



5 Differentialrechnung

Eine mathematisch „richtige“ Definition des Differentialquotienten einer Funktion F an einer Stelle x_0 erfordert die Definition eines Grenzwertes (oder Limes), während die Definition des bestimmten Integrals die Definition eines Grenzwertes einer Summenfunktion (oder einer Reihe) erfordert:

Es sei I ein offenes Intervall und $x_0 \in I$. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *im Punkt x_0 differenzierbar*, wenn

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert $f'(x_0)$ heißt *Ableitung von f in x_0* .

Es sei $y = f(x)$ eine auf einem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion und n die Anzahl gleichlanger Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ der Länge $\frac{b-a}{n}$ (mit $1 \leq n < \infty$), dann besitzt f in jedem Teilintervall sowohl ein absolutes Maximum M_i als auch ein absolutes Minimum m_i . Es gilt also stets $m_i \leq f(x) \leq M_i$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $x_i \leq x \leq x_{i+1}$

Dann heißt $\int_a^b f(x) \cdot dx$ das **bestimmte Integral** der Funktion $f(x)$ von a bis b , wenn gilt

$$\int_a^b f(x) \cdot dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n M_i \cdot \frac{b-a}{n}$$

Diese Definition ist jedoch nicht notwendig, um differenzieren oder integrieren zu können.

Wir führen hier zunächst einige Definitionen und Aufgaben zu Folgen und Reihen (nach REP Seite 328ff) ein, um das Verständnis für die Definitionen der Ableitung und des Integrals zu erleichtern.

Folge

Allgemein ist eine **Folge** eine Menge von (reellen) Zahlen, die in einer definierten Reihenfolge stehen.

Schreibweise: $(a_n) := a_1, a_2, a_3, \dots$

Grenzwert einer Folge

Eine Zahl g heißt Grenzwert der Folge (a_n) , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n_0^a gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|g - a_n| < \varepsilon$.

Ist g Grenzwert der Folge (a_n) , so schreibt man: $g =: \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

^{a)} im allgemeinen hängt n_0 von ε ab.

Konvergenz, Divergenz und Nullfolge

Eine Folge heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt, andernfalls heißt sie divergent. Eine Folge, deren Grenzwert 0 ist, heißt Nullfolge

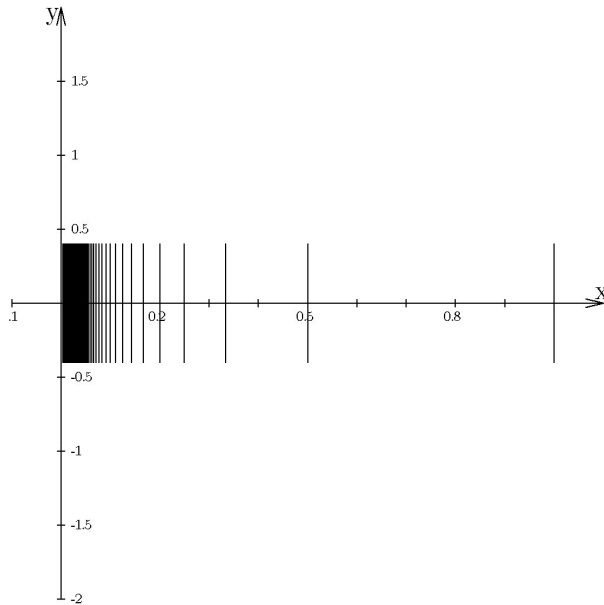
Die Zahlenfolge

$$(a_n) := 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

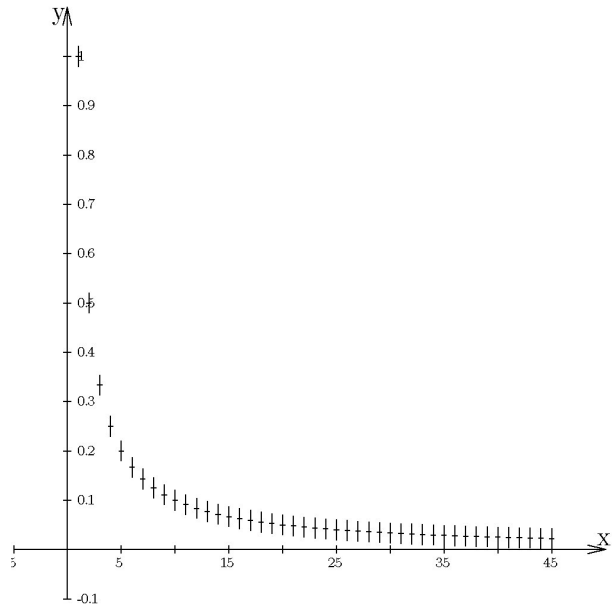
kann auch in der Form

$$(a_n) = \frac{1}{n}$$

beschrieben werden und sowohl durch Markierungen auf der x -Achse als auch durch Punkte in der x, y -Ebene dargestellt werden:



Figur 5.1:
Folge $a_n = \frac{1}{n}$



Figur 5.2:
Folge $a_n = \frac{1}{n}$

Grenzwerte von Folgen

Bei Grenzwertbildung $n \rightarrow \infty$ von Folgen mit rationalen Gliedern ist es meist sinnvoll, zunächst den höchsten Exponenten k von n zu bestimmen und dann n^k im Zähler und im Nenner auszuklammern.

Aufgabe 5.1:

Berechnen Sie die ersten 4 Folgenglieder a_0 , a_1 , a_2 und a_3 der Folge

$$a_n := \frac{6 \cdot n^3 - 5 \cdot n + 4}{2 \cdot n^3 + 7 \cdot n^2 + 3}$$

und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Lösung zu Aufgabe 5.1: Es ist

$$a_0 = \frac{4}{3} \approx 1.33, a_1 = \frac{5}{12} \approx 0.42, a_2 = \frac{42}{47} \approx 0.89, a_3 = \frac{151}{120} \approx 1.26.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot n^3 - 5 \cdot n + 4}{2 \cdot n^3 + 7 \cdot n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{5}{n^2} + \frac{4}{n^3}}{2 + \frac{7}{n} + \frac{3}{n^3}} = 3$$

Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b} & \text{für } b_n \neq 0, b \neq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = a^b & \text{für } a_n > 0, a > 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \log_c(a_n) = \log_c(a) & \text{für } c > 1 \end{cases}$$

Folgende Grenzwerte von Folgen sollte man kennen

$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$	$\frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$	$\binom{a}{n} \rightarrow 0, a > -1$
$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$	$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$	$\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$	$\frac{a^n}{n^k} \rightarrow \infty, \begin{cases} a > 1 \\ k \text{ fest} \end{cases}$
$\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$	$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^{-x}$	$\frac{n^n}{n!} \rightarrow \infty$	$\frac{a^n}{n^k} \rightarrow 0, \begin{cases} a < 1 \\ k \text{ fest} \end{cases}$

Aufgabe 5.2 (Folgen und ihre Grenzwerte):

a) Bestimmen Sie die ersten 5 Folgenglieder der Folge

$$(a_n) = e^{\frac{2 \cdot n + 1}{4 \cdot n^2 + 1}}$$

und den Grenzwert der Folge - falls er existiert.

