



6 Integralrechnung, zweidimensional

Aufgabe 6.1:

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \ln(x) \cdot dx$ nach dem Verfahren der partiellen Integration.

Lösung Aufgabe 6.1:

$$\begin{aligned}
 u' &:= 1 & \Rightarrow & u = x \\
 v &:= \ln(x) & \Rightarrow & v' = \frac{1}{x} \\
 \int \ln(x) \cdot dx &= \int 1 \cdot \ln(x) \cdot dx \quad \text{=====} \\
 x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx &= x \cdot \ln(x) - \int 1 \cdot dx \\
 x \cdot \ln(x) - x + C.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.2:

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \arctan(x) \cdot dx$ nach dem Verfahren der partiellen Integration.

Lösung Aufgabe 6.2:

$$\begin{aligned}
 u' &:= 1 & \Rightarrow & u = x \\
 v &:= \arctan(x) & \Rightarrow & v' = \frac{1}{1+x^2} \\
 \int \arctan(x) \cdot dx &= \int 1 \cdot \arctan(x) \cdot dx \quad \text{=====} \\
 x \cdot \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot dx &= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2 \cdot x}{1+x^2} \cdot dx \\
 x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln |1+x^2| + C.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.3:

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x \cdot \arctan(x) \cdot dx$ nach dem Verfahren der partiellen Integration.

Lösung 6.3:

$$\int x \cdot \arctan x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \int \frac{\frac{x^2}{2}}{1+x^2} \cdot dx$$

$$\left[f' = x, g = \arctan x \implies f = \frac{x^2}{2}, g' = \frac{1}{1+x^2} \right].$$

$$\text{Wegen } \int \frac{\frac{x^2}{2}}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \cdot dx = \frac{1}{2}(x - \arctan x)$$

$$\text{folgt } \int x \cdot \arctan x \cdot dx = \frac{x^2+1}{2} \cdot \arctan x - \frac{x}{2} + C.$$

Aufgabe 6.4:

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x^n \cdot \ln|x| \cdot dx$ für $n \in \mathbb{N}$ nach dem Verfahren der partiellen Integration.

Lösung Aufgabe 6.4:

$$\text{Für } n \neq -1 \text{ gilt } \int x^n \cdot \ln|x| \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln|x| - \int \frac{x^n}{n+1} \cdot dx$$

$$\left[f' = x^n, g = \ln|x| \implies f = \frac{x^{n+1}}{n+1}, g' = \frac{1}{x} \right].$$

$$\implies \int x^n \cdot \ln|x| \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln|x| - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \quad n \neq -1.$$

$$\text{Für } n = -1 \text{ erhält man } \int \frac{1}{x} \cdot \ln|x| \cdot dx = \ln^2|x| - \int \frac{1}{x} \cdot \ln|x| \cdot dx$$

$$\left[f' = \frac{1}{x}, g = \ln|x| \implies f = \ln|x|, g' = \frac{1}{x} \right].$$

$$\implies 2 \int \frac{1}{x} \cdot \ln|x| \cdot dx = \ln^2|x| + 2C,$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln|x| \cdot dx = \frac{1}{2} \ln^2|x| + C.$$

Simpson-Formel

Für eine auf $[a, b]$ stetige Funktion f gilt mit $x_i = a + i \cdot h$ für $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx \frac{b-a}{6n} \cdot \left(f(x_0) + f(x_{2n}) + 4 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} f(x_{2i+2}) \right).$$

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert die Folge der Näherungswerte gegen den Integralwert.

Aufgabe 6.5:

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Simpson-Formel

einen Näherungswert für das nebenstehende bestimmte Integral.

$$\int_{0,4}^{1,4} e^{-x^2} \cdot dx$$

b) Schreiben Sie hierfür ein Computer-Programm.

Lösung Aufgabe 6.5a):

Der gesuchte Integralwert lautet:

$$\int_{0,4}^{1,4} e^{-x^2} \cdot dx = 0,464288 \quad (\text{gerundet auf 6 Nachkommastellen}).$$

Lösung Aufgabe 6.5b):

```
input "n=";n
dim x(2*n+2), y(2*n+2)
for i=0 to 2*n
x(i)=0.4 + i*1/(2*n)
y(i)=exp(-x(i)^2)
next i
s1=0
for i=0 to n-1
s1=s1+y(2*i+1)
next i
s2=0
for i=0 to n-2
s2=s2+y(2*i+2)
next i
integral=(1.4-0.4) / (6*n) * ( y(0) + y(2*n) + 4*s1 + 2*s2 )
print "integral=";integral
```

Rekursionsformel

Aufgabe 6.6:

a) Leiten Sie eine Rekursionsformel her zur Berechnung des unbestimmten Integrals

$$\int x^n \cdot e^{-x} \cdot dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

d.h. geben Sie an, wie Sie dieses Integral $\int x^n \cdot e^{-x} \cdot dx$ aus der Kenntnis der Integrale $\int x^{n-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$, $\int x^{n-2} \cdot e^{-x} \cdot dx$, ... berechnen können.

b) berechnen Sie mit dem aus a) gewonnen Ergebnis $\int x^4 \cdot e^{-x} \cdot dx$.

Lösung Aufgabe 6.6:

a) Es ist nach den Rechenregeln der partiellen Integration

$$\begin{aligned} f' = e^{-x} &\implies f = -e^{-x} \\ g = x^n &\implies g' = n \cdot x^{n-1} \\ \int x^n \cdot e^{-x} \cdot dx & \implies -x^n \cdot e^{-x} + n \cdot \int x^{n-1} \cdot e^{-x} \cdot dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 1 &\implies \int x \cdot e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C \\ &= -e^{-x}(x + 1) + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 2 &\implies \int x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot \int x \cdot e^{-x} \cdot dx = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot (-e^{-x}(x + 1)) + C \\ &= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 3 &\implies \int x^3 \cdot e^{-x} \cdot dx = -x^3 \cdot e^{-x} + 3 \cdot \int x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx \\ &= -x^3 \cdot e^{-x} + 3 \cdot (-e^{-x}(x^2 + 2x + 2)) + C \\ &= -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 4 &\implies \int x^4 \cdot e^{-x} \cdot dx = -x^4 \cdot e^{-x} + 4 \cdot \int x^3 \cdot e^{-x} \cdot dx \\ &= -x^4 \cdot e^{-x} + 4 \cdot (-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)) + C \\ &= -e^{-x}(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24) + C. \end{aligned}$$

Aufgabe 6.7: Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^2 2 \cdot x \cdot e^{(x^2)} \cdot dx$

Lösung 6.7: (siehe auch REP 13.39)

$$\begin{aligned} & \text{Substitution} \\ & t := x^2 \\ & dt = 2 \cdot x \cdot dx \\ & \int_0^2 2 \cdot x \cdot e^{(x^2)} \cdot dx = \int_{x=0}^{x=2} e^t dt = [e^t]_{x=0}^{x=2} = [e^{(x^2)}]_{x=0}^{x=2} = e^4 - e^0 = e^4 - 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.8: Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_1^e \frac{\cos(\ln(x))}{x} \cdot dx$

Lösung Aufgabe 6.8:

$$\begin{aligned} & \text{Substitution} \\ & t := \ln(x) \\ & dt = \frac{1}{x} \cdot dx \\ & \int_1^e \frac{\cos(\ln(x))}{x} \cdot dx = \int_{x=1}^{x=e} \cos(u) du = [\sin(u)]_{x=1}^{x=e} = [\sin(\ln(x))]_{x=1}^{x=e} = \sin(1) - \sin(0) = \sin(1) \approx 0.8415 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.9: Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 6}} \cdot dx$

Lösung Aufgabe 6.9:

$$\begin{aligned} & \text{Substitution} \\ & t := x^2 - 6 \\ & dt = 2 \cdot x \cdot dx \\ & dx = \frac{1}{2 \cdot x} dt \\ & \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 6}} \cdot dx = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2 - 6} + C. \end{aligned}$$

