



40 Charakterisierung von Funktionen, Hauptachsentransformation

Aufgabe 40.1:

Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A .
- Beschreiben Sie Abbildung φ mit $\varphi(\vec{x}) := A \cdot \vec{x}$ geometrisch:
Ein Eigenvektor $\vec{x}_i$ zu einem Eigenwert λ_i wird bei der Abbildung φ in Richtung $\vec{x}_i$ um den Faktor λ_i verlängert bzw. verkürzt.
- Geben Sie eine Gleichung für die Fläche an, die durch die Bildpunkte der Einheitskugel unter der Abbildung φ gebildet wird:

Die Einheitskugel K kann beschrieben werden durch

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

oder durch

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

Lösung von Aufgabe 40.1a):

Eine Zahl λ heißt „Eigenwert der Matrix A “, wenn es einen „Eigenvektor $\vec{x}$ “ gibt mit (entsprechend heißt $\vec{x}$ „Eigenvektor der Matrix A zu dem Eigenwert λ “, wenn die obige Bedingung gilt).

Um zunächst Eigenwerte von A zu bestimmen, werden aus der Gleichung $|A - \lambda \cdot E| = 0$ alle λ bestimmt.

Faktor		Σ	Regie
1	$2 - \lambda$	1	-1
	-2	$5 - \lambda$	-1
	-2	2	$2 - \lambda$
1	$2 - \lambda$	1	-1
	$-4 + \lambda$	$4 - \lambda$	0
	-2	2	$2 - \lambda$
$(4 - \lambda)$	$2 - \lambda$	1	-1
	-1	1	0
	-2	2	$2 - \lambda$
$(4 - \lambda)$	$2 - \lambda$	1	-1
	-1	1	0
	0	0	$2 - \lambda$
$(4 - \lambda) \cdot (2 - \lambda)$	$2 - \lambda$	1	
	-1	1	

Also $|A - \lambda \cdot E| = (4 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (4 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) \cdot (3 - \lambda)$ Damit sind $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 4$ die Eigenwerte von A .

Bestimmung der Eigenvektoren:

Zu jedem der Eigenwerte λ_i nennen wir die Lösungen der Gleichung $A \cdot \vec{x} = \lambda_i \cdot \vec{x}$ zunächst $\vec{x}_i = (x, y, z)$ und bestimmen daraus einen Eigenvektor $\vec{b}_i$.

zu $\lambda_1 = 2$:

x	y	z	r.S.	$\sum$	Regie	
0	1	-1	0	0	1	
-2	3	-1	0	0		1
-2	2	0	0	0	0	-1
0	1	-1	0	0	-1	
0	1	-1	0	0	1	
0	0	0	0	0		

$$x = y$$

$$y = z$$

Wähle x als Parameter. Dann ergibt sich

$$\vec{x}_1 = x \cdot (1, 1, 1) \quad \vec{b}_1 = (1, 1, 1)$$

zu $\lambda_2 = 3$:

x	y	z	r.S.	$\sum$	Regie	
-1	1	-1	0	-2	-2	-2
-2	2	-1	0	-1	1	
-2	2	-1	0	-1		1
0	0	1	0	1	-1	
0	0	1	0	1	1	
0	0	0	0	0		

$$x = y - z$$

$$z = 0$$

Wähle y als Parameter. Dann ergibt sich

$$\vec{x}_2 = y \cdot (1, 1, 0) \quad \vec{b}_2 = (1, 1, 0)$$

zu $\lambda_3 = 4$:

x	y	z	r.S.	$\sum$	Regie	
-2	1	-1	0	-2	-1	-2
-2	1	-1	0	-2	1	
-2	2	-2	0	-2		1
0	0	0	0	0	-1	
2	0	0	0	1	1	
0	0	0	0	0		

$$y = x + z$$

$$x = 0$$

Wähle z als Parameter. Dann ergibt sich

$$\vec{x}_3 = z \cdot (0, 1, 1) \quad \vec{b}_3 = (0, 1, 1)$$

Die drei Eigenvektoren $\vec{b}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{b}_2 = (1, 1, 0)$ und $\vec{b}_3 = (0, 1, 1)$ bilden eine Basis B des $\mathbb{R}^3$:

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

40.1b) Geometrische Beschreibung der Abbildung:

Die Richtung $\vec{x}_1$ bleibt bei der Abbildung φ erhalten; der Eigenvektor $\vec{b}_1$ wird um den Faktor $\lambda_1 = 2$ verlängert.

Die Richtung $\vec{x}_2$ bleibt bei der Abbildung φ erhalten; der Eigenvektor $\vec{b}_2$ wird um den Faktor $\lambda_2 = 3$ verlängert.

Die Richtung $\vec{x}_3$ bleibt bei der Abbildung φ erhalten; der Eigenvektor $\vec{b}_3$ wird um den Faktor $\lambda_3 = 4$ verlängert.

40.1c) Bildpunkte der Einheitskugel K :

Wir wählen einen beliebigen Punkt (x, y, z) auf K . Nach den Erläuterungen in der Aufgabenstellung gilt dann für diesen Punkt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \quad (\text{K1})$$

Andererseits beschreibt die Matrix A den Zusammenhang zwischen diesem Punkt (x, y, z) und seinem Bildpunkt $\varphi((x, y, z)) =: (u, v, w)$: Es ist

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

oder - durch Multiplikation mit A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Wir rechnen also nun A^{-1} aus:

					Σ	Regie
2	1	-1	1	0	0	3
-2	5	-1	0	1	0	3
-2	2	2	0	0	1	3
2	1	-1	1	0	0	3
0	6	-2	1	1	0	6
0	3	1	1	0	1	6
2	4	0	2	0	1	9
0	12	0	3	1	2	18
0	3	1	1	0	1	6
-6	0	0	-3	1	-1	-9
0	12	0	3	1	2	18
0	0	-4	-1	1	-2	-6
12	0	0	6	-2	2	18
0	12	0	3	1	2	18
0	0	12	3	-3	6	18

Damit ist

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (\text{K2})$$

Durch Transponieren erhalten wir aus dieser Gleichung für $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ eine Gleichung für $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$:

Es ist

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad (\text{K3})$$

Aus der obigen Gleichung (K1) wird also mit Hilfe von (K2) und (K3):

$$\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 1 \quad (\text{K4})$$

Die linke Seite dieser Gleichung (K4) rechnen wir nun aus:

Es ist

$$\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot u - 2 \cdot v + 2 \cdot w & 3 \cdot u + v + 2 \cdot w & 3 \cdot u - 3 \cdot v + 6 \cdot w \end{pmatrix} \quad (\text{K5})$$

und

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot u - 2 \cdot v + 2 \cdot w \\ 3 \cdot u + v + 2 \cdot w \\ 3 \cdot u - 3 \cdot v + 6 \cdot w \end{pmatrix} \quad (\text{K6})$$

Also ergibt sich mit (K5) und (K6) aus (K4):

$$\frac{1}{144} \cdot \begin{pmatrix} 6 \cdot u - 2 \cdot v + 2 \cdot w & 3 \cdot u + v + 2 \cdot w & 3 \cdot u - 3 \cdot v + 6 \cdot w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \cdot u - 2 \cdot v + 2 \cdot w \\ 3 \cdot u + v + 2 \cdot w \\ 3 \cdot u - 3 \cdot v + 6 \cdot w \end{pmatrix} = 1$$