Bestimmen Sie die Grenzwerte

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\pi \cdot n^5 + n + 17 + n^6}{4 \cdot n^7 + 4000 \cdot n} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n^5 + 8 \cdot n^2 + 11 + n^6}{n^6 + 2000 \cdot n} \right)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{15}}$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} 4 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$

Lösung 5.2a)

Es ist

für $n = 1$: $\frac{2 \cdot n + 1}{4 \cdot n^2 + 1} = \frac{3}{5} = 0.6$, also $a_1 = e^{0.6} \approx 1.82$

für $n = 2$: $\frac{2 \cdot n + 1}{4 \cdot n^2 + 1} = \frac{5}{17} \approx 0.294$, also $a_2 = e^{0.294} \approx 1.34$

für $n = 3$: $\frac{2 \cdot n + 1}{4 \cdot n^2 + 1} = \frac{7}{37} \approx 0.189$, also $a_3 = e^{0.189} \approx 1.21$

für $n = 4$: $\frac{2 \cdot n + 1}{4 \cdot n^2 + 1} = \frac{9}{65} \approx 0.138$, also $a_4 = e^{0.138} \approx 1.15$

für $n = 5$: $\frac{2 \cdot n + 1}{4 \cdot n^2 + 1} = \frac{11}{101} \approx 0.109$, also $a_5 = e^{0.109} \approx 1.12$

Ferner ist nach den „Rechenregeln für Grenzwerte“

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2 \cdot n + 1}{4 \cdot n^2 + 1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot n + 1}{4 \cdot n^2 + 1}}$$

und es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot n + 1}{4 \cdot n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{4},$$

also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2 \cdot n + 1}{4 \cdot n^2 + 1}} = e^0 = e$$

Lösung 5.2b): Es ist $\frac{\pi \cdot n^5 + n + 17 + n^6}{4 \cdot n^7 + 4000 \cdot n} \rightarrow 0$.

Lösung 5.2c): Es ist $\frac{n^5 + 8 \cdot n^2 + 11 + n^6}{n^6 + 2000 \cdot n} \rightarrow 1$.

Lösung 5.2d): Es ist $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$. **Lösung 5.2e):** Es ist $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$.

Neben den Folgen gibt es **Reihen**, und für diese kann manchmal auch ein Grenzwert gefunden werden. Meistens ist es jedoch nur möglich anzugeben, ob die Reihe überhaupt einen Grenzwert besitzt - ohne dass dieser genau angegeben werden kann.

Reihe

Zu einer Folge (a_n) kann

1. eine **endliche Reihe** definiert werden durch ein Anfangsglied a_{k_0} und ein Endglied a_n . Dann heißt

$$\sum_{k=k_0}^{k=n} a_k = a_{k_0} + a_{k_0+1} + \dots + a_n$$

die **Partialsumme** der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.

2. eine **unendliche Reihe** definiert werden durch die Bestimmung eines Anfangsgliedes a_{k_0} . Dann heißt

$$\sum_{k=k_0}^{k=\infty} a_k = a_{k_0} + a_{k_0+1} + \dots$$

eine unendliche Reihe.

Wenn die Folge $(\sum_{k=k_0}^{k=n} a_k)$ der Partialsummen konvergiert, dann heißt die Reihe **konvergent**.

endliche geometrische Reihe

Es ist

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{für } q \neq 1$$

Aufgabe 5.3:

Berechnen Sie $\sum_{i=3}^6 2^i$ durch direktes Nachrechnen sowie unter Verwendung der Formel für eine endliche geometrische Reihe.

Lösung 5.3

Direkt:

$$\sum_{i=3}^6 2^i = 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 8 + 16 + 32 + 64 = 120$$

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^6 2^i &= 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = \sum_{i=0}^6 2^i - \sum_{i=0}^2 2^i = \frac{2^{6+1} - 1}{2 - 1} - \frac{2^{2+1} - 1}{2 - 1} = (2^7 - 1) - (2^3 - 1) \\ &= 127 - 7 = 120. \end{aligned}$$

oder (anderer Weg)

$$\sum_{i=3}^6 2^i = 2^3 \cdot (1 + 2^1 + 2^2 + 2^3) = 2^3 \cdot \sum_{i=0}^3 2^i = 2^3 \cdot \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 2^3 \cdot 15 = 120.$$

Aufgabe 5.4 (Zinseszins)

Zur Grabpflege des verstorbenen Vaters sollen zwei Brüder aus dem ererbten Geld für 20 Jahre die Grabpflege durch eine Friedhofsgärtner zahlen. Da sie sich nicht einigen, soll eine hinreichende Geldmenge h aus dem Erbe entnommen werden. Was ist eine *hinreichende* Menge?

Am 1.1.2005 befragen Sie den Friedhofsgärtner nach den heutigen Kosten für die Grabpflege für dieses Jahr: Es sind $f = 200$ Euro.

Die beiden gehen davon aus, dass sich die Kosten in jedem Jahr um jeweils $z_f = 1\%$ erhöhen, und sie wollen den Gärtner jeweils am Ende eines Jahres das Geld zahlen.

Natürlich werden sie die hinreichende Menge h des Geldes heute zur Bank tragen und es zu einem festen Zinssatz $z_h = 2\%$ verzinsen.

Aber wie viel Geld sollen sie vor der Aufteilung des Erbes für die Grabpflege zur Bank bringen?

Lösung 5.4

Es ist

Datum	Kapital	Beispiel
1.1.2005	k_0	3 577.52
1.1.2006	$k_1 = k_0 \cdot 1.02 - f$	3 448.48
1.1.2007	$k_2 = k_1 \cdot 1.02 - f \cdot 1.01$ $= [k_0 \cdot 1.02 - f] \cdot 1.02 - f \cdot 1.01$ $= k_0 \cdot 1.02^2 - f \cdot (1.02 + 1.01)$	3 315.45
1.1.2008	$k_3 = k_2 \cdot 1.02 - f \cdot 1.01^2$ $= [k_0 \cdot 1.02^2 - f \cdot (1.02 + 1.01)] \cdot 1.02 - f \cdot 1.01^2$ $= k_0 \cdot 1.02^3 - f \cdot [1.02^2 + 1.02 \cdot 1.01 + 1.01^2]$	3 177.74
1.1.2009	$k_4 = k_3 \cdot 1.02 - f \cdot 1.01^3$ $= [k_0 \cdot 1.02^3 - f \cdot (1.02^2 + 1.02 \cdot 1.01 + 1.01^2)] \cdot 1.02 - f \cdot 1.01^3$ $= k_0 \cdot 1.02^4 - f \cdot 1.02^3 \cdot \left[1 + \left(\frac{1.01}{1.02} \right) + \left(\frac{1.01}{1.02} \right)^2 + \left(\frac{1.01}{1.02} \right)^3 \right]$	3 035.23
1.1.2010	$k_5 = k_4 \cdot 1.02 - f \cdot 1.01^4$ $= \left[k_0 \cdot 1.02^4 - f \cdot 1.02^3 \cdot \left[1 + \left(\frac{1.01}{1.02} \right) + \left(\frac{1.01}{1.02} \right)^2 + \left(\frac{1.01}{1.02} \right)^3 \right] \right] \cdot 1.02 - f \cdot 1.01^4$ $= k_0 \cdot 1.02^5 - f \cdot 1.02^4 \cdot \left[1 + \frac{1.01}{1.02} + \left(\frac{1.01}{1.02} \right)^2 + \left(\frac{1.01}{1.02} \right)^3 + \left(\frac{1.01}{1.02} \right)^4 \right]$	2 887.82

Datum	Kapital	Beispiel
1.1.2011	$k_6 = k_0 \cdot 1.02^6 - f \cdot 1.02^5 \cdot \sum_{j=0}^5 \left(\frac{1.01}{1.02}\right)^j$	2 735.37
....		...
1.1.2025	$k_{20} = k_0 \cdot 1.02^{20} - f \cdot 1.01^{19} \cdot \sum_{j=0}^{19} \left(\frac{1.01}{1.02}\right)^j$ $= k_0 \cdot 1.02^{20} - f \cdot 1.02^{19} \cdot \frac{\left(\frac{1.01}{1.02}\right)^{20} - 1}{\frac{1.01}{1.02} - 1}$	0.00

Hier soll gelten $k_{20} = 0$, d.h.