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x} \cdot dx$$

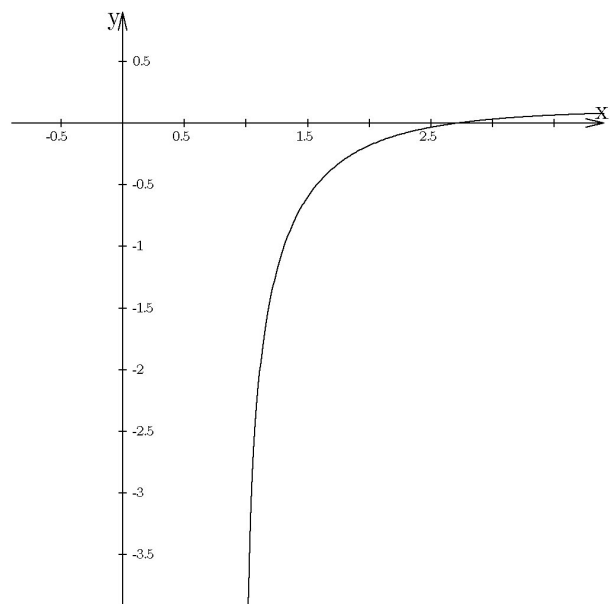
Aufgabe 6.10: Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{\ln(\ln(x))}{x} \cdot dx$.

Lösung Aufgabe 6.10:

$$\text{Es ist } \int \frac{\ln(\ln(x))}{x} \cdot dx$$

$$\begin{aligned} & \text{Substitution} \\ & t := \ln(x) \\ & dt = \frac{1}{x} \cdot dx \\ & dx = x \cdot dt \\ & \int \ln(t) dt = t \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\ln(t) - 1) + C \\ & = \ln(x) \cdot (\ln(\ln(x)) - 1) + C \end{aligned}$$



Aufgabe 6.10

Aufgabe 6.11: Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}} \cdot dx$

Lösung Aufgabe 6.11:

$$\begin{aligned} & \text{Standard-Substitution} \\ & t := \sqrt[3]{x} \\ & x = t^3 \\ & dx = 3 \cdot t^2 dt \\ & \int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{3 \cdot t^2 dt}{t^3 + t} = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2 \cdot t}{t^2 + 1} dt \end{aligned}$$

Wegen $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln|f(x)|$ ergibt sich

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} \cdot \ln(t^2 + 1) + C = \frac{3}{2} \cdot \ln(\sqrt[3]{x^2} + 1) + C.$$

Aufgabe 6.12 $\int \sin(\sqrt{x}) \cdot dx$: Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \sin(\sqrt{x}) \cdot dx$

Standard-Substitution

$$t := \sqrt{x}$$

$$x = t^2$$

$$dx = 2 \cdot t \, dt$$

Lösung 6.12: $\int \sin(\sqrt{x}) \cdot dx = 2 \cdot \int t \cdot \sin t \, dt$

weiter mit partieller Integration:

$$\int t \cdot \sin t \, dt \stackrel{\substack{u := t \quad u' = 1 \\ v' := \sin(t) \quad v = \int v' = -\cos(t)}}{=} -t \cdot \cos(t) + \int \cos(t) \, dt = -t \cdot \cos(t) + \sin(t)$$

Zusammengefasst: $\int \sin(\sqrt{x}) \cdot dx = -2 \cdot t \cdot \cos(t) + 2 \cdot \sin(t) + C$
 $= 2 \cdot \sin(\sqrt{x}) - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \cos(\sqrt{x}) + C$

bestimmtes Integral

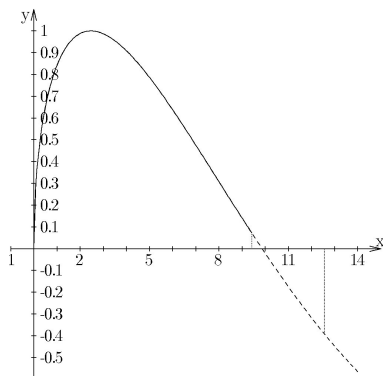
Es ist definiert:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a) \quad \text{für} \quad F(x) := \int f(x) \cdot dx$$

Aufgabe 6.13: Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^{3 \cdot \pi} \sin(\sqrt{x}) \cdot dx$

Lösung 6.13:

$$\begin{aligned} & \int_0^{3 \cdot \pi} \sin(\sqrt{x}) \cdot dx \\ &= \left[2 \cdot \sin(\sqrt{x}) - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \cos(\sqrt{x}) \right]_{x=0}^{x=3 \cdot \pi} \\ &= 2 \cdot \sin(\sqrt{3 \cdot \pi}) - 2 \cdot \sqrt{3 \cdot \pi} \cdot \cos(\sqrt{3 \cdot \pi}) - \left(2 \cdot \sin(\sqrt{0}) - 2 \cdot \sqrt{0} \cdot \cos(\sqrt{0}) \right) \\ &= 2 \cdot \sin(\sqrt{3 \cdot \pi}) - 2 \cdot \sqrt{3 \cdot \pi} \cdot \cos(\sqrt{3 \cdot \pi}) \approx 6.267 \end{aligned}$$



Aufgabe 6.13: $\sin(\sqrt{x})$
 $0 \leq x \leq 3 \cdot \pi$ (ausgezogen) und
 $0 \leq x \leq 4 \cdot \pi$ (gestrichelt)

Aufgabe 6.14

Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{4 \cdot \pi} \sin(\sqrt{x}) \cdot dx$$

Lösung 6.14:

$$\begin{aligned} & \int_0^{4 \cdot \pi} \sin(\sqrt{x}) \cdot dx \\ &= \left[2 \cdot \sin(\sqrt{x}) - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \cos(\sqrt{x}) \right]_{x=0}^{x=4 \cdot \pi} \\ &= 2 \cdot \sin(\sqrt{4 \cdot \pi}) - 2 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi} \cdot \cos(\sqrt{4 \cdot \pi}) \\ &\approx 5.736 \end{aligned}$$

unbestimmtes Integral

$$\int \frac{8 \cdot x + 12}{x^2 + 4 \cdot x + 4} \cdot dx$$

Aufgabe 6.15: Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{8 \cdot x + 12}{x^2 + 4 \cdot x + 4} \cdot dx$

Lösung Aufgabe 6.15:

$$\begin{aligned} \text{Es ist } \frac{8 \cdot x + 12}{x^2 + 4 \cdot x + 4} & \stackrel{\text{quadratische Gleichung}}{=} \frac{8 \cdot x + 12}{(x + 2)^2} \\ & \stackrel{\text{Ableitung des Nenners ausklammern!}}{=} \frac{8 \cdot (x + 2) - 4}{(x + 2)^2} = \frac{8}{x + 2} - \frac{4}{(x + 2)^2} \end{aligned}$$

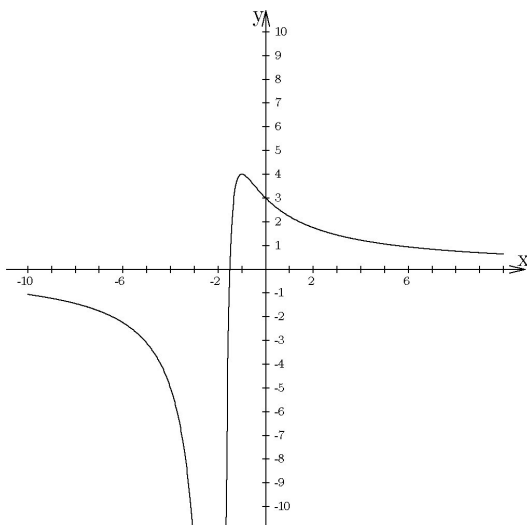
Daher ist

$$\begin{aligned} \int \frac{8 \cdot x + 12}{x^2 + 4 \cdot x + 4} \cdot dx &= \int \frac{8}{x + 2} \cdot dx + \int \frac{-4}{(x + 2)^2} \cdot dx \\ &= 8 \cdot \ln(|x + 2|) + \frac{4}{x + 2} + C \end{aligned}$$