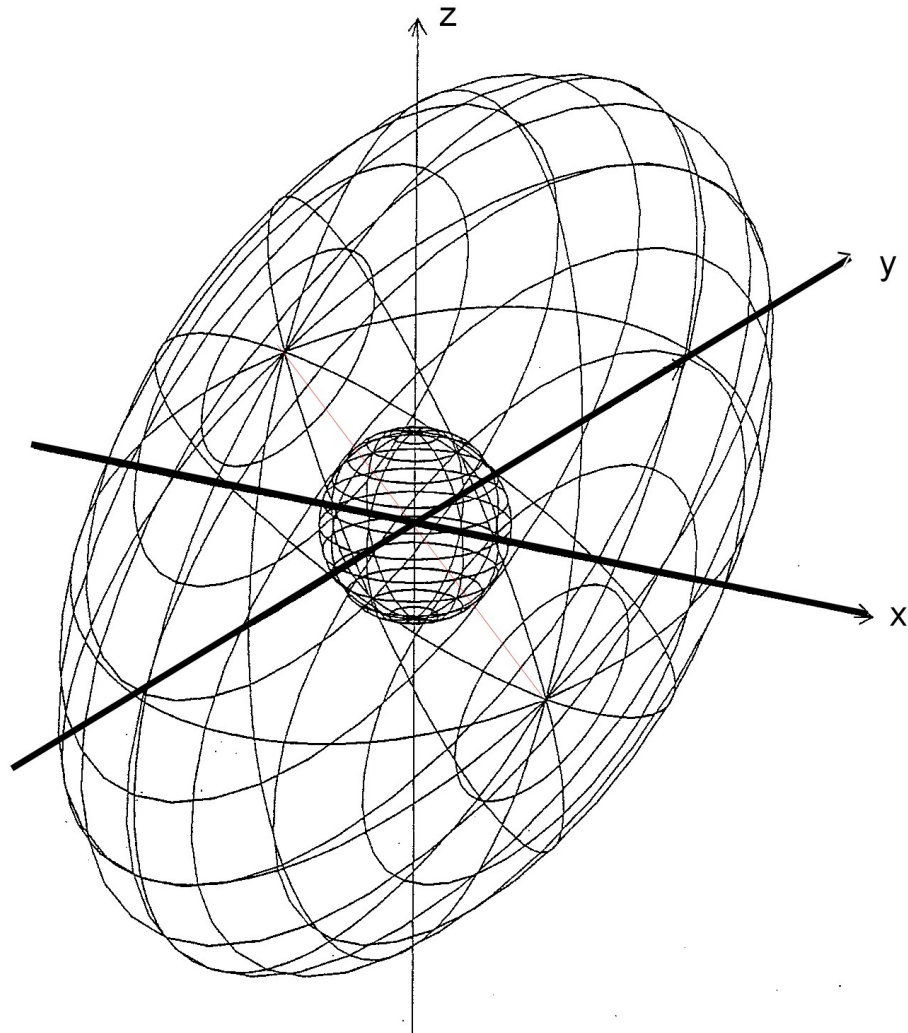
oder

$$(6 \cdot u - 2 \cdot v + 2 \cdot w)^2 + (3 \cdot u + v + 2 \cdot w)^2 + (3 \cdot u - 3 \cdot v + 6 \cdot w)^2 = 144$$

und damit

$$27 \cdot u^2 + 7 \cdot v^2 + 22 \cdot w^2 - 18 \cdot u \cdot v + 36 \cdot u \cdot w - 20 \cdot v \cdot w = 72 \quad (\text{K7})$$

Diese Gleichung beschreibt eine Quadrik, speziell ein Ellipsoid.



Die Einheitskugel K und deren Bild unter der Abbildung

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Aus der Einheitskugel

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

wird das Ellipsoid

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, 27 \cdot u^2 + 7 \cdot v^2 + 22 \cdot w^2 - 18 \cdot u \cdot v + 36 \cdot u \cdot w - 20 \cdot v \cdot w = 72 \right\}$$

Aufgabe 40.2:

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{pmatrix} 17 & -1 & -4 \\ -1 & 17 & -4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

- Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von B .
- Beschreiben Sie Abbildung φ mit $\varphi(\vec{x}) := B \cdot \vec{x}$ geometrisch.
- Geben Sie eine Gleichung für die Fläche an, die durch die Bildpunkte der Einheitskugel unter der Abbildung φ gebildet wird.

Lösung von Aufgabe 40.2a):

Bestimmung der Eigenwerte von B :

Faktor				Σ	Regie
1	$17 - \lambda$	-1	-4	$12 - \lambda$	1
	-1	$17 - \lambda$	-4	$12 - \lambda$	1 -4
	-4	-4	$2 - \lambda$	$6 - \lambda$	1
1	$17 - \lambda$	-1	-4	$12 - \lambda$	
	-1	$17 - \lambda$	-4	$12 - \lambda$	
	0	$-72 + 4 \cdot \lambda$	$18 - \lambda$	$-54 + 3 \cdot \lambda$	
$(18 - \lambda)$	$17 - \lambda$	-1	-4	$12 - \lambda$	1 -1
	-1	$17 - \lambda$	-4	$12 - \lambda$	1
	0	-4	1	-3	1
$(18 - \lambda)$	$17 - \lambda$	-1	-4	$12 - \lambda$	
	$-18 + \lambda$	$18 - \lambda$	0	0	
	0	-4	1	-3	
$(18 - \lambda)^2$	$17 - \lambda$	-1	-4	$12 - \lambda$	1
	-1	1	0	0	1
	0	-4	1	-3	4 1
$(18 - \lambda)^2$	$17 - \lambda$	-17	0	$-\lambda$	
	-1	1	0	0	
	0	-4	1	-3	
$(18 - \lambda)^2$	$17 - \lambda$	-17		$-\lambda$	1
	-1	1		0	17 1
$(18 - \lambda)^2$	$-\lambda$	0		$-\lambda$	
	-1	1		0	
$-(18 - \lambda)^2 \cdot \lambda$	1			1	

Also ist

$$|B - \lambda \cdot E| = \begin{vmatrix} 17 - \lambda & -1 & -4 \\ -1 & 17 - \lambda & -4 \\ -4 & -4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (18 - \lambda)^2.$$

Die Eigenwerte von B lauten also

$$\boxed{\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 18}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

Zu jedem der Eigenwerte λ_i nennen wir die Lösungen der Gleichung $B \cdot \vec{x} = \lambda_i \cdot \vec{x}$ zunächst $\vec{x}_i = (x, y, z)$ und bestimmen daraus einen Eigenvektor $\vec{b}_i$.

zu $\lambda_1 = 0$:

x	y	z	r.S.	$\sum$	Regie
17	-1	-4	0	12	1
-1	17	-4	0	12	1
-4	-4	2	0	-6	2 2
9	-9	0	0	0	-1
-9	9	0	0	0	1
0	0	0	0	0	

$2 \cdot z = 4 \cdot x + 4 \cdot y$

$9 \cdot y = 9 \cdot x$

Wähle x als Parameter. Dann ergibt sich

$$\vec{x}_1 = x \cdot (1, 1, 4) \quad \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot (1, 1, 4)$$

zu $\lambda_{2,3} = 18$:

x	y	z	r.S.	$\sum$	Regie
-1	-1	-4	0	2	-1 -4
-1	-1	-4	0	2	1
-4	2	-1	0	-3	1
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	

$x = -y - 4 \cdot z$

Wähle y und z als Parameter. Dann ergibt sich

$$\vec{x}_{2,3} = y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei x und y beliebige reelle Zahlen sind

$\vec{x}_{2,3}$ beschreibt eine Ebene (als „Eigenraum“).

Jeder Vektor dieses Eigenraumes steht auf $\vec{b}_1$ senkrecht, denn für einen Vektor

$$\vec{a} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 - 4 \cdot a_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

aus $\vec{x}_{2,3}$ gilt $\vec{b}_1 \perp \vec{a}$, da

$$\vec{b}_1 \circ \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -a_1 - 4 \cdot a_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot [1 \cdot (-a_1 - 4 \cdot a_2) + 1 \cdot a_1 + 4 \cdot a_2] = 0.$$

Also können wir einen beliebigen Vektor aus $\vec{x}_{2,3}$ als 2. Basisvektor wählen:

$$\vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1, 1, 0)$$

Um eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ zu finden, ist also die Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ zu ergänzen.