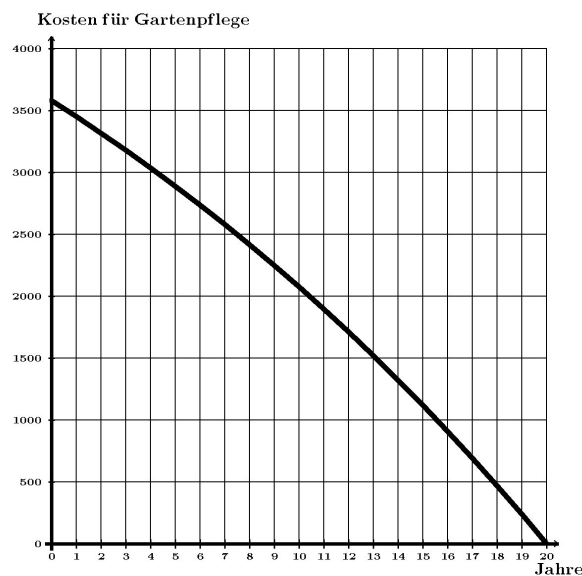
$$0 = k_0 \cdot 1.02^{20} - f \cdot 1.02^{19} \cdot \frac{\left(\frac{1.01}{1.02}\right)^{20} - 1}{\frac{1.01}{1.02} - 1}$$

und es sind $\frac{1.01}{1.02} \approx 0.9902$ und $\left(\frac{1.01}{1.02}\right)^{20} \approx 0.8212$ und $1.02^{19} \approx 1.4568$ und $1.02^{20} \approx 1.4859$,
also soll gelten

$$0 = k_0 \cdot 1.4859 - f \cdot 1.4568 \cdot \frac{0.8212 - 1}{0.9902 - 1} = k_0 \cdot 1.4859 - f \cdot 26.579$$

oder

$$k_0 = f \cdot \frac{26.579}{1.4859} \approx 3\,577.52$$



Aufgabe 5.4

harmonische Reihe

Die „harmonische Reihe“ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent, denn es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \underbrace{1}_1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> 2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> 4 \cdot \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{> 8 \cdot \frac{1}{16}} + \dots$$

Aber die Glieder der harmonischen Reihe bilden eine Nullfolge.

Aufgabe 5.5 (Binomische Formel) (REP Seite 45 ff.):

Zeigen Sie für $n = 2$ und $n = 3$:

Für zwei reelle Zahlen a und b gilt

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot a^j \cdot b^{n-j} \\ &= \binom{n}{0} \cdot b^n + \binom{n}{1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot a^2 \cdot b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{n} \cdot a^n \end{aligned}$$

wobei der *Binomialkoeffizient* $\binom{u}{v}$ für zwei natürliche Zahlen u und v mit $u \geq v$ definiert ist durch

$$\binom{u}{v} := \frac{u \cdot (u-1) \cdot \dots \cdot (u-v+1)}{v!} \quad \text{und} \quad \binom{u}{0} := 1$$

und für eine positive natürliche Zahl $k > 0$ die **Fakultät** $k!$ definiert ist als $k! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ mit $0! = 1$.

Lösung von Aufgabe 5.5:

Es ist

$$(a+b)^2 = \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} \cdot a^j \cdot b^{2-j} = \binom{2}{0} \cdot b^2 + \binom{2}{1} \cdot a^1 \cdot b^1 + \binom{2}{2} \cdot a^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

und

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} \cdot a^j \cdot b^{3-j} \\ &= \binom{3}{0} \cdot b^3 + \binom{3}{1} \cdot a^1 \cdot b^{3-1} + \binom{3}{2} \cdot a^2 \cdot b^{3-2} + \binom{3}{3} \cdot a^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.6:

Zeigen Sie, dass die Folge $c_n := \frac{\sum_{k=2}^n k}{\binom{n}{2}}$ konvergiert und bestimmen Sie deren Grenzwert.

Lösung von Aufgabe 5.6:

Nach Definition von $\binom{r}{k}$ ist also $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

Nach der Kenntnis der „Summe der k ersten natürlichen Zahlen“ ist

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

und damit

$$\sum_{k=2}^n k = 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) - 1$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} c_n &:= \frac{\sum_{k=2}^n k}{\binom{n}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) - 1}{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} = \frac{n \cdot (n+1) - 2}{n \cdot (n-1)} = \frac{n^2 + n - 2}{n^2 - n} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$

Aufgabe 5.7 (Bernoullische Ungleichung):

Zeigen Sie mit Hilfe der binomischen Formel:

Für eine reelle Zahl x mit $x > 0$ und eine natürliche Zahl n mit $n > 1$ gilt

$$(1+x)^n > 1 + n \cdot x$$

Lösung 5.7:

Nach der binomischen Formel ist $(1+x)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot 1 \cdot x^{n-j} = x^n + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot x + 1$

Wegen $\binom{n}{n-1} = n$ gilt nach den Rechenregeln für Ungleichungen

$$x^n + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot x + 1 > n \cdot x + 1.$$

Aufgabe 5.8:

Zeigen Sie:

Für eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Lösung von Aufgabe 5.8:

Wegen $0 < q < 1$ gilt $\frac{1}{q} > 1$. Für die Zahl $x := \frac{1}{q} - 1$ gilt damit $x > 0$.

Dann ist $q = \frac{1}{1+x}$ und entsprechend $q^n = \frac{1}{(1+x)^n}$.

Nach der Bernoullischen Ungleichung ist $1 + n \cdot x < (1+x)^n$ für $n > 1$, also ist $\frac{1}{(1+x)^n} < \frac{1}{1+n \cdot x}$ und damit $q^n = \frac{1}{(1+x)^n} < \frac{1}{1+n \cdot x}$.

Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n \cdot x} = 0$.

Für $|q| < 1$ gilt also $q^n \rightarrow 0$ nach Aufgabe 5.8, so daß $\frac{q^n - 1}{q - 1} \rightarrow \frac{1}{q - 1}$ gilt. Daraus folgt:

geometrische Reihe

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} \quad \text{für } |q| < 1$$

Aufgabe 5.9:

Bestimmen Sie die ersten drei Partialsummen der Reihe

$$\sum_{i=2}^n \frac{2^{3 \cdot i - 1}}{3^{2 \cdot i + 1}}$$

und berechnen Sie den Grenzwert, falls er existiert.