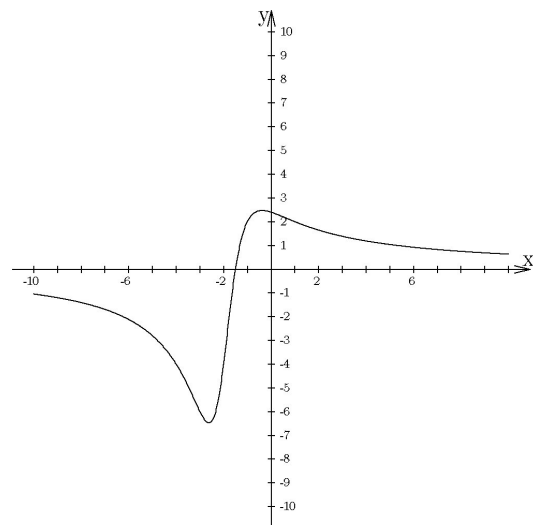
Aufgabe 6.16: Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{8 \cdot x + 12}{x^2 + 4 \cdot x + 5} \cdot dx$.

Lösung Aufgabe 6.16:

$$\begin{aligned} \text{Es ist } \int \frac{8 \cdot x + 12}{x^2 + 4 \cdot x + 5} \cdot dx & \stackrel{\text{Ableitung des Nenners ausklammern!}}{=} \int \frac{4 \cdot (2 \cdot x + 4) - 4}{x^2 + 4 \cdot x + 5} \cdot dx \\ &= 4 \cdot \int \frac{2 \cdot x + 4}{x^2 + 4 \cdot x + 5} \cdot dx - 4 \cdot \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1} \\ &= 4 \cdot \ln(x^2 + 4 \cdot x + 5) - 4 \cdot \arctan(x + 2) + C. \end{aligned}$$



Aufgabe 6.15



Aufgabe 6.16

Integration von Partialbrüchen (REP Seite 289)

$$\int (x-a)^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot (x-a)^{n+1} \text{ für } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x-a} \cdot dx = \ln(|x-a|)$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^k} \cdot dx = \frac{1}{-k+1} \cdot (x-a)^{-k+1} \text{ für } k \neq 1$$

Für $X = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, $\Delta = 4 \cdot a \cdot c - b^2$, $a \neq 0$ gilt:

$$\int \frac{1}{X} \cdot dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot a \cdot x + b}{\sqrt{\Delta}}\right) & (\Delta > 0) \\ \frac{-2}{\sqrt{\Delta}} \cdot \operatorname{artanh}\left(\frac{2 \cdot a \cdot x + b}{\sqrt{-\Delta}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot a \cdot x + b - \sqrt{-\Delta}}{2 \cdot a \cdot x + b + \sqrt{-\Delta}}\right) & (\Delta < 0) \\ \frac{-2}{2 \cdot a \cdot x + b} & (\Delta = 0) \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{X^2} \cdot dx = \frac{2 \cdot a \cdot x + b}{\Delta \cdot X} + \frac{2 \cdot a}{\Delta} \cdot \int \frac{1}{X} \cdot dx$$

$$\int \frac{x}{X} \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \ln(|X|) - \frac{b}{2 \cdot a} \cdot \int \frac{1}{X} \cdot dx$$

Aufgabe 6.17: Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{8 \cdot x + 12}{x^2 + 4 \cdot x + 3} \cdot dx$.

Lösung Aufgabe 6.17: Ansatz für Partialbruchzerlegung:

$$\frac{8 \cdot x + 12}{x^2 + 4 \cdot x + 3} = \frac{8 \cdot x + 12}{(x+1) \cdot (x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$$

Lösung nach Hauptnennermethode für Partialbruchzerlegung:

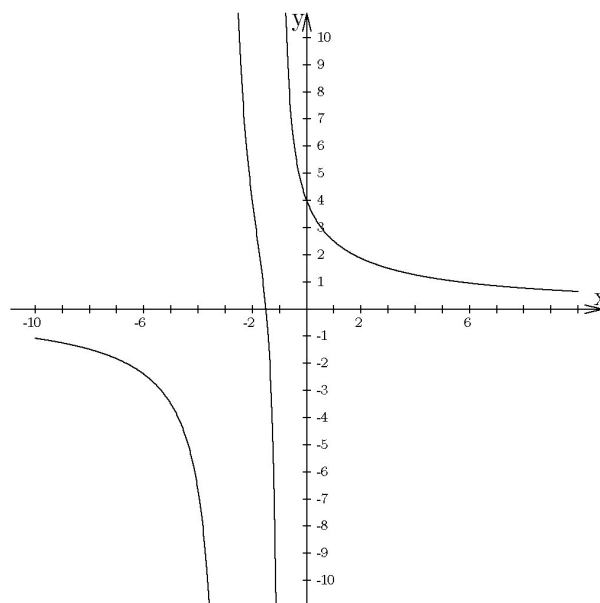
$$\begin{aligned} \frac{8 \cdot x + 12}{(x+1) \cdot (x+3)} &= \frac{A \cdot (x+3) + B \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x+3)} \\ \Rightarrow 8 \cdot x + 12 &= A \cdot (x+3) + B \cdot (x+1) \\ \Rightarrow 8 \cdot x + 12 &= x \cdot (A+B) + 3 \cdot A + B \\ \Rightarrow 8 &= A+B \quad \text{und} \quad 12 = 3 \cdot A + B \\ \Rightarrow B &= 8 - A \quad \text{und} \quad 12 = 3 \cdot A + (8 - A) = 8 + 2 \cdot A \\ \Rightarrow B &= 8 - A \quad \text{und} \quad 2 = A \\ \Rightarrow B &= 8 - 2 = 6 \quad \text{und} \quad 2 = A \end{aligned}$$

Lösung nach Zuhalttemethode für Partialbruchzerlegung:

$$A = \frac{-8 + 12}{\bigcirc \cdot (-1 + 3)} = 2 \quad \text{und} \quad B = \frac{-24 + 12}{(-3 + 1) \cdot \bigcirc} = 6$$

Zusammenfassung:

$$\int \frac{8 \cdot x + 12}{x^2 + 4 \cdot x + 3} \cdot dx = \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{6}{x+3} \right) \cdot dx = 2 \cdot \ln(|x+1|) + 6 \cdot \ln(|x+3|) + C$$



Aufgabe 6.17

Aufgabe 6.18: Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{x} \cdot dx$.

Lösung Aufgabe 6.18:

Es ist

$$\int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{x} \cdot dx \stackrel{\text{Substitution}}{=} \int \frac{4 \cdot t^4}{t^4 - 1} dt$$

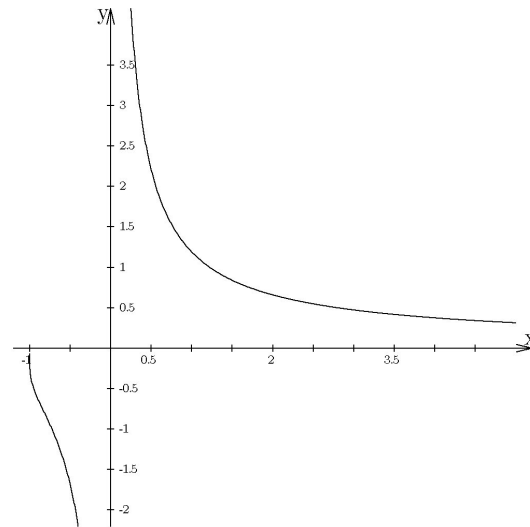
$t := \sqrt[4]{x+1}$
 $x = t^4 - 1$
 $dx = 4 \cdot t^3 dt$

Dieser Bruch ist *unecht*.

