Stand: 18. August 2008
http://www.iazd.uni-hannover.de/∼windelberg/teach/ing

7 Anwendungen zweidimensionaler Differentialrechnung

Unbestimmte Ausdrücke

$$\frac{[0]}{[0]} \qquad \frac{[\infty]}{[\infty]} \qquad [0\cdot\infty] \qquad [0^0] \qquad [1^\infty] \qquad [\infty^0] \qquad [\infty-\infty]$$

Regel von l'Hospital:
Sind f und g in einer Umgebung von x_0 differenzierbar und ist

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{[0]}{[0]} \\ \frac{[\infty]}{[\infty]} \end{cases} \qquad \text{dann ist } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aufgabe 7.1: Ermitteln Sie die folgenden Grenzwerte, soweit möglich mit den *Regeln von l'HOSPITAL*:

Aufgabe 7.1.1: $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos(x)}{x-\pi/2}$

Lösung: <u>Fall $\left[\frac{0}{0}\right]$:</u> $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos(x)}{x-\pi/2} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=\!=} \lim_{x\to\pi/2}\frac{-\sin(x)}{1} = -1.$

Aufgabe 7.1.2: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x},$

Lösung: <u>Fall $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:</u> $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot x^2}{e^x} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{6\cdot x}{e^x} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x} = 0$

Aufgabe 7.1.3: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(x))^2}{\sqrt{x}},$

Lösung von Aufgabe 7.1.3: Fall $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(x))^2}{\sqrt{x}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot\ln(x)}{\sqrt{x}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{8}{\sqrt{x}} = 0$$

Aufgabe 7.1.4: $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan(x)}{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

Lösung von Aufgabe 7.1.4: Fall $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan(x)}{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=\!=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos^2(x)} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=\!=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{-2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)} = -\infty$$

Aufgabe 7.1.5: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)$

Lösung von Aufgabe 7.1.5: Fall $[0\cdot\infty]$

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) \overset{[0\cdot\infty]}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

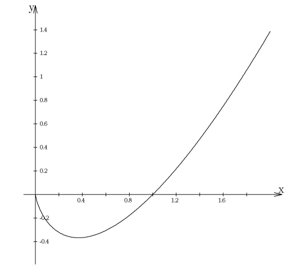


Bild zu Aufgabe 7.1.5:
$x\cdot\ln(x) \qquad x_0 = 0^+$

Aufgabe 7.2: Skizzieren Sie die folgende Kurve in der Umgebung des Punktes x_0 und berechnen Sie die folgenden Grenzwerte - gegebenenfalls nach der Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \arcsin(2\cdot x^2)\cdot\cot(3\cdot x^2)$$

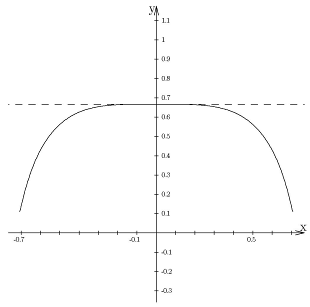


Bild zu Aufgabe 7.2:
$\arcsin(2\cdot x^2)\cdot\cot(3\cdot x^2)$
$x_0 = 0$

Lösung zu Aufgabe 7.2: Fall $[0\cdot\infty]$
Es ist

$$\lim_{x\to 0} \arcsin(2\cdot x^2)\cdot\cot(3\cdot x^2)$$

$$\overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2\cdot x^2)}{\tan(3\cdot x^2)}$$

$$\overset{\frac{[0]}{[0]}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4\cdot x}{\sqrt{1-4\cdot x^2}}}{\frac{6\cdot x}{\cos^2(3\cdot x^2)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\cos^2(3\cdot x^2)}{3\cdot\sqrt{1-4\cdot x^2}} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 7.3:
Skizzieren Sie die folgende Kurve in der Umgebung des Punktes x_0 und berechnen Sie die folgenden Grenzwerte - gegebenenfalls nach der Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right) \text{ für } x_0 = 0$$