Lösung zu Aufgabe 5.9:

Es ist

$$\sum_{i=2}^2 \frac{2^{3 \cdot i - 1}}{3^{2 \cdot i + 1}} = \frac{2^{3 \cdot 2 - 1}}{3^{2 \cdot 2 + 1}} = \frac{2^5}{3^5} \approx 0.13$$

und

$$\sum_{i=2}^3 \frac{2^{3 \cdot i - 1}}{3^{2 \cdot i + 1}} = 0.13 + \frac{2^{3 \cdot 3 - 1}}{3^{2 \cdot 3 + 1}} = 0.13 + \frac{2^8}{3^7} \approx 0.13 + 0.12 = 0.25$$

und

$$\sum_{i=2}^4 \frac{2^{3 \cdot i - 1}}{3^{2 \cdot i + 1}} = 0.25 + \frac{2^{3 \cdot 4 - 1}}{3^{2 \cdot 4 + 1}} = 0.25 + \frac{2^{11}}{3^9} \approx 0.25 + 0.10 = 0.35.$$

Um einen möglichen Grenzwert zu bestimmen, versuchen wir zu erkennen, ob diese Reihe eine geometrische Reihe ist.

Es ist

$$\frac{2^{3 \cdot i - 1}}{3^{2 \cdot i + 1}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2^{3 \cdot i}}{3 \cdot 3^{2 \cdot i}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{(2^3)^i}{(3^2)^i} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^i = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^i$$

und daher

$$\sum_{i=2}^n \frac{2^{3 \cdot i - 1}}{3^{2 \cdot i + 1}} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=2}^n \left(\frac{8}{9}\right)^i$$

d.h. diese Reihe ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{8}{9} < 1$, d.h. die Reihe

$$\sum_{i=0}^n \frac{2^{3 \cdot i - 1}}{3^{2 \cdot i + 1}}$$

konvergiert mit dem Grenzwert

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{9 - 8} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Damit gilt für die in dieser Aufgabe gegebene Reihe

$$\sum_{i=2}^n \frac{2^{3 \cdot i - 1}}{3^{2 \cdot i + 1}} = \sum_{i=0}^n \frac{2^{3 \cdot i - 1}}{3^{2 \cdot i + 1}} - \frac{2^{3 \cdot 0 - 1}}{3^{2 \cdot 0 + 1}} - \frac{2^{3 \cdot 1 - 1}}{3^{2 \cdot 1 + 1}} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{3} - \frac{4}{27} = \frac{81}{54} - \frac{9}{54} - \frac{8}{54} = \frac{32}{27}$$

Aufgabe 5.10:

Berechnen Sie die ersten 4 Terme s_0 , s_1 , s_2 und s_3 der Reihe

$s_n := \sum_{i=0}^n \left(\frac{75}{13} - \frac{67}{14} \right)^i$ und bestimmen Sie den Grenzwert $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{75}{13} - \frac{67}{14} \right)^i$, falls dieser existiert.

Lösung zu Aufgabe 5.10:

Es ist $\frac{75}{13} - \frac{67}{14} = \frac{179}{182}$ und damit

$$s_0 = 1.00,$$

$$s_1 = 1 + \frac{179}{182} = 1 + 0.983 = 1.983, \text{ also } s_1 = 1.98$$

$$s_2 = 1 + \frac{179}{182} + \frac{32041}{33124} = 1 + 0.983 + 0.967 = 2.95, \text{ also } s_2 = 2.95$$

$$\text{und } s_3 = 2.95 + \left(\frac{179}{182} \right)^3 = 2.95 + \frac{5735339}{6028563} \approx 3.90, \text{ also } s_3 = 3.90.$$

Da $q := \frac{75}{13} - \frac{67}{14} = \frac{179}{182} < 1$ ist, liegt eine konvergente geometrische Reihe vor mit dem Grenzwert $\frac{1}{1-q} = \frac{182}{182-179} = \frac{182}{3} \approx 60.7$, also Grenzwert $\frac{182}{3} \approx 60.7$.

5.11: Achilles und die Schildkröte

Das zweite Paradoxon (zum Zusammenhang zwischen Raum und Zeit) des griechischen Philosophen Zeno von Elea (etwa 490 bis 430 v. Chr.) beschreibt einen Wettlauf zwischen Achilles und einer Schildkröte:

Archilles kann niemals die Schildkröte einholen, wenn folgende Anfangsbedingung gilt:

- Zur Zeit t_1 startet Achilles an einer Position a_1 und die Schildkröte startet an einer Position s_1 mit $a_1 < s_1$ und mit einem gemeinsamen Ziel (der Schildkröte wird ein Vorsprung $s_1 - a_1$ gewährt).

Wenn nun Achilles zur Zeit t_2 den Ort $a_2 = s_1$ erreicht, so ist die Schildkröte bereits an einem Ort s_2 mit $a_2 < s_2$.

Wenn dann Achilles zur Zeit t_3 den Ort $a_3 = s_2$ erreicht, so ist die Schildkröte bereits an einem Ort s_3 mit $a_3 < s_3$.

Um dieses Paradoxon zu erklären, eignet sich die Beschreibung durch die Folge der einzelnen Orte, die Achilles jeweils erreichte:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = a_1, a_2, a_3, \dots$$

Wir setzen $a_1 = 0 \text{ m}$ und $s_1 = 1 \text{ m}$ und vereinbaren, dass Achilles 100 mal schneller ist als die Schildkröte.

Beschreiben Sie die jeweiligen Orte durch eine Reihe und berechnen Sie den Grenzwert.

Lösung von Aufgabe 5.11:

Es ist

Zeit	Archilles	Schildkröte
t_1	$a_1 = 0 \text{ m}$	$s_1 = 1 \text{ m}$
t_2	$a_2 = 1 \text{ m}$	$s_2 = 1 + \frac{1}{100} = 1.01 \text{ m}$
t_3	$a_3 = 1.01 \text{ m}$	$s_3 = 1.01 + \frac{0.01}{100} = 1.0101 \text{ m}$
t_4	$a_4 = 1.0101 \text{ m}$	$s_4 = 1.0101 + \frac{0.0001}{100} = 1.010101 \text{ m}$

Also gilt $a_i = \sum_{k=0}^i (0.01)^k$ zur t_i .

Dies ist eine geometrische Reihe, und der Grenzwert g kann bestimmt werden:

Es ist $q = 0.01$ und damit

$$g = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \frac{1}{1-0.01} = \frac{100}{99} = 1.01010101\overline{01}$$

Um zu entscheiden, ob eine Reihe überhaupt einen Grenzwert besitzt, gibt es verschiedene Kriterien. Wir werden hier nur eines dieser Kriterien verwenden:

Quotientenkriterium (REP Seite 341)

Eine Folge l_n der Form $l_n := \sum_{k=0}^n a_k$ ist für $n \rightarrow \infty$ (absolut) konvergent, wenn gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1. \text{ - Die Folge } l_n \text{ ist divergent, wenn gilt } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1.$$

Aufgabe 5.12:

Berechnen Sie die ersten 4 Elemente s_1, s_2, s_3 und s_4 der Reihe

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{(2 \cdot i)!}{2! \cdot (2 \cdot i - 2)!} \cdot \frac{1}{i!}$$

und untersuchen Sie, ob diese Reihe für $n \rightarrow \infty$ konvergent oder divergent ist.