Dazu setzen wir

$$\vec{b}_3 := \vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also erhalten wir eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$:

$$B := \left\{ \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

40.2b) Geometrische Beschreibung der Abbildung:

Die Richtung $\vec{x}_1$ bleibt bei der Abbildung φ erhalten; der Eigenvektor $\vec{b}_1$ wird um den Faktor $\lambda_1 = 0$ verkürzt.

Die Richtungen $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ bleiben bei der Abbildung φ erhalten; beide Eigenvektoren $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ werden um den Faktor $\lambda = 18$ verlängert.

Aufgabe 40.3:

Diagonalisieren Sie die Matrix $C := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ -12 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Wie in der Erläuterung zu Aufgabe 40.1 beschrieben, läßt sich die Einheitskugel auch durch eine Matrix beschreiben. Allgemein lassen sich alle Kegelschnitte mit dem Mittelpunkt $(0,0,0)$ durch (symmetrische) Matrizen beschreiben: es ist nämlich

$$(x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \cdot x^2 + d \cdot y^2 + f \cdot z^2 + 2 \cdot b \cdot x \cdot y + 2 \cdot c \cdot x \cdot z + 2 \cdot e \cdot y \cdot z$$

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass im Falle $b = c = e = 0$ der Kegelschnitt in besonders einfacher Form dargestellt werden kann: seine Hauptachsen sind dann parallel zu den Koordinatenachsen. Um eine solche Lage zu erreichen, ist meist eine Drehung erforderlich.

Wir versuchen folgenden Ansatz: Wir bestimmen die Eigenwerte (z.B. λ_1, λ_2 und λ_3) von C und die zugehörigen Eigenvektoren (z.B. $\vec{b}_1$ zu λ_1 mit $C \cdot \vec{b}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{b}_1$), b_2 und b_3). Damit erzeugen wir eine Matrix $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3)$.

Dann prüfen wir, ob mit der Diagonalmatrix $D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ gilt

$$C = B \cdot D \cdot B^{-1}$$

Lösung von Aufgabe 40.3:

Bestimmung der Eigenwerte von C :

Faktor				Σ	Regie
1	$-2 - \lambda$	1	0	$-1 - \lambda$	
	-8	$4 - \lambda$	0	$-4 - \lambda$	
	-12	4	$1 - \lambda$	$-7 - \lambda$	
$(1 - \lambda)$	$-2 - \lambda$	1		$-1 - \lambda$	$-4 + \lambda$
	-8	$4 - \lambda$		$-4 - \lambda$	1
$\frac{1-\lambda}{-4+\lambda}$	$(-2 - \lambda) \cdot (-4 + \lambda)$	$-4 + \lambda$		$(-4 + \lambda) \cdot (-2 - \lambda + 1)$	1
	-8	$4 - \lambda$		$-4 - \lambda$	1
$\frac{1-\lambda}{-4+\lambda}$	$-\lambda^2 + 2 \cdot \lambda$	0		$-\lambda^2 + 2 \cdot \lambda$	
	-8	$4 - \lambda$		$-4 - \lambda$	
$(1 - \lambda)$	$-\lambda^2 + 2 \cdot \lambda$			$-\lambda^2 + 2 \cdot \lambda$	

Also

$$|C - \lambda \cdot E| = (1 - \lambda) \cdot (-\lambda^2 + 2 \cdot \lambda) = (1 - \lambda) \cdot \lambda \cdot (-\lambda + 2)$$

und damit

$$|C - \lambda \cdot E| = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2$$

Nun sind die Eigenvektoren zu bestimmen:

Zu $\lambda_1 = 0$:

x	y	z	r.S.	$\sum$	Regie
-2	1	0	0	-1	1
-8	4	0	0	-4	1
-12	4	1	0	-7	
-2	1	0	0	-1	-4
-8	4	0	0	-4	1
0	0	0	0	0	

$$z = 12 \cdot x - 4 \cdot y$$

$$y = 2 \cdot x$$

Wähle x als Parameter. Dann ergibt sich

$$\vec{x}_1 = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Wir wählen $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

wobei x eine beliebige reelle Zahl ist

Zu $\lambda_2 = 1$:

x	y	z	r.S.	$\sum$	Regie
-3	1	0	0	-2	-3 -4
-8	3	0	0	-5	1
-12	4	0	0	-8	1
1	0	0	0	1	
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	

$$y = 3 \cdot x$$

$$x = 0$$

Wähle z als Parameter. Dann ergibt sich

$$\vec{x}_2 = z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir wählen $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

wobei z eine beliebige reelle Zahl ist

(Bemerkung: Es ist $\vec{b}_1 \circ \vec{b}_2 = 4 \neq 0$, d.h. die Eigenvektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ stehen nicht senkrecht aufeinander - die Matrix C ist allerdings auch nicht symmetrisch!)

Zu $\lambda_3 = 2$:

x	y	z	r.S.	$\sum$	Regie
-4	1	0	0	-3	
-8	2	0	0	-6	
-12	4	-1	0	-9	
-4	1	0	0	-3	-2
-8	2	0	0	-6	1
0	0	0	0	0	

$$z = -12 \cdot x + 4 \cdot y$$

$$y = 4 \cdot x$$

Wähle x als Parameter. Dann ergibt sich

$$\vec{x}_3 = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Wir wählen $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

wobei x eine beliebige reelle Zahl ist

Nun ist damit

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Matrix aus den Eigenwerten von C und

$$B = (\vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

eine Basis aus drei zugehörigen Eigenvektoren.

Wir wollen zeigen, dass gilt

$$C = B \cdot D \cdot B^{-1}$$

Also muss B^{-1} berechnet werden:

1	0	1	1	0	0	1	-2	-4
2	0	4	0	1	0		1	
4	1	4	0	0	1			1
1	0	1	1	0	0	1		
0	0	2	-2	1	0		1	
0	1	0	0	0	1	1		
1	0	1	1	0	0	2		
0	1	0	0	0	1	1		
0	0	2	-2	1	0	-1	1	
2	0	0	4	-1	0			
0	1	0	0	0	1			
0	0	2	-2	1	0			

Damit erhalten wir zu der Matrix B die Matrix

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Die drei Matrizen B , D und B^{-1} sollen nun multipliziert werden. Es ist

$$\begin{aligned} B \cdot D \cdot B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ -12 & 4 & 1 \end{pmatrix} = C \end{aligned}$$

Damit haben wir die Matrix C durch Drehung mit der Matrix B auf Diagonalgestalt D gebracht:

$$C = B \cdot D \cdot B^{-1}$$

Durch Multiplikation mit B von rechts und durch Multiplikation mit B^{-1} von links ergibt sich

$$B^{-1} \cdot C \cdot B = D$$

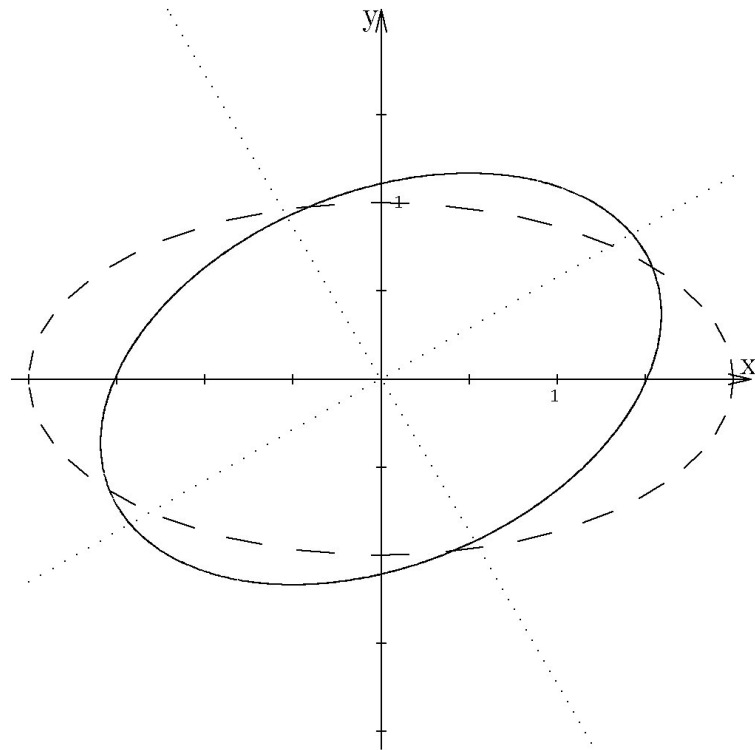
Aufgabe 40.4:

Die Ellipse

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 4 \cdot y^2 = 4\}$$

wird um 30° (gegen den Uhrzeigersinn) gedreht.

