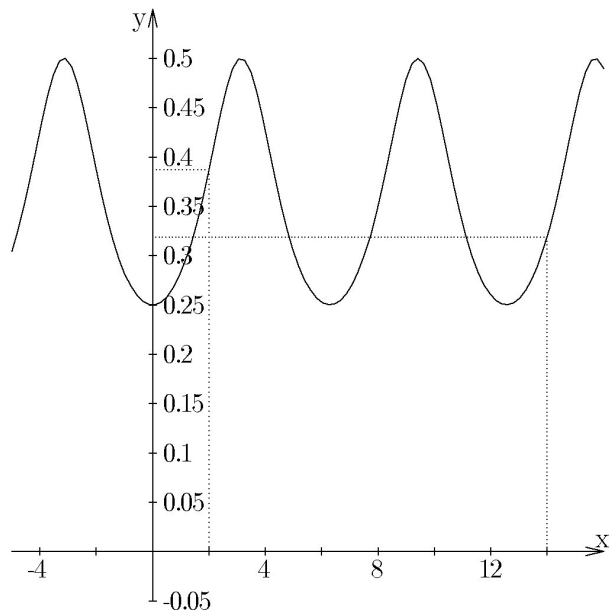


Aufgabe 4.3a)

$y = \arctan(\tan(x))$ (ausgezogen)

$y = x$ (gestrichelt)

Übereinstimmung für $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$



Aufgabe 4.3b)

$y = \frac{1}{3 + \cos(x)}$ für $2 \leq x \leq 14$

Im Intervall $x_{\min} = 2 \leq x \leq x_{\max} = 14$ beträgt das absolute Minimum $y_{\min}$ der Funktion $y = \frac{1}{3+\cos(x)}$ nach der Zeichnung oder einer Extremwert-Berechnung $y_{\min} = 0.25$:

Da eine notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremums $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, muss al-

so $-\frac{\sin(x)}{(3+\cos(x))^2} = 0$ oder $\sin(x) = 0$ gelten, d.h. $x_{\text{extr}} = n \cdot \pi$ für $n \in \mathbb{Z}$. Es ist $y_{\min} =$

$$\frac{1}{3+\cos(2 \cdot \pi)} = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ und } y_{\max} = \frac{1}{3+\cos(\pi)} = \frac{1}{2} = 0.50.$$

Damit ist $F_U = (x_{\max} - x_{\min}) \cdot y_{\min} = 12 \cdot 0.25 = 3$ eine untere Abschätzung für den Flächeninhalt.

Also muss $\int_{x=2}^{x=14} \frac{1}{3+\cos(x)} dx > 3$ gelten.

Da ferner in diesem Intervall das absolute Maximum $y_{\max}$ der Funktion $y = \frac{1}{3+\cos(x)}$ nach der Zeichnung (oder einer Berechnung) $y_{\max} = 0.50$ beträgt, ist $F_O = (x_{\max} - x_{\min}) \cdot y_{\max} = 12 \cdot 0.50 = 6$ eine obere Abschätzung für den Flächeninhalt.

Also muss $\int_{x=2}^{x=14} \frac{1}{3+\cos(x)} dx < 6$ gelten.

Nach 4.3a) hat die Funktion $\arctan$ im betrachteten Intervall $2 \leq x \leq 14$ Sprungstellen bei $x = \pi$ und bei $x = 3 \cdot \pi$. Es ist

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ und } \lim_{x \rightarrow \pi^+} \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2},$$

da $\lim_{\heartsuit \rightarrow \infty} \arctan(\heartsuit) = \frac{\pi}{2}$ und $\lim_{\heartsuit \rightarrow -\infty} \arctan(\heartsuit) = -\frac{\pi}{2}$ ist.

Daher „springt“ die Funktion $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ an den Sprungstellen um den Betrag $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

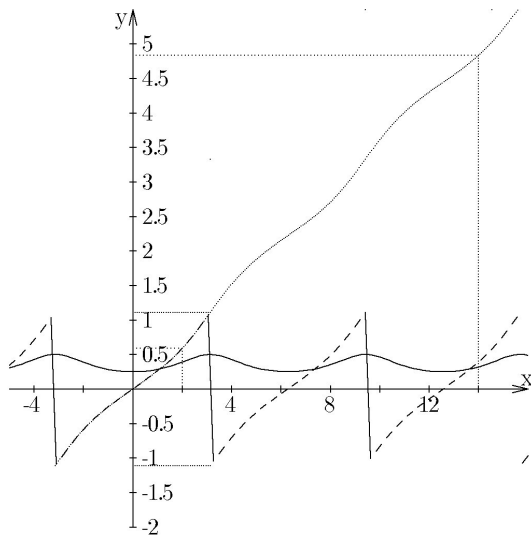
Die Stammfunktion lautet also:

$$F(x) := \int \frac{1}{3+\cos(x)} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan\left(\frac{\tan(\frac{x}{2})}{\sqrt{2}}\right) & \text{für } -\pi < x \leq \pi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\arctan\left(\frac{\tan(\frac{x}{2})}{\sqrt{2}}\right) + \pi \right] & \text{für } \pi < x \leq 3 \cdot \pi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\arctan\left(\frac{\tan(\frac{x}{2})}{\sqrt{2}}\right) + 2 \cdot \pi \right] & \text{für } 3 \cdot \pi < x \leq 5 \cdot \pi \end{cases}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} F(14) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\arctan\left(\frac{\tan(\frac{14}{2})}{\sqrt{2}}\right) + 2 \cdot \pi \right] \approx 4.833 \\ F(2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\arctan\left(\frac{\tan(\frac{2}{2})}{\sqrt{2}}\right) \right] \approx 0.589 \end{aligned}$$

und damit $\int_{x=2}^{x=14} \frac{1}{3+\cos(x)} dx = F(14) - F(2) \approx 4.244$

**Aufgabe 4.3b)**

Kurve $\frac{1}{3 + \cos(x)}$ (ausgezogen)
mit Stammfunktion (gepunktet)

Aufgabe 4.4: (2. Tschebyscheff-Polynom)

Zeigen Sie: Für $-1 \leq x \leq 1$ gilt $\cos(2 \cdot \arccos(x)) = 2 \cdot x^2 - 1$

Lösung 4.4

Nach den Additionstheoremen (siehe F+H, F1) gilt

$$\cos(2 \cdot \spadesuit) = \cos^2(\spadesuit) - \sin^2(\spadesuit)$$

Daher ist hier mit $\spadesuit = \arccos(x)$

$$\begin{aligned} \cos(2 \cdot \arccos(x)) &= \cos^2(\arccos(x)) - \sin^2(\arccos(x)) \\ &= 2 \cdot \cos^2(\arccos(x)) - 1 \end{aligned}$$

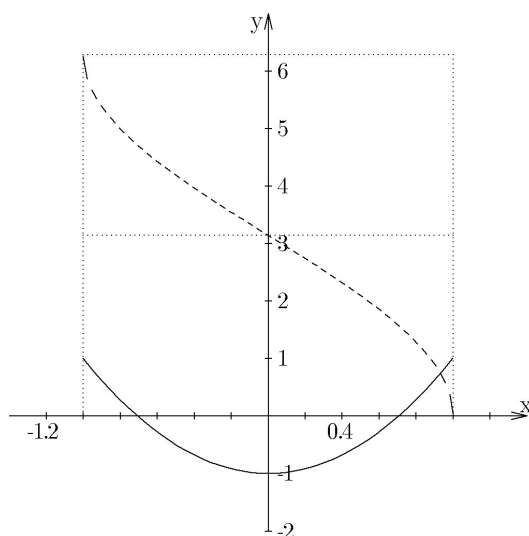
Nach Definition von $\arccos$

ist $\cos(\arccos(x)) = x$

für $-1 \leq x \leq 1$ (siehe auch F+H, 3.3)

und damit

$$\cos(2 \cdot \arccos(x)) = 2 \cdot x^2 - 1$$

**Aufgabe 4.4**

$f(x) = \cos(2 \cdot \arccos(x))$ (ausgezogen)
 $g(x) = 2 \cdot \arccos(x)$ (gestrichelt)

Aufgabe 4.5: Nullstellenbestimmung bei Winkelfunktionen

Bestimmen Sie alle Lösungen x der Gleichung

$$\sin(2 \cdot x) - \cos(2 \cdot x) = 1 \quad \text{mit} \quad x \in [0, 2 \cdot \pi).$$

Lösung zu Aufgabe 4.5:

Kurzer Lösungsweg: Nach den Additionstheoremen ist

$$\sin(2 \cdot x) - \cos(2 \cdot x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) - (2 \cdot \cos^2(x) - 1) = 2 \cdot \cos(x) \cdot (\sin(x) - \cos(x)) + 1$$

also muss gelten

$$\cos(x) \cdot (\sin(x) - \cos(x)) = 0$$

d.h. entweder $\cos(x) = 0$ [und damit $x = \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot k + 1)$ für $k = 0, 1, 2, \dots$] oder $\sin(x) = \cos(x)$ [und damit $x = \frac{\pi}{4} \cdot (4 \cdot k + 1)$ für $k = 0, 1, 2, \dots$]. Im Intervall $[0, 2 \cdot \pi)$ liegen die Lösungen

$$x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{4}, x_4 = \frac{3 \cdot \pi}{2}$$