Lösung zu Aufgabe 5.12:

Es ist

$$\begin{aligned} a_i &:= \frac{(2 \cdot i)!}{2! \cdot (2 \cdot i - 2)!} \cdot \frac{1}{i!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2 \cdot i - 1) \cdot (2 \cdot i)}{(1 \cdot 2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2 \cdot i - 2)} \cdot \frac{1}{i!} = \frac{(2 \cdot i - 1) \cdot (2 \cdot i)}{(1 \cdot 2)} \cdot \frac{1}{i!} \\ &= (2 \cdot i - 1) \cdot \frac{i}{i!} = \frac{2 \cdot i - 1}{(i - 1)!} \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = \frac{(2 \cdot 1 - 1)}{(1 - 1)!} = \frac{1}{0!} = 1, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = 1 + \frac{2 \cdot 2 - 1}{(2 - 1)!} = 1 + 3 = 4, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 4 + \frac{2 \cdot 3 - 1}{(3 - 1)!} = 4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2} = 6.5 \text{ und} \\ s_4 &= s_3 + a_4 = 6.5 + \frac{2 \cdot 4 - 1}{(4 - 1)!} = 6.5 + \frac{7}{6} \approx 7.67. \end{aligned}$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ (absolut) konvergent,

wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$ ist.

Wegen $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot i)!}{2! \cdot (2 \cdot i - 2)!} \cdot \frac{1}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cdot i - 1}{(i - 1)!}$ ist hier $a_i = \frac{2 \cdot i - 1}{(i - 1)!}$ und folglich

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| &= \frac{\frac{2 \cdot (i+1) - 1}{((i+1) - 1)!}}{\frac{2 \cdot i - 1}{(i - 1)!}} = \frac{\frac{2 \cdot i + 1}{i!}}{\frac{2 \cdot i - 1}{(i - 1)!}} = \frac{2 \cdot i + 1}{i!} \cdot \frac{(i - 1)!}{2 \cdot i - 1} = \frac{2 \cdot i + 1}{2 \cdot i - 1} \cdot \frac{(i - 1)!}{i!} = \frac{2 \cdot i + 1}{(2 \cdot i - 1) \cdot i} \\ &= \frac{2 \cdot i + 1}{2 \cdot i^2 - i} \text{ und damit} \end{aligned}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot i + 1}{2 \cdot i^2 - i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{i} + \frac{1}{i^2}}{2 - \frac{1}{i}} = 0. \text{ Folglich ist diese Reihe konvergent.}$$

Aufgabe 5.13: Zeigen Sie, dass jede geometrische Reihe $q_n := \sum_{k=0}^n q^k$ mit $|q| < 1$ für $n \rightarrow \infty$ nach dem Quotientenkriterium konvergiert.

Lösung von Aufgabe 5.13: Mit $a_k = q^k$ und $k_0 = 0$ ist der Zusammenhang zwischen der Definition der geometrischen Reihe und der Definition des Quotientenkriteriums beschrieben.

Nach dem Quotientenkriterium ist dann zu berechnen $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$,

$$\text{also hier } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{q^{k+1}}{q^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |q|.$$

Nach Voraussetzung ist $|q| < 1$, also konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ mit $|q| < 1$ nach dem Quotientenkriterium.

Aufgabe 5.14: Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^n \binom{2 \cdot k}{2} \cdot \frac{1}{k!}$ auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$p_n := \sum_{k=1}^n \binom{2 \cdot k}{2} \cdot \frac{1}{k!}$$

Lösung von Aufgabe 5.14:

$$\text{Es ist } p_n = \sum_{k=1}^n \binom{2 \cdot k}{2} \cdot \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{(2 \cdot k)!}{2 \cdot (2 \cdot k - 2)!} \cdot \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{(2 \cdot k - 1)}{(k - 1)!}$$

Damit ist diese Aufgabe gleich der Aufgabe 5.12, d.h. die Reihe $\sum_{k=1}^n \binom{2 \cdot k}{2} \cdot \frac{1}{k!}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium

Aufgabe 5.15

Untersuchen Sie die folgenden rationalen Funktionen auf Nullstellen, Polstellen, Asymptoten sowie Schnittpunkten zwischen Asymptote und Funktionsgraph, Gebiete gleichen Vorzeichens. Bestimmen Sie relative Extremwerte und skizzieren Sie an Hand dieser Informationen die Funktionsgraphen:

a) $f(x) = \frac{x - 2}{x - 1}$

b) $g(x) = \frac{x^4 + 4}{x^2 - 1}$

Lösung 5.15:

Aufgabe 5.15a: $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

Nullstellen des Zählers: $x_Z = 2$

Nullstellen des Nenners: $x_N = 1$

Nullstellen der Funktion: $x_n = 2$

Pole der Funktion: $x_p = 1$

Bestimmung der Asymptote:

$$f(x) = (x-2) : (x-1) = \underbrace{1}_{a(x)} - \frac{1}{x-1}$$

Asymptote: $a(x) = 1$

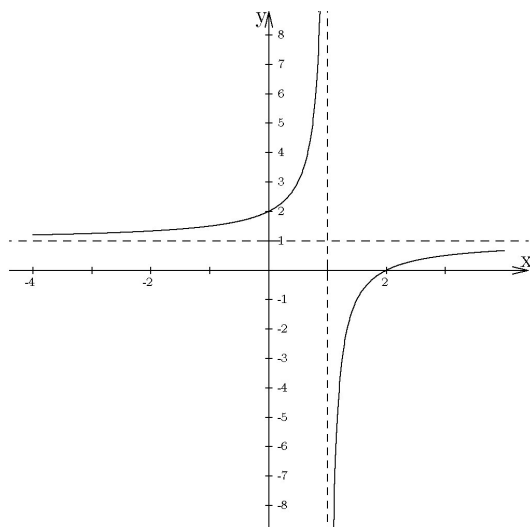
$f(x) - a(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

also keine Schnittpunkte

zwischen Asymptote und Funktion.

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2},$$

also keine relativen Extremwerte.



Aufgabe 5.15a: $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

Aufgabe 5.15b: $g(x) = \frac{x^4+4}{x^2-1}$

Nullstellen des Zählers: $x_{Z,1} = 1 + i$,

$x_{Z,2} = 1 - i$, $x_{Z,3} = -1 + i$, $x_{Z,4} = -1 - i$

Nullstellen des Nenners: $x_{N,1} = 1$, $x_{N,2} = -1$

Nullstellen der Funktion: Keine

Pole der Funktion: $x_{p,1} = 1$, $x_{p,2} = -1$

Bestimmung der Asymptote:

$$g(x) = (x^4+4) : (x^2-1) = \underbrace{x^2+1}_{a(x)} + \frac{5}{x^2-1}$$

Asymptote: $a(x) = x^2 + 1$

$g(x) - a(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ also keine Schnittpunkte

zwischen Asymptote und Funktion

Bestimmung möglicher Extrema:

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{x \cdot (x^4 - 2 \cdot x^2 - 4)}{(x^2 - 1)^2}$$