Gesucht ist eine mathematische Beschreibung der um 30° gedrehten Ellipse.



Ellipse $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 4 \cdot y^2 = 4\}$ (gestrichelt)
und ihr Bild nach einer Drehung um 30° (ausgezogen).

Lösung von Aufgabe 40.4:

Wir beschreiben die Ellipse E durch eine Matrix D :

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \cdot D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \right\} \quad \text{mit} \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und verwenden die Drehmatrix B für eine Drehung um den Nullpunkt um 30° :

$$B = \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

und setzen

$$\boxed{A = B \cdot D \cdot B^{-1}}$$

Zunächst ist B^{-1} die zu B inverse Matrix, d.h. eine Drehung um $(0,0)$ um -30° , also

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Damit ist dann

$$A = B \cdot D \cdot B^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \cdot \sqrt{3} \\ -3 \cdot \sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}$$

Zu A gehört dann die Kurve

$$E_A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \right\}$$

oder

$$E_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 7 \cdot x^2 - 6 \cdot x \cdot y + 13 \cdot y^2 = 16\}$$

Nun fragen wir uns nach den Eigenwerten und Eigenvektoren von A .

Also werden alle λ gesucht mit

$$0 = |A - \lambda \cdot E| = \begin{vmatrix} \frac{7}{4} - \lambda & -\frac{3}{4} \cdot \sqrt{3} \\ -\frac{3}{4} \cdot \sqrt{3} & \frac{13}{4} - \lambda \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} 7 - 4 \cdot \lambda & -3 \cdot \sqrt{3} \\ -3 \cdot \sqrt{3} & 13 - 4 \cdot \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Natürlich könnte man diese Determinante direkt ausrechnen nach der Formel

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

aber es geht auch anders:

Faktor		Regie
1	$\begin{matrix} 7 - 4 \cdot \lambda & -3 \cdot \sqrt{3} \\ -3 \cdot \sqrt{3} & 13 - 4 \cdot \lambda \end{matrix}$	
$\frac{1}{3 \cdot \sqrt{3}}$	$\begin{matrix} 3 \cdot \sqrt{3} \cdot (7 - 4 \cdot \lambda) & -27 \\ -3 \cdot \sqrt{3} & 13 - 4 \cdot \lambda \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 7 - 4 \cdot \lambda & 1 \end{matrix}$
$\frac{1}{3 \cdot \sqrt{3}}$	$\begin{matrix} 0 & -27 + (13 - 4 \cdot \lambda) \cdot (7 - 4 \cdot \lambda) \\ -3 \cdot \sqrt{3} & 13 - 4 \cdot \lambda \end{matrix}$	
-1	$-27 + (13 - 4 \cdot \lambda) \cdot (7 - 4 \cdot \lambda)$	

Also ist

$$|A - \lambda \cdot E| = -27 + (13 - 4 \cdot \lambda) \cdot (7 - 4 \cdot \lambda) = -27 + 91 - 20 \cdot \lambda + 16 \cdot \lambda^2$$

und damit

$$|A - \lambda \cdot E| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 16 \cdot \lambda^2 - 80 \cdot \lambda + 64 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 5 \cdot \lambda + 4 = 0$$

Diese Gleichung hat die folgenden Eigenwerte als Lösungen:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 4$$

Zu diesen Eigenwerten gehören folgende Eigenvektoren:

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$:

x	y	r.S.	Regie
$7 - 4 \cdot 1$	$-3 \cdot \sqrt{3}$	0	
$-3 \cdot \sqrt{3}$	$13 - 4 \cdot 1$	0	
$\boxed{3}$	$-3 \cdot \sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
$-3 \cdot \sqrt{3}$	9	0	1
0	0	0	

Also ist die um 30° gedrehte x -Achse der Eigenvektor zu dem Eigenwert 1.

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 4$:

x	y	r.S.	Regie	
$7 - 4 \cdot 4$	$-3 \cdot \sqrt{3}$	0		
$-3 \cdot \sqrt{3}$	$13 - 4 \cdot 4$	0		
-9	$-3 \cdot \sqrt{3}$	0	1	
$-3 \cdot \sqrt{3}$	-3	0	$-\sqrt{3}$	$3 \cdot y = -3 \cdot \sqrt{3} \cdot x \Leftrightarrow y = -\sqrt{3} \cdot x$
0	0	0		

Also ist die um 30° gedrehte y -Achse der Eigenvektor zu dem Eigenwert 4.

Aufgabe 40.5:

Bestimmen Sie die Kurve, die durch die Gleichung

$$7 \cdot x^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot y + 13 \cdot y^2 - 16 = 0 \quad (A)$$

beschrieben wird und berechnen Sie die Lage der Kurve im x, y -Koordinatensystem.

Lösung der Aufgabe

Es wird angenommen, dass die Kurve ein Kegelschnitt ist, dessen Hauptachsen um einen Winkel φ gedreht wurden.

Wir wählen die Koordinaten (u, v) für dieses gedrehte Koordinatensystem; dann gibt es einen Winkel φ , so dass zwischen dem (x, y) -Koordinatensystem und dem (u, v) -Koordinatensystem folgender Zusammenhang besteht:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (B)$$

oder

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (C)$$

Direkte Lösung

Zur Abkürzung ersetzen wir $s := \sin(\varphi)$ und $c := \cos(\varphi)$. Dann ergibt sich aus der Gleichung (B):

$$\begin{aligned} x &= u \cdot \cos(\varphi) - v \cdot \sin(\varphi) = u \cdot c - v \cdot s \\ y &= u \cdot \sin(\varphi) + v \cdot \cos(\varphi) = u \cdot s + v \cdot c \end{aligned}$$

Diese Werte werden in die Gleichung (A) eingesetzt:

$$7 \cdot (u \cdot c - v \cdot s)^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot (u \cdot c - v \cdot s) \cdot (u \cdot s + v \cdot c) + 13 \cdot (u \cdot s + v \cdot c)^2 - 16 = 0$$

oder

$$\begin{aligned} &7 \cdot (u^2 \cdot c^2 - 2 \cdot u \cdot c \cdot v \cdot s + v^2 \cdot s^2) \\ &+ 6 \cdot \sqrt{3} \cdot (u^2 \cdot c \cdot s + u \cdot v \cdot (c^2 - s^2) - v^2 \cdot c \cdot s) \\ &+ 13 \cdot (u^2 \cdot s^2 + 2 \cdot u \cdot v \cdot c \cdot s + v^2 \cdot c^2) = 16 \end{aligned} \quad (D)$$

Diese Gleichung (D) kann nach Potenzen von u bzw. v sortiert werden:

$$\begin{aligned} &u^2 \cdot (7 \cdot c^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot c \cdot s + 13 \cdot s^2) \\ &+ u \cdot v \cdot (-14 \cdot c \cdot s + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot (c^2 - s^2) + 26 \cdot c \cdot s) \\ &+ v^2 \cdot (7 \cdot s^2 - 6 \cdot \sqrt{3} \cdot c \cdot s + 13 \cdot c^2) = 16 \end{aligned} \quad (E)$$

Aus der Gleichung (E) kann der Winkel φ bestimmt werden, denn wenn der Koeffizient von $u \cdot v$ gleich 0 ist, d.h. wenn gilt

$$-14 \cdot c \cdot s + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot (s^2 - c^2) + 26 \cdot c \cdot s = 0 \quad (F)$$

dann hat die Gleichung (E) Normalform.