Daher muss zunächst eine *Summendivision* durchgeführt werden:

$$\frac{4 \cdot t^4}{t^4 - 1} = 4 \cdot t^4 : (t^4 - 1) = 4 + \frac{4}{t^4 - 1}$$

$$\frac{4 \cdot t^4 - 4}{4}$$



Da-

Aufgabe 6.18

her ist die gebrochen rationale Funktion $\frac{4 \cdot t^4}{t^4 - 1}$ Summe einer ganzrationalen Funktion (4) und eines echten Bruches $\frac{4}{t^4 - 1}$.

Der Nenner $t^4 - 1$ des echten Bruches kann (im reellen) in folgende Faktoren zerlegt werden:
 $t^4 - 1 = (t + 1) \cdot (t - 1) \cdot (t^2 + 1)$

Daher lautet der Ansatz für *Partialbruchzerlegung* (PBZ) des *echten* Bruches:

Es gibt reelle Zahlen A , B , C und D mit

$$\frac{4}{t^4 - 1} = \frac{4}{(t + 1) \cdot (t - 1) \cdot (t^2 + 1)} = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t - 1} + \frac{C \cdot t + D}{t^2 + 1}.$$

$$A = \frac{4}{\bigcirc \cdot (-2) \cdot 2} = -1, \quad B = \frac{4}{2 \cdot \bigcirc \cdot 2} = 1 \quad (\text{nach 'Zuhaltemethode'}). \quad \Rightarrow$$

$$\frac{C \cdot t + D}{t^2 + 1} = \frac{4 + (t - 1) \cdot (t^2 + 1) - (t + 1) \cdot (t^2 + 1)}{(t + 1) \cdot (t - 1) \cdot (t^2 + 1)} = \frac{-2 \cdot t^2 + 2}{(t^2 - 1) \cdot (t^2 + 1)} = \frac{-2}{t^2 + 1}$$

Damit ergibt sich aus der Partialbruchzerlegung und anschließender Integration:

$$\int \frac{4 \cdot t^4}{t^4 - 1} dt = \int \left(4 - \frac{1}{t + 1} + \frac{1}{t - 1} - \frac{2}{t^2 + 1} \right) dt$$

$$= 4 \cdot t - \ln(|t + 1|) + \ln(|t - 1|) - 2 \cdot \arctan(t) + C$$

Zusammenfassung:

$$\int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{x} \cdot dx = 4 \cdot \sqrt[4]{x+1} - \ln(\sqrt[4]{x+1} + 1) + \ln(|\sqrt[4]{x+1} - 1|) - 2 \cdot \arctan(\sqrt[4]{x+1}) + C$$

Aufgabe 6.19: Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{dx}{4 + 5 \cdot \cos x}$.

Lösung Aufgabe 6.19:

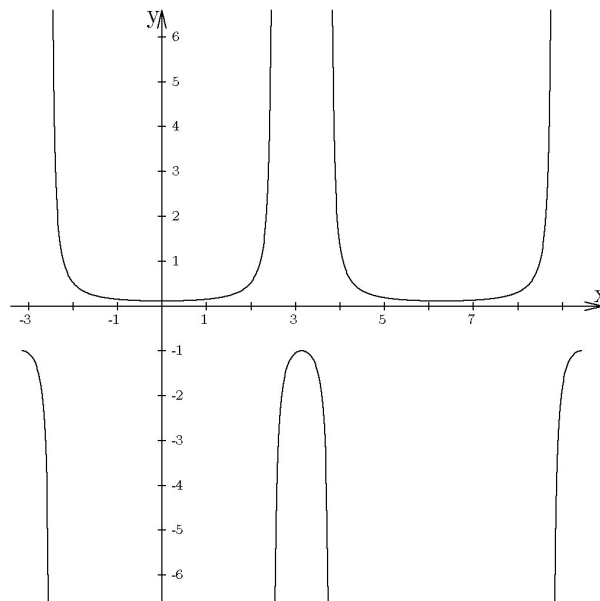
$$\begin{aligned} & \text{Substitution} \\ & t := \tan\left(\frac{x}{2}\right) \\ & \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ & dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\ & \int \frac{dx}{4 + 5 \cdot \cos x} = \int \frac{1}{4 + 5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ & = \int \frac{2}{4 + 4 \cdot t^2 + 5 - 5 \cdot t^2} dt = \int \frac{-2}{t^2 - 9} dt \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung des *echten* Bruches $\frac{-2}{t^2-9}$ ergibt

$$\frac{-2}{t^2 - 9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t+3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t-3}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \int \frac{-2}{t^2 - 9} &= \int \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t+3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t-3} \right) dt = \frac{1}{3} \cdot \ln(|t+3|) - \frac{1}{3} \cdot \ln(|t-3|) + C \\ &= \frac{1}{3} \cdot \ln \left(\left| \frac{t+3}{t-3} \right| \right) + C = \frac{1}{3} \cdot \ln \left(\left| \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 3}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 3} \right| \right) + C \\ &= \frac{1}{3} \cdot \ln \left(\left| \frac{1 - \cos(x) + 3 \cdot \sin(x)}{1 - \cos(x) - 3 \cdot \sin(x)} \right| \right) + C \quad \text{wegen} \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \end{aligned}$$



Aufgabe 6.19

Aufgabe 6.20: Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{2 \cdot e^{2 \cdot x} - 3}{(e^x + 2) \cdot \cosh(x)} \cdot dx$

Lösung Aufgabe 6.20:

$$\begin{aligned}
 I &:= \int \frac{2 \cdot e^{2 \cdot x} - 3}{(e^x + 2) \cdot \cosh(x)} \cdot dx \stackrel{\text{Definition } \cosh(x)}{=} \int \frac{2 \cdot e^{2 \cdot x} - 3}{(e^x + 2) \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})} \cdot dx \\
 &\stackrel{\text{Substitution}}{=} \int \frac{4 \cdot e^{3 \cdot x} - 6 \cdot e^x}{(e^x + 2) \cdot (e^{2 \cdot x} + 1)} \cdot dx \stackrel{\substack{t := e^x \\ x = \ln(t) \\ dx = \frac{1}{t} dt}}{=} \int \frac{4 \cdot t^2 - 6}{(t + 2) \cdot (t^2 + 1)} dt
 \end{aligned}$$

Der Satz über Partialbruchzerlegung des *echten* Bruches $\frac{4 \cdot t^2 - 6}{(t+2) \cdot (t^2+1)}$ ergibt die Existenz von reellen Zahlen A , B und C mit

$$\frac{4 \cdot t^2 - 6}{(t + 2) \cdot (t^2 + 1)} = \frac{A}{t + 2} + \frac{B \cdot t + C}{t^2 + 1};$$

Dann ist $A = \frac{4 \cdot (-2)^2 - 6}{\bigcirc \cdot ((-2)^2 + 1)} = 2$ nach der 'Zuhaltemethode'

$$\text{Folglich ist } \frac{4 \cdot t^2 - 6 - 2 \cdot (t^2 + 1)}{(t + 2) \cdot (t^2 + 1)} = \frac{2 \cdot t^2 - 8}{(t + 2) \cdot (t^2 + 1)} = \frac{2 \cdot t - 4}{t^2 + 1} = \frac{B \cdot t + C}{t^2 + 1} \cdot \implies$$

$$I = \int \left(\frac{2}{t + 2} + \frac{2 \cdot t}{t^2 + 1} - \frac{4}{t^2 + 1} \right) dt = 2 \cdot \ln(|t + 2|) + \ln(t^2 + 1) - 4 \cdot \arctan(t) + K$$

$$= 2 \cdot \ln(e^x + 2) + \ln(e^{2 \cdot x} + 1) - 4 \cdot \arctan(e^x) + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