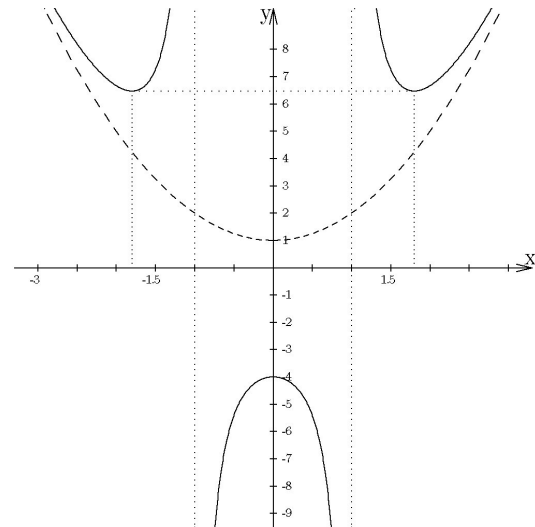
Mögliche relative Extremwerte:

$$x_{e,1} = 0, \quad x_{e,2} = \sqrt{1+\sqrt{5}} \approx 1.7989,$$

$$x_{e,3} = -\sqrt{1+\sqrt{5}} \approx -1.7989,$$

$$x_{e,4} = \sqrt{1-\sqrt{5}} \approx 1.1118 \cdot i,$$

$$x_{e,5} = -\sqrt{1-\sqrt{5}} \approx -1.1118 \cdot i$$



Aufgabe 5.15b: $g(x) = \frac{x^4+4}{x^2-1}$

Aufgabe 5.15 (Fortsetzung)

$$c) h(x) = \frac{x^3 - 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 8}{x^3 + x^2}$$

Aufgabe 5.15c:

$$h(x) = \frac{x^3 - 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 8}{x^3 + x^2}$$

Nullstellen des Zählers:

$$x_{Z,1} = -2, x_{Z,2} = 2, x_{Z,3} = 2$$

Nullstellen des Nenners:

$$x_{N,1} = 0, x_{N,2} = 0, x_{N,3} = -1,$$

Nullstellen der Funktion:

$$x_{n,1} = -2, x_{n,2} = 2 \text{ (} x_{n,2} \text{ doppelt)}$$

Pole der Funktion:

$$x_{p,1} = -1, x_{p,2} = 0, \text{ (} x_{p,2} \text{ doppelt)}$$

Bestimmung der Asymptote:

$$h(x) = (x^3 - 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 8) : (x^3 + x^2)$$

$$= \underbrace{1}_{a(x)} + \frac{-3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 8}{x^3 + x^2}$$

Asymptote: $a(x) = 1$

$$h(x) - a(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \cdot (\pm\sqrt{28} - 2)$$

also folgende Schnittpunkte

zwischen Asymptote und Funktion:

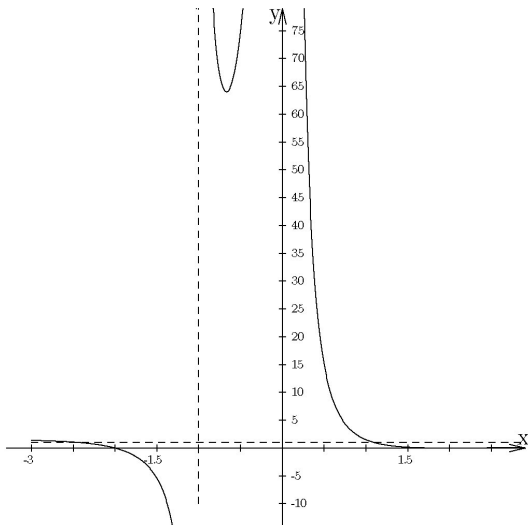
$$\Leftrightarrow x_1 \approx 1.1 \text{ und } x_2 \approx -2.4$$

Bestimmung möglicher Extrema:

$$h'(x) = \frac{3 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 - 20 \cdot x - 16}{x^3 \cdot (x+1)^2}$$

mögliche relative Extremwerte:

$$x_{e,1} = -4, x_{e,2} = -\frac{2}{3} \approx -0.667, x_{e,3} = 2$$

**Aufgabe 5.15c:**

$$h(x) = \frac{x^3 - 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 8}{x^3 + x^2}$$

$$d) k(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$$

$$\textbf{Aufgabe 5.15d: } k(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$$

Nullstellen des Zählers:

$$x_{Z,1} = -1, x_{Z,2} = i, x_{Z,3} = -i$$

Nullstellen des Nenners:

$$x_{N,1} = 1, x_{N,2} = -1, x_{N,3} = i, x_{N,4} = -i$$

Nullstellen der Funktion: keine

Pole der Funktion: $x_p = 1$

Bestimmung der Asymptote:

$$k(x) = \frac{(x+1) \cdot (x^2+1)}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)} = \frac{1}{x-1}$$

Asymptote: $y = 0$

$$k(x) - a(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

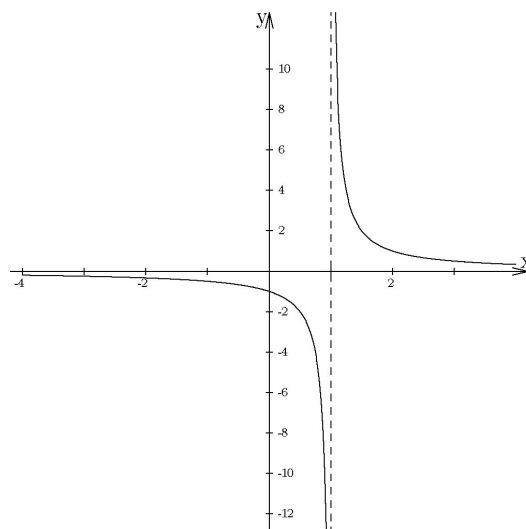
also keine Schnittpunkte

zwischen Asymptote und Funktion

Bestimmung möglicher Extrema:

$$k'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2},$$

also keine relativen Extremwerte



$$\textbf{Aufgabe 5.15d: } k(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$$

Aufgabe 5.16:

Verwenden Sie die Definition der Ableitung einer Funktion, um zu zeigen

a) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$, so gilt $f'(x_0) = 2 \cdot x_0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

b) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$, so gilt $f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

Mit Hilfe der Definition lassen sich zeigen:

c) Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$,

d) Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - v' \cdot u}{v^2}$

e) Kettenregel $\frac{d f(g(x))}{d x} = \frac{d f(g(x))}{d g(x)} \cdot \frac{d g(x)}{d x}$

Bedeutung der Ableitung:

a) $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt x_0 .

b) $f'(x_0) = 0$ ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum (Maximum oder Minimum) der Kurve $y = f(x)$.