Anderer Weg Es werden zunächst ein A und ein φ gesucht, so dass gilt

$$\sin(2 \cdot x) - \cos(2 \cdot x) = A \cdot \sin(2 \cdot x - \varphi) \quad \text{mit} \quad A > 0 \quad \text{und} \quad \varphi \in [0, 2 \cdot \pi) \quad (6)$$

Wenn es A und φ mit dieser Eigenschaft gibt, dann lautet die Aufgabe $A \cdot \sin(2 \cdot x - \varphi) = 1$.

Also suchen wir A und φ mit der Eigenschaft (6). Da nach den Additionstheoremen gilt

$$\sin(\spadesuit - \diamondsuit) = \sin(\spadesuit) \cdot \cos(\diamondsuit) - \cos(\spadesuit) \cdot \sin(\diamondsuit)$$

muss mit $\spadesuit = 2 \cdot x$ und $\diamondsuit = \varphi$ gelten

$$\begin{aligned} 1 = \sin(2 \cdot x) - \cos(2 \cdot x) &= A \cdot (\sin(2 \cdot x) \cdot \cos(\varphi) - \cos(2 \cdot x) \cdot \sin(\varphi)) \\ &= (A \cdot \cos(\varphi)) \cdot \sin(2 \cdot x) - (A \cdot \sin(\varphi)) \cdot \cos(2 \cdot x) \end{aligned} \quad (7)$$

Bestimmung von A :

Für A und φ müssen nach Gleichung (7) gelten

$$A \cdot \cos(\varphi) = 1, \quad \text{und} \quad A \cdot \sin(\varphi) = 1 \quad (8)$$

Damit ist

$$A^2 \cdot \cos^2(\varphi) = 1 \quad \text{und} \quad A^2 \cdot \sin^2(\varphi) = 1$$

und folglich

$$A^2 = A^2 \cdot (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) = A^2 \cdot \sin^2(\varphi) + A^2 \cdot \cos^2(\varphi) = 2$$

Daraus folgt wegen $A > 0$: $A = \sqrt{2}$;

Bestimmung von φ :

Da A bekannt ist, gilt nach Gleichung (8) wegen $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi)$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

Daraus folgt dann $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Ergebnis:

Nach dem Ansatz (6) und (7) ist

$$1 = \sin(2 \cdot x) - \cos(2 \cdot x) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(2 \cdot x - \frac{\pi}{4}\right)$$

und damit

$$\sin\left(2 \cdot x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

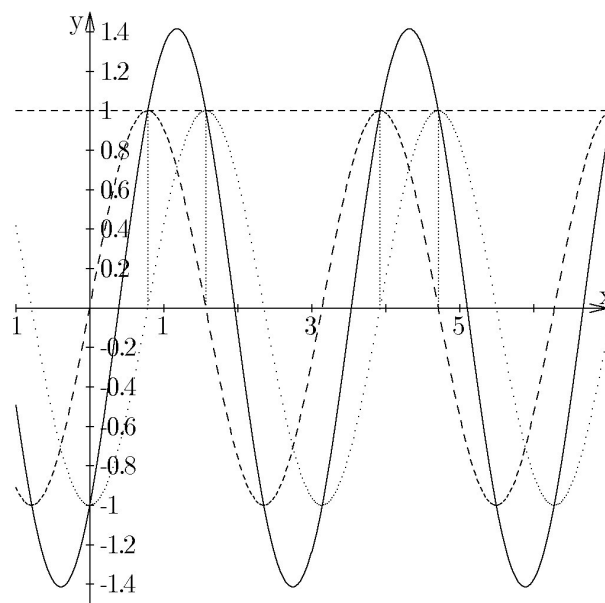
Diese Bedingung gilt für Winkel $2 \cdot x$ mit

$$2 \cdot x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{oder} \quad 2 \cdot x - \frac{\pi}{4} = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Daher muss gelten

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{oder} \quad x = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Im Intervall $[0, 2\pi)$ liegen die Lösungen $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4}, x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{4}, x_4 = \frac{7 \cdot \pi}{4}$



Aufgabe 4.5

$y = \sin(2 \cdot x)$ (gestrichelt)

$y = -\cos(2 \cdot x)$ (gepunktet)

$y = \sin(2 \cdot x) - \cos(2 \cdot x)$ (ausgezogen)