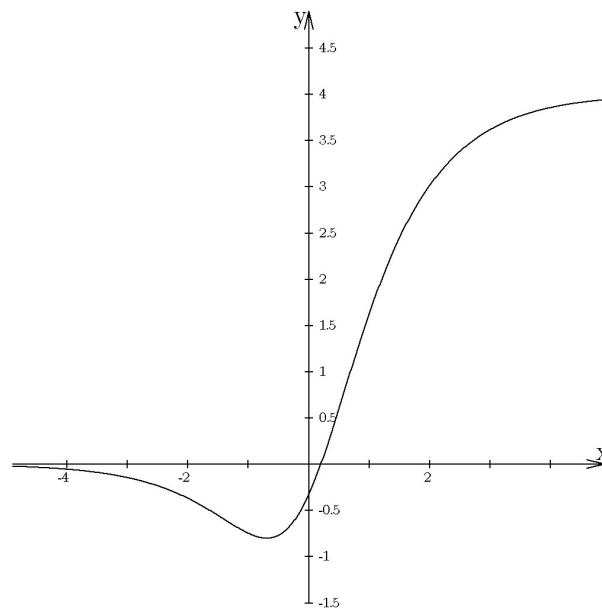


Bild zu Aufgabe 6.20

Problem-Substitution

Aufgabe 6.21: Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) := \frac{1}{9 + 3 \cdot \cos(x)}$

- einerseits den Flächeninhalt unter dem Graphen von $f(x)$ für $x \in [3, 4]$ und
- andererseits das Integral $\int_3^4 f(x) \cdot dx$ mit Hilfe einer Standard-Substitution.

Vergleichen Sie die Ergebnisse!

Standardsubstitution
 $t := \tan(x/2)$
 $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$
 $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Lösung Aufgabe 6.21: $\int_3^4 \frac{dx}{9 + 3 \cdot \cos(x)} \stackrel{\text{Standardsubstitution}}{=} \int_{x=3}^{x=4} \frac{2}{9 \cdot (1+t^2) + 3 \cdot (1-t^2)} dt$

$$= \int_{x=3}^{x=4} \frac{2}{12 + 6 \cdot t^2} dt = \frac{1}{3} \cdot \int_{x=3}^{x=4} \frac{1}{2 + t^2} dt = \frac{1}{6} \cdot \int_{x=3}^{x=4} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \arctan \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right]_{x=3}^{x=4} = \frac{1}{6} \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \arctan \left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{2}} \right) \right]_{x=3}^{x=4}$$

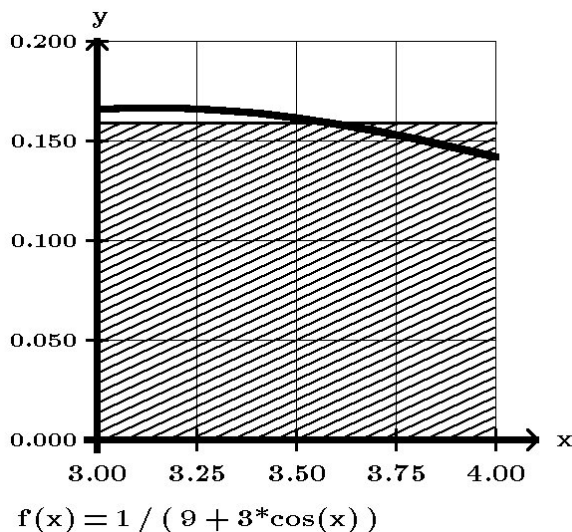
$$= \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\arctan \left(\frac{\tan(4/2)}{\sqrt{2}} \right) - \arctan \left(\frac{\tan(3/2)}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

$$= -0.23485 - 0.34668 = -.58153$$

Dieses Ergebnis ist nicht der Flächeninhalt!

Es ist $\int_3^4 \frac{dx}{9 + 3 \cdot \cos(x)} = 0.15895$

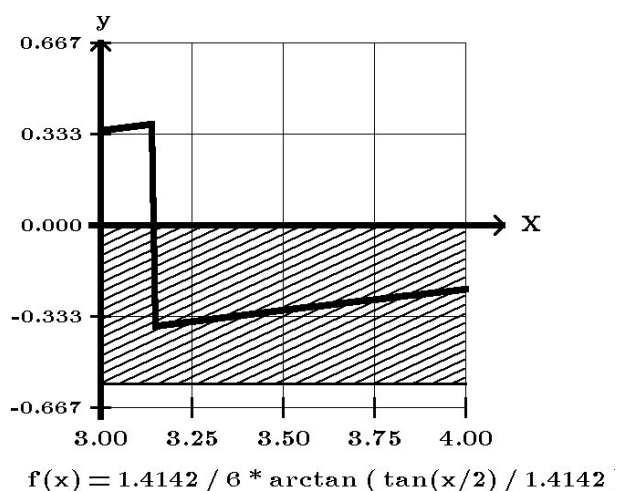
Beweis: siehe Zeichnung



Aufgabe 6.21: Problem-Substitution

Problem $t = \tan(x/2)$

$$f(x) := \frac{1}{9 + 3 \cdot \cos(x)}$$



Aufgabe 6.21: Problem-Substitution

Problem $t = \tan(x/2)$

$$f(x) := \frac{1}{9 + 3 \cdot \cos(x)}$$

Aufgabe 6.22: Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) := \frac{1}{5 - 4 \cdot \cos(x)}$

- einerseits den Flächeninhalt unter dem Graphen von $f(x)$ für $x \in [\frac{\pi}{2}, 5 \cdot \frac{\pi}{2}]$ und
- andererseits das Integral $\int_{\frac{\pi}{2}}^{5 \cdot \frac{\pi}{2}} f(x) \cdot dx$ mit Hilfe einer Standard-Substitution

Vergleichen Sie die Ergebnisse!

Lösung Aufgabe 6.22: Nach „Formeln + Hilfen“, S. 93, gibt es eine „Generalsubstitution“, die gültig ist für $-\pi < x < \pi$ und für $\pi < x < 3 \cdot \pi$:

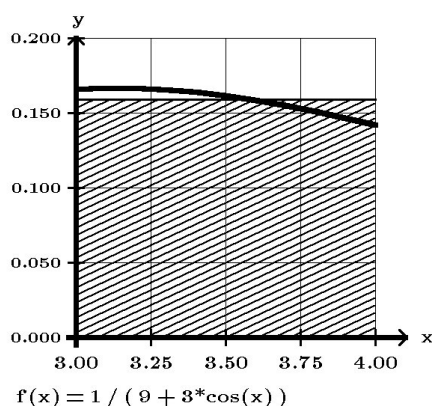
$$\begin{aligned}
 & \text{Standardsubstitution} \\
 & t := \tan(x/2) \\
 & dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \\
 & \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
 & \int_{\frac{\pi}{2}}^{5 \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 - 4 \cdot \cos(x)} = \int_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=5 \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{2}{5 \cdot (1+t^2) - 4 \cdot (1-t^2)} dt \\
 & = \int_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=5 \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{2}{1+9 \cdot t^2} dt
 \end{aligned}$$

Es ist nun ein besonderer Trick, das Intervall zu unterteilen (der Trick ist notwendig, weil $x \neq \frac{\pi}{2}$ gelten muss). Wenn diese Bedingung vernachlässigt wird, ergibt sich 0 als Flächeninhalt!:

$$\begin{aligned}
 & = \int_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} \frac{2}{1+9 \cdot t^2} dt + \int_{x=\pi}^{x=5 \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{2}{1+9 \cdot t^2} dt \\
 & = 2 \cdot \left\{ \int_{t=1}^{t=\infty} \frac{1}{1+9 \cdot t^2} dt + \int_{t=-\infty}^{t=1} \frac{1}{1+9 \cdot t^2} dt \right\} \\
 & = 2 \cdot \left\{ \left[\frac{1}{3} \cdot \arctan(3 \cdot t) \right]_{t=1}^{t=\infty} + \left[\frac{1}{3} \arctan(3 \cdot t) \right]_{t=-\infty}^{t=1} \right\} \\
 & = \frac{2}{3} \cdot \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(3) \right) + \left(\arctan(3) + \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \frac{2}{3} \cdot \pi \approx 2.09
 \end{aligned}$$