Nun wird der Winkel φ bestimmt, für den die Gleichung (F) gilt:

Wegen $\tan(\varphi) = \frac{s}{c} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$ wird die Gleichung (F) durch c^2 geteilt:

$$\begin{aligned} -14 \cdot \tan(\varphi) + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot (\tan^2(\varphi) - 1) + 26 \cdot \tan(\varphi) &= 0 \\ \text{oder} \\ 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \tan^2(\varphi) + 12 \cdot \tan(\varphi) - 6 \cdot \sqrt{3} &= 0 \end{aligned} \quad (G)$$

Diese quadratische Gleichung (G) hat die Lösungen

$$\tan(\varphi_{1,2}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \begin{cases} \sqrt{3} \\ -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \end{cases} \quad (H)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wählen wir willkürlich

$$\varphi = 60^\circ \quad (I)$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} s = \sin(60^\circ) &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \quad \text{und} \quad c = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \\ \text{sowie} \\ c \cdot s &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \quad \text{und} \quad s^2 = \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad c^2 = \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (J)$$

Werden diese Werte in Gleichung (E) eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &u^2 \cdot \left(7 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} + 13 \cdot \frac{3}{4}\right) \\ + &v^2 \cdot \left(7 \cdot \frac{3}{4} - 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} + 13 \cdot \frac{1}{4}\right) = 16 \\ \text{oder} \\ &u^2 \cdot \left(\frac{7}{4} + \frac{18}{4} + \frac{39}{4}\right) + v^2 \cdot \left(\frac{21}{4} - \frac{18}{4} + \frac{13}{4}\right) = 16 \end{aligned}$$

und damit

$$u^2 \cdot 16 + v^2 \cdot 4 = 16 \quad \text{oder} \quad \frac{u^2}{1} + \frac{v^2}{4} = 1 \quad (K)$$

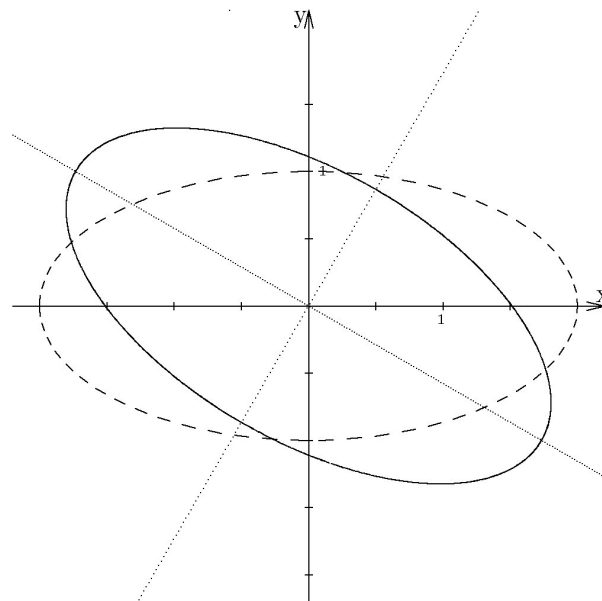


Bild zu Aufgabe 40.5: Hauptachsentransformation

$$7 \cdot x^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot y + 13 \cdot y^2 - 16 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{u^2}{1} + \frac{v^2}{4} = 1$$

Lösung als Eigenwertproblem (siehe REP Seite 219)

Wir schreiben die Gleichung (A) in Matrizenform:

$$7 \cdot x^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot y + 13 \cdot y^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 16 \quad (L)$$

Wenn die Matrizengleichung die Normalform eines Kegelschnittes beschreiben soll, dann muss ein Koordinatensystem (u, v) bestimmt werden, für das entsprechend der Gleichung (L) gilt:

$$a_{11} \cdot u^2 + a_{22} \cdot v^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (u \ v) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 16 \quad (M1)$$

Wenn $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix}$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 bezüglich einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ sind, dann gilt nach Definition von Eigenwert und Eigenvektor

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} = \lambda_i \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} \quad \text{für } i \in \{1, 2\} \quad (M2)$$

oder

$$(A - \lambda_i \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (M2)$$

oder

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda_i & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } i \in \{1, 2\} \quad (M3)$$

und damit

$$\begin{aligned} (x_{i,1} \ x_{i,2}) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} &= (x_{i,1} \ x_{i,2}) \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} \\ &= (x_{i,1} \ x_{i,2}) \cdot \lambda_i \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} = \lambda_i \cdot (x_{i,1}^2 + x_{i,2}^2) \quad \text{für } i \in \{1, 2\} \end{aligned} \quad (M4)$$

Wenn daher die Achsen eines Kegelschnittes die Eigenvektoren der zugehörigen Matrix sind, dann hat die beschreibende Gleichung bezüglich des durch die Eigenvektoren definierten Koordinatensystems Normalform.

Folglich ist es zur Lösung der hier gestellten Aufgabe sinnvoll, Eigenwerte und -vektoren der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}$$

aus der Gleichung (L) zu bestimmen.

Bestimmung der Eigenwerte

Es ist

$$\left| \begin{pmatrix} 7 - \lambda & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 - \lambda \end{pmatrix} \right| = (7 - \lambda) \cdot (13 - \lambda) - (3 \cdot \sqrt{3}) \cdot (3 \cdot \sqrt{3}) = 91 - 20 \cdot \lambda + \lambda^2 - 27 = \lambda^2 - 20 \cdot \lambda + 64 \quad (N)$$

Die Nullstellen dieser Determinante (N) sind dann die Eigenwerte, also

$$\lambda_{1,2} = 10 \pm \sqrt{10^2 - 64} = 10 \pm 6 = \begin{cases} 16 \\ 4 \end{cases} \quad \text{wir setzen } \lambda_1 = 16 \text{ und } \lambda_2 = 4 \quad (O)$$

Zu diesen Eigenwerten $\lambda_1 = 16$ und $\lambda_2 = 4$ werden nun die Eigenvektoren bestimmt:

Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 16$ bezüglich der Matrix B :

Es werden (Eigen-)Vektoren (x_1, y_1) gesucht, für die gilt:

$$\begin{pmatrix} 7 - 16 & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 - 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (P)$$

Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{rcl} -9 \cdot x_1 & + & 3 \cdot \sqrt{3} \cdot y_1 = 0 \\ 3 \cdot \sqrt{3} \cdot x_1 & - & 3 \cdot y_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y_1 \\ 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y_1 - 3 \cdot y_1 = 0 \end{array} \quad (Q)$$

Folglich kann y_1 beliebig gewählt werden:

$$(x_1, y_1) = y_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right)$$

Wir wählen y_1 so, dass der Vektor (x_1, y_1) die Länge 1 hat, d.h. dass gilt $\frac{1}{3} \cdot y_1^2 + y_1^2 = 1$ also $y_1^2 = \frac{3}{4}$ und damit $y_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$.

Daraus ergibt sich $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}$.