Lösung 5.16a):

Es ist

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2 \cdot x_0 \cdot h + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot x_0 \cdot h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \cdot x_0 + h = 2 \cdot x_0 \end{aligned}$$

Lösung 5.16b):

Es ist

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^3 + 3 \cdot x_0^2 \cdot h + 3 \cdot x_0 \cdot h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 \cdot x_0^2 + 3 \cdot x_0 \cdot h + h^2 = 3 \cdot x_0^2 \end{aligned}$$

Lösung 5.16c):

Es sei $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Es ist

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h) \cdot v(x_0 + h) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{h} \\ &\stackrel{\text{Trick}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h) \cdot v(x_0 + h) - u(x_0) \cdot v(x_0 + h) + u(x_0) \cdot v(x_0 + h) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \cdot v(x_0 + h) + u(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} \\ &= u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0) \text{ für alle } x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Lösung 5.16d):

Es sei $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ und $v(x_0) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von $v(x)$ ist auch für hinreichend kleine h noch $v(x_0 + h) \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{u(x_0 + h)}{v(x_0 + h)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{u(x_0 + h) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v(x_0 + h)}{v(x_0) \cdot v(x_0 + h)} \\
 &\stackrel{\text{Trick}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v(x_0 + h)}{h \cdot v(x_0) \cdot v(x_0 + h)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(x_0) \cdot v(x_0 + h)} \cdot \left[\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} \right] \\
 &= \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{(v(x_0))^2}
 \end{aligned}$$

Lösung 5.16e):

Nach Definition ist

$$\frac{d f(g(x))}{d x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h}$$

Einfaches Erweitern liefert hieraus die Kettenregel:

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\
 &= \frac{d f(g(x))}{d g(x)} \cdot \frac{d g(x)}{d x}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.17

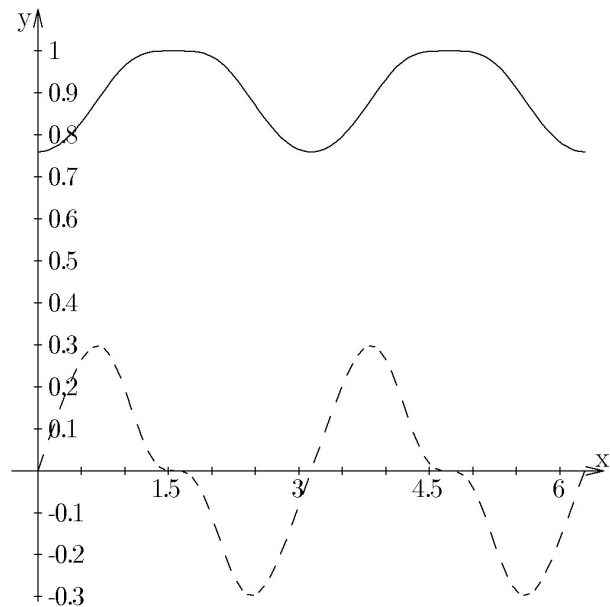
Differenzieren Sie die Funktion $f_1 = \cos(\sin^2(\cos(x)))$

und bestimmen Sie die Tangente in $(x_0, f_1(x_0))$ mit $x_0 = 225^\circ = 5 \cdot \frac{\pi}{4}$

Lösung 5.17

Wertetabelle zur Darstellung der Kurve:

Winkel φ	$\cos(\varphi)$	$\sin^2(\cos(\varphi))$	f_1
0°	1.00	0.71	0.76
15°	0.97	0.68	0.78
30°	0.87	0.58	0.84
45°	0.71	0.42	0.91
60°	0.50	0.23	0.97
75°	0.26	0.07	1.00
90°	0.00	0.00	1.00
105°	-0.26	0.07	1.00
120°	-0.50	0.23	0.97
135°	-0.71	0.42	0.91
150°	-0.87	0.58	0.84
165°	-0.97	0.68	0.78
180°	-1.00	0.71	0.76
195°	-0.97	0.68	0.78
210°	-0.87	0.58	0.84
225°	-0.71	0.42	0.91
240°	-0.50	0.23	0.97
255°	-0.26	0.07	1.00
270°	0.00	0.00	1.00
285°	0.26	0.07	1.00
300°	0.50	0.23	0.97
315°	0.71	0.42	0.91
330°	0.87	0.58	0.84
345°	0.97	0.68	0.78
360°	1.00	0.71	0.76

**Aufgabe 5.17**

$$f_1 = \cos(\sin^2(\cos(x))) \quad (\text{ausgezogen})$$

$$f_1' = \sin(x) \cdot \sin(2 \cdot \cos(x)) \cdot \sin(\sin^2(\cos(x))) \quad (\text{gestrichelt})$$

Ableitung:

Es ist nach der Kettenregel

$$f_1' = -\sin(\sin^2(\cos(x))) \cdot [\sin^2(\cos(x))]'$$

und weiter mit der Kettenregel

$$f_1' = -\sin(\sin^2(\cos(x))) \cdot 2 \cdot \sin(\cos(x)) \cdot [\sin(\cos(x))]'$$

und wieder mit der Kettenregel

$$f_1' = -\sin(\sin^2(\cos(x))) \cdot 2 \cdot \sin(\cos(x)) \cdot \cos(\cos(x)) \cdot [\cos(x)]'$$

also

$$\begin{aligned} f_1' &= -\sin(\sin^2(\cos(x))) \cdot 2 \cdot \sin(\cos(x)) \cdot \cos(\cos(x)) \cdot (-\sin(x)) \\ &= \sin(\sin^2(\cos(x))) \cdot \sin(2 \cdot \cos(x)) \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

Tangente:

$$\text{Es ist } f_1' \left(\frac{5 \cdot \pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{5 \cdot \pi}{4} \right) \cdot \sin \left(2 \cdot \cos \left(\frac{5 \cdot \pi}{4} \right) \right) \cdot \sin \left(\sin^2 \left(\cos \left(\frac{5 \cdot \pi}{4} \right) \right) \right)$$

Wegen $\cos \left(\frac{5 \cdot \pi}{4} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ und $\sin \left(\frac{5 \cdot \pi}{4} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ also

$$\begin{aligned} f_1' \left(\frac{5 \cdot \pi}{4} \right) &= -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(-\sqrt{2}) \cdot \sin \left(\sin^2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right) \right) \approx -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (-0.988) \cdot \sin(0.422) \\ &\approx -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (-0.988) \cdot 0.41 \approx 0.286 \end{aligned}$$

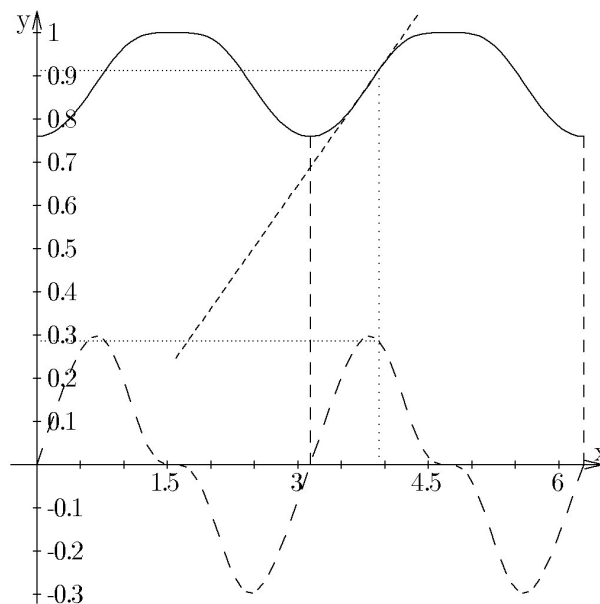
Dies ist also die Steigung der Tangente in $x_0 = \frac{5 \cdot \pi}{4} \approx 3.93$.