Es ist $\int_{\frac{\pi}{2}}^{5 \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 - 4 \cdot \cos(x)} = 2.09$ und das arithmetische Mittel $m = \frac{1}{3}$

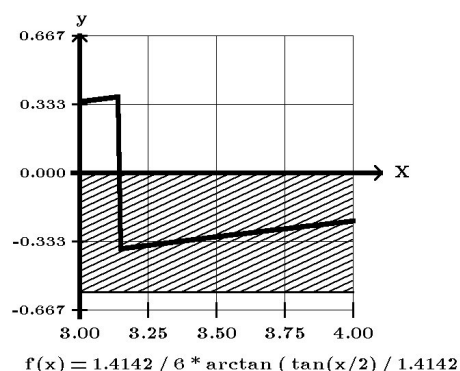
Dieses Ergebnis ist der Flächeninhalt! Beweis: siehe Zeichnung



Aufgabe 6.22: Problem-Substitution

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{5 \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 - 4 \cdot \cos(x)}$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$



Aufgabe 6.22: Problem-Substitution

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{5 \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 - 4 \cdot \cos(x)}$$

numerisch ermittelter Flächeninhalt = 2.37

Kurvendarstellungen (REP S. 499)

1 **explizite** (kartesische) Darstellung einer Kurve K : $K_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b\}$

Beispiel: Parabel $P = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2, -2 \leq x \leq 2\}$, Figur 6.23.a

2 **implizite** (kartesische) Darstellung einer Kurve K : $K_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = 0\}$

Beispiel: Parabel $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y - x^2 = 0\}$, Figur 6.23.a

3 **Polarkoordinaten**-Darstellung einer Kurve K : $K_r = \{(\varphi, r(\varphi)) \in \mathbb{R}^2, \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1\}$

Beispiel: Spirale $P = \{(\varphi, r(\varphi)) \in \mathbb{R}^2, r(\varphi) = \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi, \varphi \in \mathbb{R}\}$, Figur 6.23.b

4 **Parameter**-Darstellung einer ebenen Kurve K :

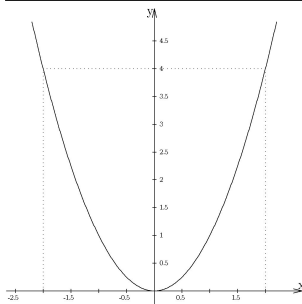
$$K_t = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2, t_0 \leq t \leq t_1, t \in \mathbb{R}\}$$

Beispiel: Kreis $P = \{(\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi, t \in \mathbb{R}\}$, Figur 6.23.c

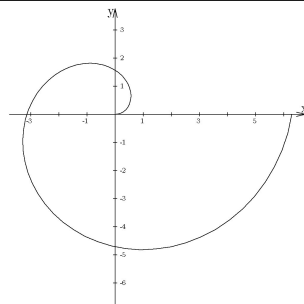
4a **Parameter**-Darstellung einer Raum-Kurve K :

$$K_t = \{(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3, t_0 \leq t \leq t_1, t \in \mathbb{R}\}$$

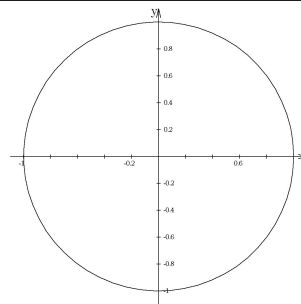
Beispiel: Zylindermantel $Z = \left\{(\cos(t), \sin(t), \frac{t}{2 \cdot \pi}) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi, t \in \mathbb{R}\right\}$, Figur 6.23.d



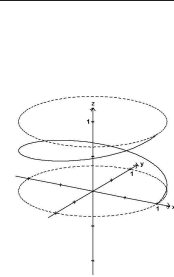
6.23.a



6.23.b



6.23.c



6.23.d

Tangentenvektor und Bogenlänge (REP S. 500 f.)

Darstellung	Kurvenpunkt	Tangentenvektor $\vec{t}$	Bogenlänge L
1 K_f	(x_2, y_2)	$(1, f'(x_2))$	$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}$
2 K_F	(x_2, y_2)	$(F_y(x_2, y_2), -F_x(x_2, y_2))$	
3 K_r	$(\varphi_2, r(\varphi_2))$	$\frac{\partial r}{\partial \varphi} \Big _{\varphi_2} \cdot \cos(\varphi_2) - r(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2)$ $\frac{\partial r}{\partial \varphi} \Big _{\varphi_2} \cdot \sin(\varphi_2) + r(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_2)$	$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(r(\varphi))^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi$
4 K_t	$(x(t_2), y(t_2))$	$(\dot{x}(t_2), \dot{y}(t_2))$	$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} \cdot dt$

Zykloide**Aufgabe 6.24: Tangentenvektor und Bogenlänge einer Zykloide**

Gegeben sei die Kurve

$$Z = \left\{ \vec{x}(t) := \begin{pmatrix} 2 \cdot (t - \sin(t)) \\ 2 \cdot (1 - \cos(t)) \end{pmatrix} ; 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi, t \in \mathbb{R} \right\}$$

- Zeichnen Sie die Kurve Z
- Bestimmen Sie die Richtung der Tangente im Punkt $\vec{x}(\frac{\pi}{2})$
- Bestimmen Sie die Länge des Bogens Z
- Zeigen Sie, dass diese Kurve als „Rollkurve“ eines Punktes auf dem Rand eines Kreises mit Radius $r = 2$, wenn der Kreis auf der x -Achse abrollt

Lösung Aufgabe 6.24:

Diese Kurve ist eben und in Parameterform

(4) gegeben.

6.24b):

Hier ist

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} 2 \cdot (t - \sin(t)) = 2 \cdot (1 - \cos(t))$$

und

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} 2 \cdot (1 - \cos(t)) = 2 \cdot \sin(t)$$

und folglich für $t_2 = \frac{\pi}{2}$

$$\dot{x}(t_2) = 2 \cdot (1 - \cos(\frac{\pi}{2})) = 2$$

und

$$\dot{y}(t_2) = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = 2.$$

Also hat der Tangentenvektor im Punkt $\vec{x}(\frac{\pi}{2})$ die Richtung $(2, 2)$.

6.24c):

Mit Hilfe von (6.24b) kann die Bogenlänge beschrieben werden:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} \cdot dt = \int_0^{2 \cdot \pi} \sqrt{(2 \cdot (1 - \cos(t)))^2 + (2 \cdot \sin(t))^2} \cdot dt$$

also

$$L = \int_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} \sqrt{4 \cdot (1 - 2 \cdot \cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t))} dt = 2 \cdot \int_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(t))} dt$$

Es folgt aus dem Additionstheorem

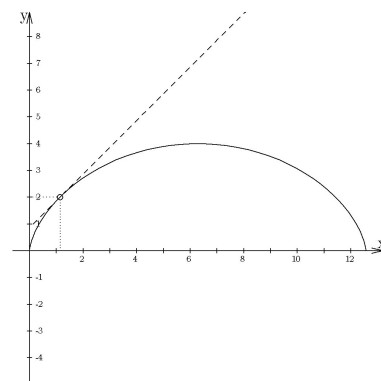
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$\cos(2 \cdot \alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$, und mit $\sin^2(\heartsuit) + \cos^2(\heartsuit) = 1$ ergibt sich

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot \alpha))$$

mit $t = 2 \cdot \alpha$ ist folglich $1 - \cos(t) = 2 \cdot \sin^2(\frac{t}{2})$. Da $0 \leq t \leq 2 \cdot \pi$, ist $\sin(\frac{t}{2}) \geq 0$ und daher

$$\sqrt{2 \cdot (1 - \cos(t))} = \sqrt{4 \cdot \sin^2(\frac{t}{2})} = 2 \cdot |\sin(\frac{t}{2})| = 2 \cdot \sin(\frac{t}{2})$$



Aufgabe 6.24: Bogen einer Zykloide

und damit

$$L = 4 \cdot \int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4 \cdot \left[-2 \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_{t=0}^{t=2\cdot\pi} = 4 \cdot [2 + 2] = 16$$

6.24d):

Wir betrachten auf dem Kreis $K = \{(x, y), x^2 + (y - 2)^2 = 4\}$ einen Punkt P .