Dann lautet also der (normierte) Eigenvektor $(x_{1,n}, y_{1,n})$ zu dem Eigenwert $\lambda_1 = 16$:

$$(x_{1,n}, y_{1,n}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \right) \quad (R1)$$

Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ bezüglich der Matrix B :

Es werden (Eigen-)Vektoren (x_2, y_2) gesucht, für die gilt:

$$\begin{pmatrix} 7 - 4 & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{rcl} 3 \cdot x_2 & + & 3 \cdot \sqrt{3} \cdot y_2 = 0 \\ 3 \cdot \sqrt{3} \cdot x_2 & + & 9 \cdot y_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = -\sqrt{3} \cdot y_2 \\ -3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot y_2 + 9 \cdot y_2 = 0 \end{array}$$

Folglich kann auch y_2 beliebig gewählt werden:

$$(x_2, y_2) = y_2 \cdot \left(-\sqrt{3}, 1 \right)$$

Wir wählen y_2 so, dass der Vektor (x_2, y_2) die Länge 1 hat, d.h. dass gilt $3 \cdot y_2^2 + y_2^2 = 1$ also $y_2^2 = \frac{1}{4}$ und damit $y_2 = \frac{1}{2}$.

Daraus ergibt sich $x_2 = -\sqrt{3} \cdot y_2 = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$.

Dann lautet also der (normierte) Eigenvektor $(x_{2,n}, y_{2,n})$ zu dem Eigenwert $\lambda_2 = 4$:

$$(x_{2,n}, y_{2,n}) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2} \right) \quad (R2)$$

Prinzipiell ist das Problem jetzt gelöst: Wählt man als Hauptachsen die beiden normierten Eigenvektoren $(x_{1,n}, y_{1,n})$ und $(x_{2,n}, y_{2,n})$, so hat die Kurve bezüglich dieser "Basis" als Achsen ihre Normalform, und die Halbachsen sind λ_1 beziehungsweise λ_2 .

Aber wir können auch weiter rechnen:

Wir entscheiden uns, den Eigenvektor (x_1, y_1) auf die x -Achse abzubilden, also nach (R1) soll

$$(x_{1,n}, y_{1,n}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right) \text{ auf } (1, 0)$$

abgebildet werden.

Dann sollte der Eigenvektor (x_2, y_2) auf die y -Achse, also nach (R2)

$$(x_{2,n}, y_{2,n}) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right) \text{ auf } (0, 1)$$

so abgebildet werden, dass die

$$\text{zugehörige Matrix } A = \begin{pmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} \\ y_{1,n} & y_{2,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

eine Drehmatrix ist, d.h. $|A| = 1$. Diese Bedingung ist für A erfüllt.

(Bemerkung: Die Matrix A ist eine Drehmatrix - es kann der Drehwinkel φ bestimmt werden ($\cos(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot (x_{1,n} + y_{1,n}) = \frac{1}{2} \cdot 1$) und dieser ist dann $\varphi = 60^\circ$ - wie in Gleichung (I).)

Die „gedrehten“ Koordinaten sollen mit (u, v) bezeichnet werden. Ein beliebiger Punkt (x, y) im ursprünglichen Koordinatensystem hängt dann durch die folgende Gleichung mit den Koordinaten im gedrehten Koordinatensystem zusammen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (S1)$$

Die Gleichung (S1) kann transponiert werden:

$$(x \ y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\top = \left(A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)^\top = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^\top \cdot A^\top = (u \ v) \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad (S2)$$

Nun kann - unter Verwendung der Gleichung (S1) und (S2) - in der Gleichung (L) das gedrehte Koordinatensystem verwendet werden:

$$\begin{aligned} (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 16 \\ \Leftrightarrow (u \ v) \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= 16 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot (u \ v) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= 16 \quad (T) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot (u \ v) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7+9 & -4 \cdot \sqrt{3} \\ 16 \cdot \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= 16 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot (u \ v) \cdot \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= 16 \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\frac{1}{4} \cdot (64 \cdot u^2 + 16 \cdot v^2) = 16$$

oder

$$\frac{u^2}{4} + v^2 = 1$$

Aufgabe 40.6:

Bestimmen Sie die Kurve, die durch die Gleichung

$$2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y - y^2 - 6 = 0 \quad (A)$$

beschrieben wird und berechnen Sie die Lage der Kurve im x, y -Koordinatensystem.

Lösung der Aufgabe 40.6:

Es wird angenommen, dass die Kurve ein Kegelschnitt ist, dessen Hauptachsen um einen Winkel φ gedreht wurden.

Wir wählen die Koordinaten (u, v) für dieses gedrehte Koordinatensystem; dann gibt es einen Winkel φ , so dass zwischen dem (x, y) -Koordinatensystem und dem (u, v) -Koordinatensystem folgender Zusammenhang besteht:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (B)$$

oder Direkte Lösung

Zur Abkürzung ersetzen wir $s := \sin(\varphi)$ und $c := \cos(\varphi)$. Dann ergibt sich aus der Gleichung (B):

$$\begin{aligned} x &= u \cdot \cos(\varphi) - v \cdot \sin(\varphi) = u \cdot c - v \cdot s \\ y &= u \cdot \sin(\varphi) + v \cdot \cos(\varphi) = u \cdot s + v \cdot c \end{aligned}$$

Diese Werte werden in die Gleichung (A) eingesetzt:

$$2 \cdot (u \cdot c - v \cdot s)^2 + 4 \cdot (u \cdot c - v \cdot s) \cdot (u \cdot s + v \cdot c) - (u \cdot s + v \cdot c)^2 - 6 = 0$$

oder

$$\begin{aligned} &2 \cdot (u^2 \cdot c^2 - 2 \cdot u \cdot c \cdot v \cdot s + v^2 \cdot s^2) \\ &+ 4 \cdot (u^2 \cdot c \cdot s + u \cdot v \cdot (c^2 - s^2) - v^2 \cdot c \cdot s) \\ &- (u^2 \cdot s^2 + 2 \cdot u \cdot v \cdot c \cdot s + v^2 \cdot c^2) = 6 \end{aligned} \quad (C)$$

Diese Gleichung (C) kann nach Potenzen von u bzw. v sortiert werden:

$$\begin{aligned} &u^2 \cdot (2 \cdot c^2 + 4 \cdot c \cdot s - s^2) \\ &+ u \cdot v \cdot (-4 \cdot c \cdot s + 4 \cdot (c^2 - s^2) - 2 \cdot c \cdot s) \\ &+ v^2 \cdot (2 \cdot s^2 - 4 \cdot c \cdot s - c^2) = 6 \end{aligned} \quad (D)$$

Aus der Gleichung (D) kann der Winkel φ bestimmt werden, denn wenn der Koeffizient von $u \cdot v$ gleich 0 ist, d.h. wenn gilt

$$-4 \cdot c \cdot s + 4 \cdot (c^2 - s^2) - 2 \cdot c \cdot s = 0 \quad (E)$$

dann hat die Gleichung (D) Normalform.