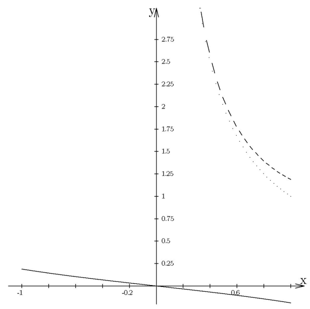


Bild zu Aufgabe 7.3:
$\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$ $x_0 = 0^+$

Lösung von Aufgabe 7.3: Fall $[\infty - \infty]$:
Es ist

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$$

$$\overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x) - x}{x\cdot\sin(x)} \overset{\frac{[0]}{[0]}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x\cdot\cos(x)}$$

$$\overset{\frac{[0]}{[0]}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin(x)}{2\cdot\cos(x) - x\cdot\sin(x)} = 0$$

Aufgabe 7.4: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

Lösung von Aufgabe 7.4: Fall $[0^0]$
Da hier x im Exponenten auftritt, ist die Regel

$$\heartsuit = e^{\ln(\heartsuit)}$$

anzuwenden: Es ist $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x \overset{[0^0]}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln(x^x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\spadesuit}$,
wobei
$\spadesuit = \lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) \overset{7.1.5}{=} 1$ ist.

Aufgabe 7.5: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Lösung von Aufgabe 7.5: Fall $[1^\infty]$:

Wegen $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+1/x)}$ wird zunächst der Limes des Exponenten untersucht:

Es ist $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+1/x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+1/x)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{(1+1/x)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+1/x} = 1$

Also erhält man $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$ (das war wegen $\lim\limits_{n\to\infty} (1+1/n)^n = e$ zu vermuten!).

Aufgabe 7.6: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^x + e^{(3\cdot x)}\right)^{\frac{1}{2\cdot x}}$

Lösung von Aufgabe 7.6: Fall $[\infty^0]$

Potenzregeln und logarithmisches Rechnen: $$\spadesuit = e^{\ln(\spadesuit)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(e^x + e^{(3\cdot x)}\right)^{\frac{1}{2\cdot x}} \overset{[\infty^0]}{=} e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(e^x + e^{(3\cdot x)}\right)}{2\cdot x}} = e^{\spadesuit} \text{ wobei}$$

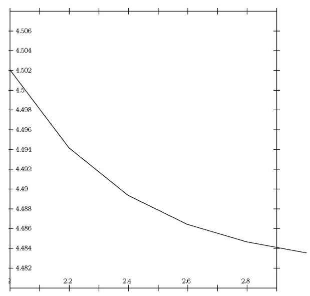


Bild zu Aufgabe 7.6: $\left(e^x + e^{(3\cdot x)}\right)^{\frac{1}{2\cdot x}}$ $x_0 = \infty$

$$\begin{aligned}
\spadesuit &:= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(e^x + e^{(3\cdot x)}\right)}{2\cdot x} \\
&\overset{\frac{[\infty]}{[\infty]}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x + 3\cdot e^{(3\cdot x)}}{e^x + e^{(3\cdot x)}}}{2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{(-2\cdot x)} + 3}{(e^{(-2\cdot x)} + 1)\cdot 2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

also

$$\lim_{x\to\infty} \left(e^x + e^{(3\cdot x)}\right)^{\frac{1}{2\cdot x}} \approx 4.48$$

Geschosszahl nach der Niedersächsischen Bauordnung (NBauO)
§ 2 (6): *ein Vollgeschoß ist ein Geschoß, ... dessen Deckenoberkante im Mittel mehr als 1,60 m über der Geländeoberfläche liegt.*
Daher ist zu entscheiden, in welcher Höhe eine ebene Fläche (nämlich die Deckenoberkante) „über" der Geländeoberfläche liegt.

juristisches Mittel: Ist der Grundriss eines Hauses ein Rechteck, so wird nach juristischer Sicht an den vier Eckpunkten A, B, C und D des Grundrisses jeweils die Höhe h_A, h_B, h_C bzw. h_D der Deckenoberkante über der Geländeoberfläche gemessen. $m_j := (h_A + h_B + h_C + h_D)/4$ ist dann das juristische Mittel.