Für $t = 0$ befinde sich dieser Punkt $P = P(0)$ im Nullpunkt des Koordinatensystems.

Wenn sich nun der Kreis in Richtung positiver x -Achse bewegt, so bewegt sich sein Mittelpunkt $M = M(t)$ mit der Zeit t gemäß der Gleichung

$$M(t) = \begin{pmatrix} x_M(t) \\ y_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mit der Zeit t dreht sich der Punkt $P(t)$ um den Mittelpunkt $M(t)$, und nach der Zeit $t = 2 \cdot \pi$ ist der Punkt wieder „unten“ angekommen, also $x_P(t) = x_M(t) - 2 \cdot \sin(t)$ und $y_P(t) = y_M(t) - 2 \cdot \cos(t)$.

Daher können wir schreiben:

$$P(t) = \begin{pmatrix} x_M(t) \\ y_M(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin(t) \\ -2 \cdot \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot t - 2 \cdot \sin(t) \\ 2 - 2 \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$$

und dies ist die Gleichung der Zykloide Z .

Asteroide**Aufgabe 6.25: Bogenlänge einer Asteroide**

Zeichnen Sie eine Asteroide

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos^3(t) \\ 2 \cdot \sin^3(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi$$

und bestimmen Sie seine Länge.

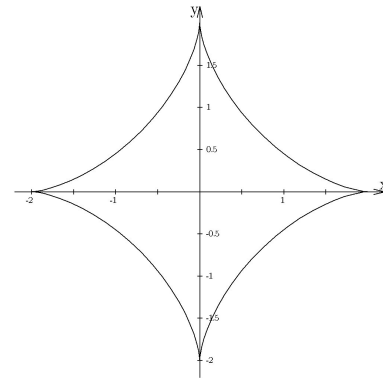
Lösung Aufgabe 6.25:

Die Bogenlänge B der Asteroide ist definiert durch

$$B = \int_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Hier ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= (-6 \cdot \cos^2(t) \cdot \sin(t))^2 \\ \text{und} \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= (6 \cdot \sin^2(t) \cdot \cos(t))^2 \end{aligned}$$



Aufgabe 6.25): Asteroide

und folglich

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= 6 \cdot \sqrt{\cos^4(t) \cdot \sin^2(t) + \sin^4(t) \cdot \cos^2(t)} \\ &= 6 \cdot \sqrt{\cos^2(t) \cdot (\cos^2(t) \cdot \sin^2(t) + \sin^4(t))} \\ &= 6 \cdot \sqrt{\cos^2(t) \cdot (\cos^2(t) \cdot \sin^2(t) + \sin^2(t) \cdot (1 - \cos^2(t)))} \\ &= 6 \cdot \sqrt{\cos^2(t) \cdot \sin^2(t)} \end{aligned}$$

Dann ist

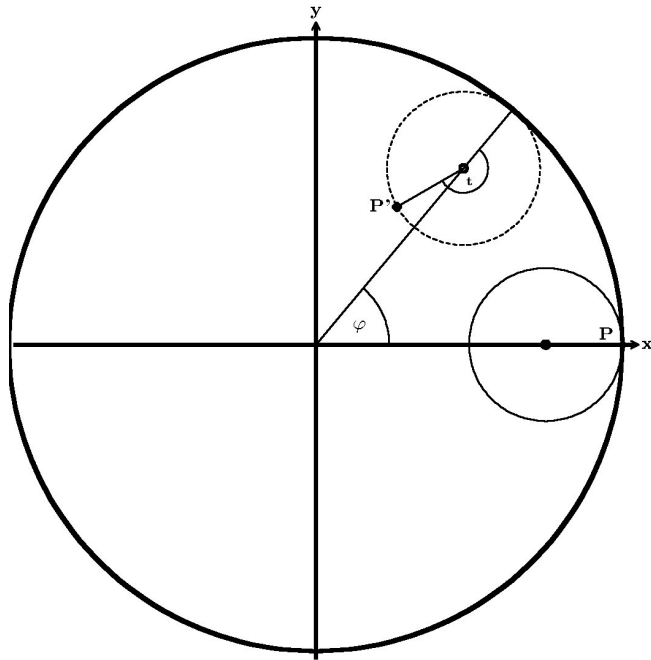
$$B = \int_{t=0}^{t=2 \cdot \pi} 6 \cdot \sqrt{\cos^2(t) \cdot \sin^2(t)} dt = 6 \cdot \sqrt{4} = 12$$

Rollkurve**Aufgabe 6.26 (Rollkurve):**

Gesucht ist eine Parameterdarstellung derjenigen Kurve, die ein Peripheriepunkt P eines Kreises vom Radius a durchläuft, wenn dieser Kreis auf der Innenseite eines Kreises vom Radius b ($b > a$) abrollt. (Ausgangslage siehe Skizze)

Betrachten Sie speziell die Fälle $b = 2a$ und $b = 4a$.

Berechnen Sie für den Spezialfall $b = 4a$ die Bogenlänge der Kurve, die entsteht, wenn der kleine Kreis genau einmal den großen Kreis durchrollt.



Aufgabe 6.26): Hypozykloide

Lösung 6.26:

Zwischen dem Rollwinkel t des kleinen Kreises und dem Polarwinkel φ seines Mittelpunktes M besteht der Zusammenhang:

$$b \cdot \varphi = a \cdot t \quad (\text{Rollbedingung})$$

Ortsvektor des Mittelpunktes M :

$$\vec{x}_M = \begin{pmatrix} (b-a) \cdot \cos \varphi \\ (b-a) \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Ortsvektor des Punktes P :

$$\vec{x}_P = \vec{x}_M + \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t - \varphi) \\ -a \cdot \sin(t - \varphi) \end{pmatrix}$$

Wegen $t = \frac{b}{a} \cdot \varphi$ (aus der Rollbedingung) ergibt sich

$$\vec{x}_P(\varphi) = \begin{pmatrix} (b-a) \cdot \cos \varphi + a \cdot \cos\left(\left(\frac{b}{a}-1\right)\varphi\right) \\ (b-a) \cdot \sin \varphi - a \cdot \sin\left(\left(\frac{b}{a}-1\right)\varphi\right) \end{pmatrix}, \quad \varphi \geq 0.$$

Die entstehende Rollkurve ist bekannt unter dem Namen *Hypozykloide*.

Aufgabe 6.27:

Skizzieren Sie die ebene Kurve C mit der Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = 2 \begin{pmatrix} -\frac{t}{2\pi} \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

und berechnen Sie ihre Bogenlänge.