Nun wird der Winkel φ bestimmt, für den die Gleichung (E) gilt:

Wegen $\tan(\varphi) = \frac{s}{c} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$ wird die Gleichung (E) durch c^2 geteilt:

$$\begin{aligned} &-4 \cdot \tan(\varphi) + 4 \cdot (1 - \tan^2(\varphi)) - 2 \cdot \tan(\varphi) = 0 \\ &\quad \text{oder} \\ &4 \cdot \tan^2(\varphi) + 6 \cdot \tan(\varphi) - 4 = 0 \end{aligned} \quad (F)$$

Diese quadratische Gleichung (F) hat die Lösungen

$$\tan(\varphi_{1,2}) = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases} \quad (G)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wählen wir willkürlich

$$\tan(\varphi) = \frac{1}{2} \quad (H)$$

Nach F+H ist dann

$$s = \sin(\varphi) = \frac{\tan(\varphi)}{\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad c = \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

sowie $c \cdot s = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5} \quad \text{und} \quad s^2 = \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad c^2 = \frac{4}{5}$

(I)

Werden diese Werte in Gleichung (D) eingesetzt, so ergibt sich

$$u^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) + v^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{5} - 4 \cdot \frac{2}{5} - \frac{4}{5}\right) = 6 \quad \text{oder} \quad u^2 \cdot 3 - v^2 \cdot 2 = 6$$

und damit

$$\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{3} = 1 \quad (J)$$

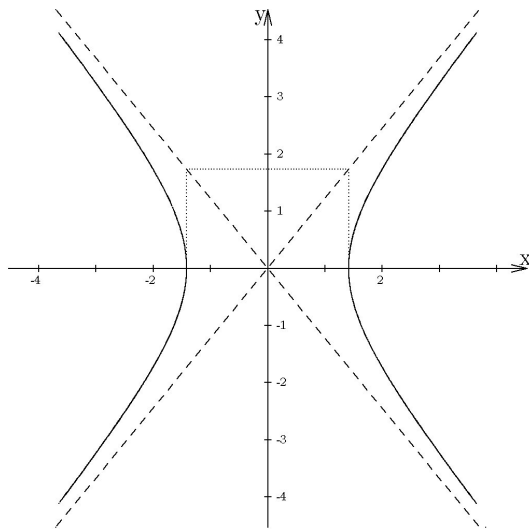


Bild zu Aufgabe 40.6:
Hauptachsentransformation
Hyperbel $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$
in Hauptachsenlage

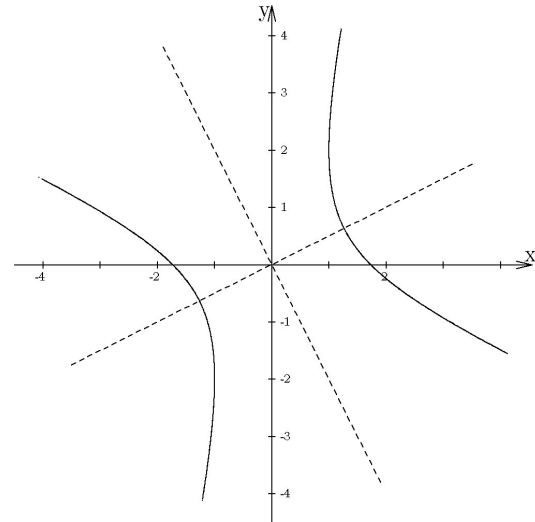


Bild zu Aufgabe 40.6:
Hauptachsentransformation
 $2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y - y^2 - 6 = 0$
und $\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{3} = 1$

Aufgabe 40.7

Bestimmen Sie die Fläche, die durch die Gleichung

$$16 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 + 16 \cdot z^2 + 40 \cdot x \cdot z - 36 = 0 \quad (A)$$

beschrieben wird und berechnen Sie die Lage der Fläche im x, y, z -Koordinatensystem.

Lösung der Aufgabe 40.7

REP Seite 224:

Allgemeine Form einer Quadrik

in Koordinaten-schreibweise:

$$a_{1,1} \cdot x^2 + a_{2,2} \cdot y^2 + a_{3,3} \cdot z^2 + 2 \cdot a_{1,2} \cdot x \cdot y + 2 \cdot a_{2,3} \cdot y \cdot z + 2 \cdot a_{1,3} \cdot x \cdot z + a_{0,0} = 0$$

in Matrizen-schreibweise (symmetrische Matrix):

$$\vec{x}^\top \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + a_{0,0} = 0 \text{ mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

also hier:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 0 & 20 \\ 0 & 9 & 0 \\ 20 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 36 = 0 \text{ mit } M := \begin{pmatrix} 16 & 0 & 20 \\ 0 & 9 & 0 \\ 20 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Man bestimmt:

(1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als Eigenwerte von M :

Es ist

$$\begin{vmatrix} 16 - \lambda & 0 & 20 \\ 0 & 9 - \lambda & 0 \\ 20 & 0 & 16 - \lambda \end{vmatrix} = (9 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 16 - \lambda & 20 \\ 20 & 16 - \lambda \end{vmatrix} = (9 - \lambda) \cdot [(16 - \lambda)^2 - 400] \\ = (9 - \lambda) \cdot [\lambda^2 - 32 \cdot \lambda - 144] = (9 - \lambda) \cdot (\lambda + 4) \cdot (\lambda - 36) = 0$$

also erhalten wir die Eigenwerte

$$\boxed{\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -4 \text{ und } \lambda_3 = 36.}$$

Ergebnis: $9 \cdot u^2 - 4 \cdot v^2 + 36 \cdot w^2 = 36$, also ein Ellipsoid. Es sind noch die Achsenrichtungen von u, v und w zu bestimmen.

(2) Zu diesen Eigenwerten gehören folgende Eigenvektoren bzw. Eigenräume:

(2a) Eigenraum V_9 zum Eigenwert $\lambda_1 = 9$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 16 - \lambda_1 & 0 & 20 \\ 0 & 9 - \lambda_1 & 0 \\ 20 & 0 & 16 - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 7 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\boxed{\vec{x}_9 = \mu \cdot (0, 1, 0) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}}$$

(2b) Eigenraum V_{-4} zum Eigenwert $\lambda_2 = -4$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 16 - \lambda_2 & 0 & 20 \\ 0 & 9 - \lambda_2 & 0 \\ 20 & 0 & 16 - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 20 & 0 & 20 \\ 0 & 13 & 0 \\ 20 & 0 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\boxed{\vec{x}_{-4} = \mu \cdot (1, 0, -1) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}}$$

(2c) Eigenraum V_{36} zum Eigenwert $\lambda_3 = 36$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 16 - \lambda_3 & 0 & 20 \\ 0 & 9 - \lambda_3 & 0 \\ 20 & 0 & 16 - \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} -20 & 0 & 20 \\ 0 & -27 & 0 \\ 20 & 0 & -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\boxed{\vec{x}_{36} = \mu \cdot (1, 0, 1) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}}$$

(3) Drehmatrix aus den Eigenvektoren:

Wir können nun festlegen, auf welchen der drei (auf die Länge 1 normierten) Eigenvektoren $\vec{x}_9$, $\vec{x}_{-4}$ und $\vec{x}_{36}$ jeweils die Einheits-Vektoren $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ abgebildet werden sollen.

Dabei ist darauf zu achten,
dass auch die drei Bildvektoren $\vec{x}_9$, $\vec{x}_{-4}$ und $\vec{x}_{36}$
in dieser Reihenfolge
ein Rechtssystem bilden (wie die 3 Einheitsvektoren $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$)
so dass die Determinante der zugehörigen Drehmatrix gleich +1 ist.

Wir versuchen es mit folgendem Ansatz:

$$\begin{cases} (1, 0, 0) \rightarrow \vec{x}_9 = (0, 1, 0) \\ (0, 1, 0) \rightarrow \vec{x}_{-4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1, 0, -1) \\ (0, 0, 1) \rightarrow \vec{x}_{36} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow D := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Leider ist $\det(D) = -1$.

Nun vertauschen wir die beiden letzten Vektoren und versuchen es neu:

$$\begin{cases} (1, 0, 0) \rightarrow \vec{x}_9 = (0, 1, 0) \\ (0, 1, 0) \rightarrow \vec{x}_{36} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1, 0, 1) \\ (0, 0, 1) \rightarrow \vec{x}_{-4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow D := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dann ist $\det(D) = 1$.

(4) Drehachse und Drehwinkel:

Die Drehachse $\vec{a}$ ist ein Eigenvektor der Drehmatrix D zum Eigenwert 1.