Aufgabe 7.7: Mittelwertbildung in der NBauO

Bestimmen Sie die Höhe der Deckenoberkante über der Geländeoberfläche
7.7a) durch das juristische Mittel m_j und
7.7b) durch das arithmetische Mittel m_a
für die folgende Geometrie von Deckenoberkante und Gelände:
Eckpunkte $A := (0, 5, 1)$, $B := (0, 0, 1)$, $C := (20, 0, 1)$ und $D : (20, 5, 1)$.

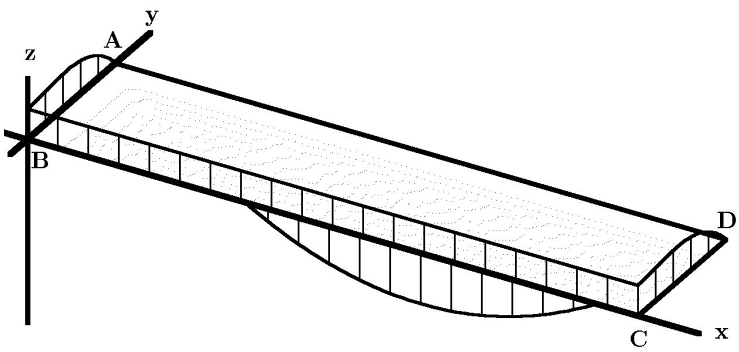
Geländehöhe an den Rändern des Grundrisses:

$\overline{AB}$ $x = 0$ und
$$z = 1 + \frac{2}{25} \cdot y^2 - \frac{3}{125} \cdot y^3$$
für $0 \leq y \leq 5$

$\overline{AD}$ $y = 5$ und
$$z = \frac{1}{20} \cdot (x - 10)^2 - 5$$
für $0 \leq x \leq 20$

$\overline{CD}$ $x = 20$ und
$$z = 1 + \frac{2}{25} \cdot y^2 - \frac{3}{125} \cdot y^3$$
für $0 \leq y \leq 5$

$\overline{BC}$ $y = 0$ und $z = 1$ für $0 \leq x \leq 20$



Aufgabe 7.7): Grundriss und Geländehöhen

(alle Angaben in m).

Lösung 7.7a)
Die Geländehöhen g_A, g_B, g_C und g_D an den vier Eckpunkten sind aus den vier Kurven der Geländehöhe an den Rändern zu bestimmen: Es sind $g_A = 0$, $g_B = 1$, $g_C = 1$ und $g_D = 0$. Die Höhe d der Deckenoberkante beträgt $d = 1$. Folglich ist die Höhe der Deckenoberkante über dem Gelände an den vier Eckpunkten
$h_A = d - g_A = 1$, $h_B = d - g_B = 0$, $h_C = d - g_C = 1$ und $h_D = d - g_D = 0$
und folglich
$$\boldsymbol{m_j = 0.5}$$
d.h. bei dieser Berechnung ist das Geschoss <u>kein</u> Vollgeschoss im Sinne der NBauO.

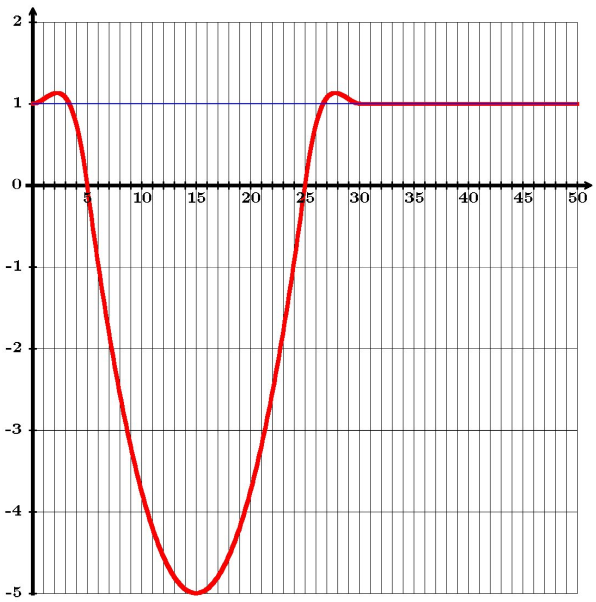
Lösung 7.7b)