Die Tangente muss durch den Kurvenpunkt $(x_0, f_1(x_0))$ gehen. Nach der Wertetabelle ist $f_1(x_0) \approx 0.91$

Also muss gelten

$$y = 0.286 \cdot x + n \text{ mit } 0.91 = 0.286 \cdot 3.93 + n, \text{ also } n = -0.211.$$

Daher lautet die Gleichung der Tangente $y = 0.286 \cdot x - 0.211$

**Aufgabe 5.17**

$$\begin{aligned} f_1 &= \cos(\sin^2(\cos(x))) \text{ (ausgezogen)} \\ f_1' &= \sin(x) \cdot \sin(2 \cdot \cos(x)) \cdot \sin(\sin^2(\cos(x))) \\ &\quad \text{(gestrichelt)} \end{aligned}$$

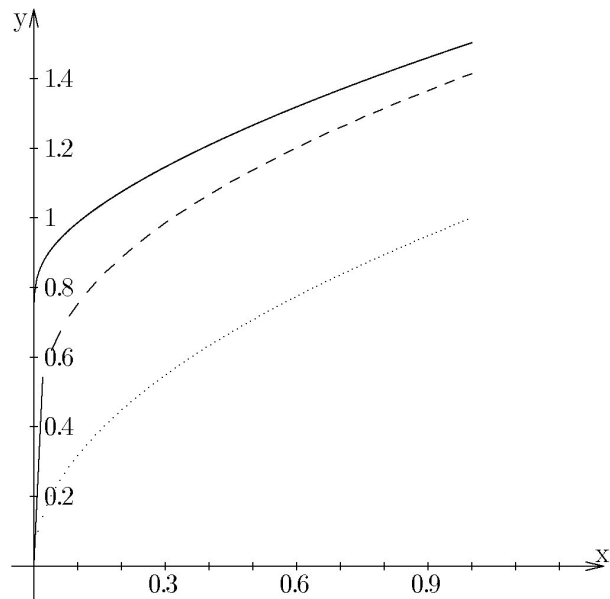
Aufgabe 5.18

Differenzieren Sie die Funktion $f_2 = \sqrt[2]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}$ und bestimmen Sie die Tangente in $(x_0, f_2(x_0))$ mit $x_0 = 0.1$

Lösung 5.18

Wertetabelle zur Darstellung der Kurve:

x	$\sqrt[4]{x}$	$\sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}$	f_2
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0100	0.3162	0.6884	0.8357
0.0200	0.3761	0.7344	0.8686
0.0300	0.4162	0.7641	0.8911
0.0400	0.4472	0.7869	0.9093
0.0500	0.4729	0.8056	0.9250
0.0600	0.4949	0.8218	0.9390
0.0700	0.5144	0.8360	0.9519
0.0800	0.5318	0.8489	0.9638
0.0900	0.5477	0.8608	0.9751
0.1000	0.5623	0.8717	0.9857
0.2000	0.6687	0.9542	1.0743
0.3000	0.7401	1.0132	1.1459
0.4000	0.7953	1.0613	1.2088
0.5000	0.8409	1.1027	1.2660
0.6000	0.8801	1.1396	1.3190
0.7000	0.9147	1.1732	1.3686
0.8000	0.9457	1.2041	1.4157
0.9000	0.9740	1.2329	1.4604
1.0000	1.0000	1.2599	1.5033

**Aufgabe 5.18**

$$f_2 = \sqrt[2]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}} \text{ (ausgezogen)}$$

$$f_{2,1} = \sqrt[2]{x + \sqrt[3]{x}} \text{ (gestrichelt)}$$

$$f_{2,2} = \sqrt[2]{x} \text{ (gepunktet)}$$

Ableitung:

Es ist nach der Kettenregel

$$f_2' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[2]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}} \cdot \left[x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}} \right]'$$

und weiter mit der Kettenregel

$$f_2' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[2]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot (x + \sqrt[4]{x})^{-\frac{2}{3}} \cdot [x + \sqrt[4]{x}]' \right)$$

also

$$\begin{aligned} f_2' &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt[2]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x + \sqrt[4]{x})^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt[2]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x + \sqrt[4]{x})^2}} + \frac{1}{12 \cdot \sqrt[3]{(x + \sqrt[4]{x})^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}} \right) \end{aligned}$$

Tangente:

Es ist

$$f_2'(0.1) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[2]{0.1 + \sqrt[3]{0.1 + \sqrt[4]{0.1}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(0.1 + \sqrt[4]{0.1})^2}} + \frac{1}{12 \cdot \sqrt[3]{(0.1 + \sqrt[4]{0.1})^2} \cdot \sqrt[4]{0.1^3}} \right)$$

Wegen $\sqrt[4]{0.1} \approx 0.5623$, $\sqrt[4]{0.1^3} \approx 0.1778$,

$0.1 + \sqrt[4]{0.1} \approx 0.6623$ und daher $\sqrt[3]{(0.1 + \sqrt[4]{0.1})^2} \approx 0.6623^{2/3} \approx 0.7598$

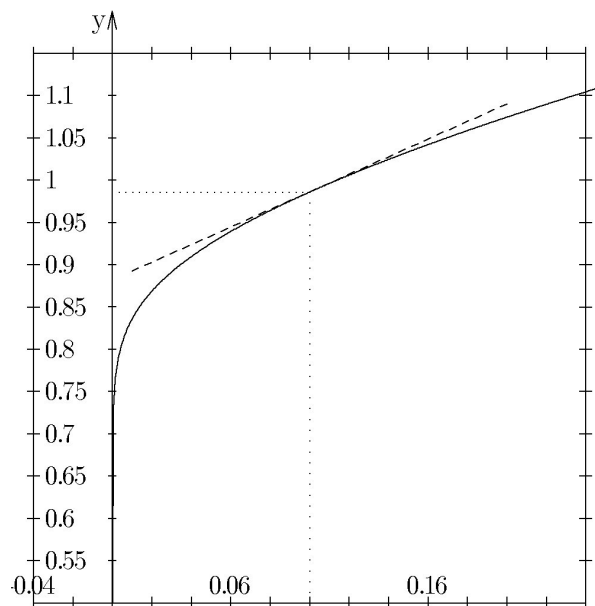
sowie $\sqrt[2]{0.1 + \sqrt[3]{0.1 + \sqrt[4]{0.1}}} = f_2(0.1) \approx 0.9857$ ist daher

$$f_2'(0.1) \approx \frac{1}{2 \cdot 0.9857} \cdot \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 0.7598} + \frac{1}{12 \cdot 0.7598 \cdot 0.1778} \right) \approx 0.5073 \cdot (1 + 0.4387 + 0.6169) \approx 1.04$$

Dies ist also die Steigung der Tangente in $x_0 = 0.1$.

Die Tangente muss durch den Kurvenpunkt $(x_0, f_2(x_0)) = (0.1, 0.9857)$ gehen. Also muss gelten $y = 1.04 \cdot x + n$ mit $0.9857 = 1.04 \cdot 0.1 + n$, also $n = 0.882$.

Daher lautet die Gleichung der Tangente im Punkt $(0.1, 0.9857)$: $y = 1.04 \cdot x + 0.882$.



Aufgabe 5.18:

$$f_2 = \sqrt[2]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}} \text{ (ausgezogen)}$$

Tangente in $(0.1, 0.9857)$: $y = 1.04 \cdot x + 0.882$ (gestrichelt)