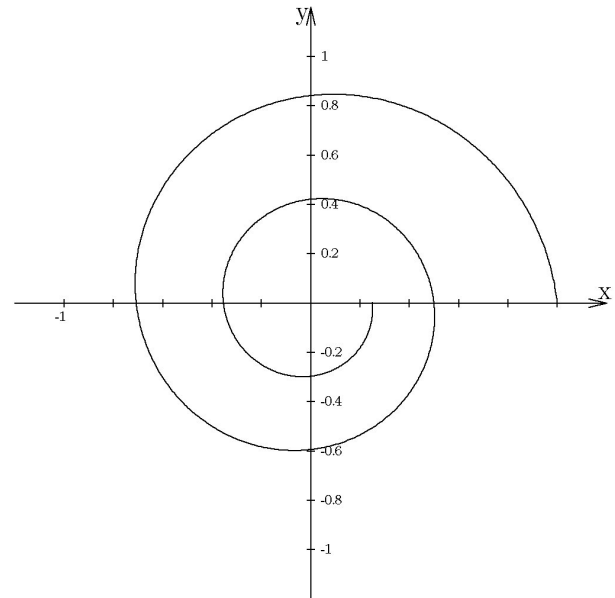
Lösung 6.27:

Kurve C in Polarkoordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= 2 \begin{pmatrix} -\frac{\varphi}{2\pi} \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= e^{\left(-\frac{\ln 2}{2\pi} \cdot \varphi\right)}, \quad 0 \leq \varphi \leq 4\pi. \end{aligned}$$

Bogenlänge:

$$s = \int_0^{4\pi} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi$$



Aufgabe 6.27):

Teilbogen einer logarithmischen Spirale

$$\begin{aligned} &= \int_0^{4\pi} \sqrt{e^{\left(-\frac{\ln 2}{\pi} \cdot \varphi\right)} + \left(-\frac{\ln 2}{2\pi}\right)^2 \cdot e^{\left(-\frac{\ln 2}{\pi} \cdot \varphi\right)}} d\varphi \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\ln 2}{2\pi}\right)^2} \cdot \int_0^{4\pi} e^{\left(-\frac{\ln 2}{2\pi} \cdot \varphi\right)} d\varphi \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\ln 2}{2\pi}\right)^2} \cdot \left(-\frac{2\pi}{\ln 2}\right) \cdot e^{\left(-\frac{\ln 2}{2\pi} \cdot \varphi\right)} \Bigg|_0^{4\pi} \\ &= \frac{\sqrt{4\pi^2 + \ln^2 2}}{\ln 2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3 \cdot \sqrt{4\pi^2 + \ln^2 2}}{4 \cdot \ln 2} \approx 6,84. \end{aligned}$$

Aufgabe 6.28:

Die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ 2-t \end{pmatrix}$, $t > 0$ schließt im 1. Quadranten der (x,y)-Ebene mit den Koordinatenachsen ein Gebiet G ein. Berechnen Sie Umfang und Inhalt von G .

Lösung 6.28:

$$\mathcal{C} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ 2-t \end{pmatrix}, \quad t > 0.$$

Berechnung der Schnittpunkte $(x_0, 0)$ und $(0, y_0)$ der Kurve $\mathcal{C}$ mit den Koordinatenachsen:

$$\begin{aligned} y = 2 - t = 0 &\implies t = 2 \implies x_0 = \ln(2), \\ x = \ln(t) = 0 &\implies t = 1 \implies y_0 = 1. \end{aligned}$$

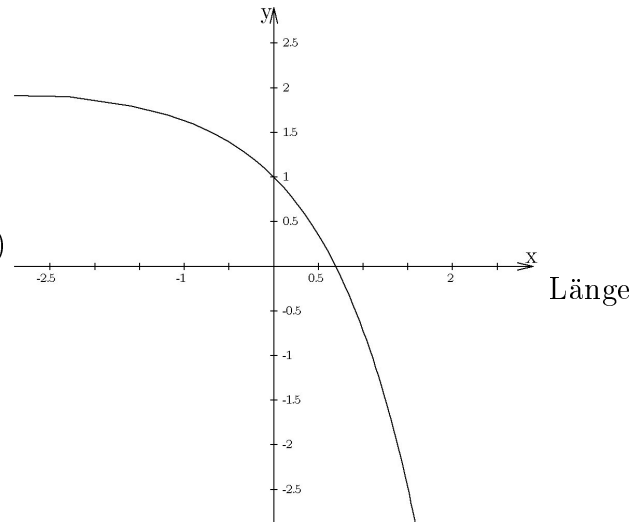


Bild zu Aufgabe 6.28:

des Kurvenbogens $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ 2-t \end{pmatrix}$, $1 \leq t \leq 2$:

$$\begin{aligned} s &= \int_1^2 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + (-1)^2} dt = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} dt = \left[\sqrt{1+t^2} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}\right) \right]_1^2 \\ &\quad \text{(vgl. z.B. Merziger, Formeln + Hilfen, S. 96, Integral 68 mit } a=1 \text{ und } t \text{ statt } x) \\ &= \sqrt{5} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Umfang des Gebietes G , das von der Kurve $\mathcal{C}$ und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird:

$$U = s + \ln(2) + 1 = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{10} + \sqrt{5} - \sqrt{2} - 1) \approx \underline{\underline{2,915}}.$$

Inhalt des eingeschlossenen Gebietes G :

$$\begin{aligned} F(G) &= \left| \frac{1}{2} \int_1^2 (x \cdot \dot{y} - \dot{x} \cdot y) dt \right| = \left| \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\ln(t) \cdot (-1) - \frac{1}{t} \cdot (2-t) \right) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{t} - \ln(t) \right) dt \right| = \left| \left[t - \left(1 + \frac{t}{2}\right) \cdot \ln(t) \right]_1^2 \right| = \ln(4) - 1 \approx \underline{\underline{0,386}}. \end{aligned}$$

Polarkoordinaten

Aufgabe 6.29:

Durch die Polarkoordinatendarstellung $r = a \cdot (1 + \sin(\varphi))$, wobei $0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi$, $a > 0$, ist eine Schar geschlossener ebener Kurven gegeben.

Bestimmen Sie den Scharparameter a so, dass die von der zugehörigen Kurve eingeschlossene Fläche den Inhalt $2 \cdot \pi$ hat, und skizzieren Sie diese Kurve.

Lösung Aufgabe 6.29:

$$r = a \cdot (1 + \sin(\varphi)), \quad 0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi, \quad a > 0.$$

Wegen $r(2 \cdot \pi) = a = r(0)$ sind alle Kurven der Schar geschlossen. Die zum Scharparameter a gehörige Kurve umschließt eine Fläche vom Inhalt

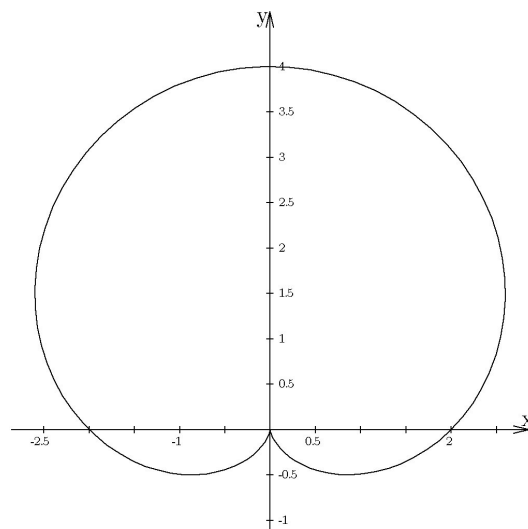
$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} r^2 \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \int_0^{2\pi} \{ (1 + 2 \cdot \sin(\varphi) + (\sin(\varphi))^2) \} \cdot d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left[\varphi - 2 \cdot \cos(\varphi) + \frac{1}{2} \cdot \varphi - \frac{1}{4} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot (2 \cdot \pi - 2 + \pi + 2) = \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot a^2. \\ F &= 2 \cdot \pi \iff \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot a^2 = 2 \cdot \pi \iff a = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \quad (\text{wegen } a > 0). \end{aligned}$$

Wertetabelle und Skizze

für die Kurve

$$r(\varphi) = \frac{2}{3} \sqrt{3} (1 + \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi:$$

φ	r
0	$\frac{2}{3} \sqrt{3} \approx 1,155$
$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3} \approx 1,732$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \sqrt{3} + 1 \approx 2,155$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4}{3} \sqrt{3} \approx 2,309$
$\frac{7 \cdot \pi}{6}$	$\frac{1}{3} \sqrt{3} \approx 0,577$
$\frac{4 \cdot \pi}{3}$	$\frac{2}{3} \sqrt{3} - 1 \approx 0,155$
$\frac{3 \cdot \pi}{2}$	0



Aufgabe 6.29: Kardioide

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot (1 + \sin(\varphi)) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} r\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) &= r\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \\ r\left(\frac{3\pi}{2} + \varphi\right) &= r\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Die Kurve ist bekannt unter dem Namen *Kardioide* (*Herzkurve*).