Für den zu $\vec{a}$ gehörigen Drehwinkel α gilt:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\text{spur} D - 1)}$$

(4a) Berechnung des Drehwinkels α von D :

Es ist $\text{spur} D = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

und folglich $\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\text{spur} D - 1) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - 1)$,

also $\boxed{\alpha = 149^\circ}$.

(4b) Berechnung der Drehachse von D :

Zunächst ist der Eigenvektor zu dem Eigenwert 1 der Drehmatrix D zu finden - falls die Matrix einen solchen Eigenwert besitzt. Also suchen wir nach den Eigenwerten der (richtigen) Drehmatrix D : Es ist

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 1 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - \lambda \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \right) \right]$$

$$= -\lambda^3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \lambda^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \lambda + 1$$

Also ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert von D , denn es ist

$$-1^3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + 1 = 0$$

Die Drehachse $G_{dreh} = \mathbb{R} \cdot (x_D, y_D, z_D)$ dieser Drehung wird dann bestimmt als der Eigenvektor zu dem Eigenwert $\lambda = 1$, dh. es muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 0 - 1 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 1 & 0 - 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeile	x_D	y_D	z_D	r.S.	Regie
1	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1
2	1	-1	0	0	1 0 $x_D = y_D$
3	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$	0	1
4	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ $z_D = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot y_D$
5		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
6	0	A	0	0	

mit $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$

also ist y_D nach Zeile 6 als freier Parameter zu wählen, z.B. $y_D = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dann ist $z_D = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot y_D = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ nach Zeile 4, also $z_D = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

und $x_D = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nach Zeile 2.

Damit ist die Drehachse definiert durch

Drehachse: $G_{dreh} := \mathbb{R} \cdot (x_D, y_D, z_D) = \mathbb{R} \cdot (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}) = \mathbb{R} \cdot (1, 1, \sqrt{2} - 1)$

(5) Hauptachsentransformation:

Unsere Ausgangsgleichung in Matrizenschreibweise lautete:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 0 & 20 \\ 0 & 9 & 0 \\ 20 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 36 = 0 \text{ mit } M := \begin{pmatrix} 16 & 0 & 20 \\ 0 & 9 & 0 \\ 20 & 0 & 16 \end{pmatrix},$$

also

$$\boxed{\vec{x}^\top \cdot M \cdot \vec{x} = 36}$$

Nun wollen wir das natürliche Koordinatensystem um die Drehachse G_{dreh} mit dem Drehwinkel α drehen. Dazu haben wir die Drehmatrix D bestimmt.

Also wählen wir $\boxed{\vec{x} = D \cdot \vec{u} \text{ mit } \vec{u} = (u, v, w)}$.

Also ergibt sich die folgende Beschreibung aus der obigen Darstellung:

$$36 = \vec{x}^\top \cdot M \cdot \vec{x} = (D \cdot \vec{u})^\top \cdot M \cdot D \cdot \vec{u}.$$

Wegen $(D \cdot \vec{u})^\top = \vec{u}^\top \cdot D^\top$ wird aus dieser Gleichung

$$36 = \vec{u}^\top \cdot D^\top \cdot M \cdot D \cdot \vec{u}.$$

Hierin ist

$$D^\top = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

und damit

$$\begin{aligned} D^\top \cdot M \cdot D &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 0 & 20 \\ 0 & 9 & 0 \\ 20 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 18 \cdot \sqrt{2} & 0 & 18 \cdot \sqrt{2} \\ -2 \cdot \sqrt{2} & 0 & 2 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also gilt:

$$36 = \vec{x}^\top \cdot M \cdot \vec{x} = \vec{u}^\top \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = 9 \cdot u^2 + 36 \cdot v^2 - 4 \cdot w^2.$$

oder

$$\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{1} - \frac{w^2}{9} = 1.$$

Eine solche Normalform beschreibt ein einschaliges Hyperboloid.

Aufgabe 40.8

Bestimmen Sie die Fläche, die durch die Gleichung

$$5 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 + 18 \cdot z^2 - 6 \cdot x \cdot y = 72 \quad (A)$$

beschrieben wird und berechnen Sie die Lage der Fläche im x, y, z -Koordinatensystem.

Lösung der Aufgabe 40.8

REP Seite 224:

Allgemeine Form einer Quadrik

in Koordinaten-schreibweise:

$$a_{1,1} \cdot x^2 + a_{2,2} \cdot y^2 + a_{3,3} \cdot z^2 + 2 \cdot a_{1,2} \cdot x \cdot y + 2 \cdot a_{2,3} \cdot y \cdot z + 2 \cdot a_{1,3} \cdot x \cdot z + a_{0,0} = 0$$

in Matrizen-schreibweise (symmetrische Matrix):

$$\vec{x}^\top \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + a_{0,0} = 0 \text{ mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

also hier:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 72 = 0 \text{ mit } M := \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Man bestimmt:

(1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als Eigenwerte von M :

Es ist

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 & 0 \\ -3 & 5 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 18 - \lambda \end{vmatrix} = (18 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ -3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (18 - \lambda) \cdot [(5 - \lambda)^2 - 9]$$

$$= (18 - \lambda) \cdot [\lambda^2 - 10 \cdot \lambda + 16] = (18 - \lambda) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 8) = 0$$

also erhalten wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$ und $\lambda_3 = 18$.

Ergebnis: $2 \cdot u^2 + 8 \cdot v^2 + 18 \cdot w^2 = 72$, also ein Ellipsoid. Es sind noch die Achsenrichtungen von u, v und w zu bestimmen.

(2) Zu diesen Eigenwerten gehören folgende Eigenvektoren bzw. Eigenräume:

(2a) Eigenraum V_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda_1 & -3 & 0 \\ -3 & 5 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\vec{x}_1 = \mu \cdot (1, 1, 0) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}$$

(2b) Eigenraum V_2 zum Eigenwert $\lambda_2 = 8$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda_2 & -3 & 0 \\ -3 & 5 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\vec{x}_2 = \mu \cdot (1, -1, 0) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}$$

(2c) Eigenraum V_2 zum Eigenwert $\lambda_3 = 18$:

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda_3 & -3 & 0 \\ -3 & 5 - \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 18 - \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} -15 & -3 & 0 \\ -3 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\boxed{\vec{x}_3 = \mu \cdot (0, 0, 1) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}}$$

(3) Drehmatrix aus den Eigenvektoren:

Wir können nun festlegen, auf welchen der drei (auf die Länge 1 normierten) Eigenvektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ der Vektor $(1, 0)$ abgebildet werden soll.

Wir wählen: $(1, 0, 0)$ auf $\vec{x}_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1, 1, 0)$,

$(0, 1, 0)$ auf $\vec{x}_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1, -1, 0)$ und

$(0, 0, 1)$ auf $\vec{x}_3 = (0, 0, 1)$:

$$D := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) Drehachse und Drehwinkel:

Die Drehachse $\vec{a}$ ist ein Eigenvektor der Drehmatrix D zum Eigenwert 1.

Für den zu $\vec{a}$ gehörigen Drehwinkel α gilt:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\text{spur} D - 1)}$$

Berechnung des Drehwinkels α von D :

Es ist $\text{spur} D = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + 1 = 1$

und folglich $\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\text{spur} D - 1) = 0$, also $\alpha = 90^\circ$.

Berechnung der Drehachse von D :

Zunächst ist der Eigenvektor zu dem Eigenwert 1 der Drehmatrix D zu finden - falls die Matrix einen solchen Eigenwert besitzt. Dann würde für die Drehachse $\mathbb{R} \cdot (x_D, y_D, z_D)$ gelten:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - 1 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(5) Diagonalmatrix als Hauptachsentransformation:

$$\text{Es ist } D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt $D^{-1} = D^\top$ (weil für D gilt $|D| = 1$).

Also ist

$$D^{-1} \cdot M \cdot D = D^\top \cdot M \cdot D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$