Beginnend im Punkt B entsteht folgende Abwicklung der Geländehöhen:

$B \to A$: Im Intervall $0 \le x \le 5$ ist
$z = f(x) = 1 + \frac{2}{25} \cdot x^2 - \frac{3}{125} \cdot x^3$.
Damit beträgt in diesem 5 m langen Intervall der Flächeninhalt
$$F_{BA} = \int_{x=0}^{x=5} z\,dx = \frac{55}{12}$$
und die mittlere Geländehöhe
$$\frac{1}{5} \cdot F_{BA} = \frac{11}{12}$$

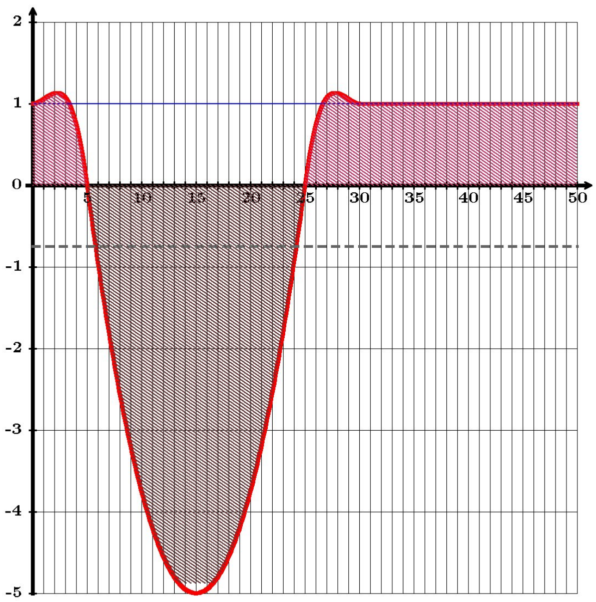
$A \to D$: Im Intervall $5 \le x \le 25$ ist
$z = f(x) = \frac{1}{20} \cdot (x - 15)^2 - 5$.
Damit beträgt in diesem 20 m langen Intervall der Flächeninhalt
$$F_{AD} = \int_{x=5}^{x=25} z\,dx = -\frac{200}{3}$$
und die mittlere Geländehöhe
$$\frac{1}{20} \cdot F_{AD} = -\frac{10}{3}$$

$D \to C$: Im Intervall $25 \le x \le 30$ ist der Flächenhalt $F_{DC} = F_{BA}$.

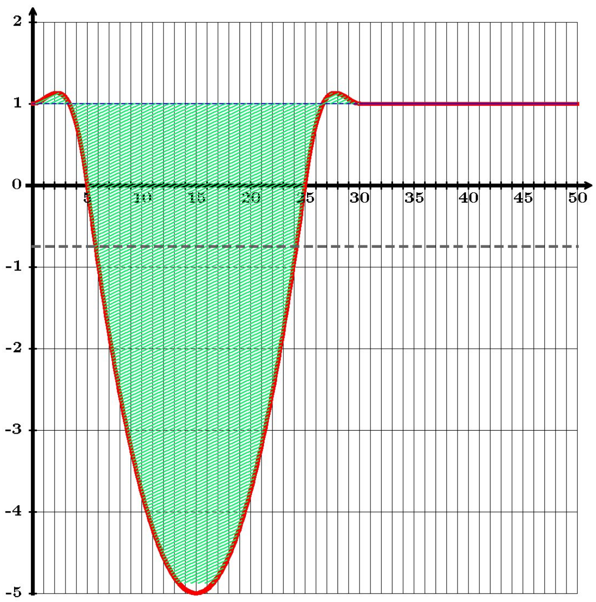


Aufgabe 7.7: Geländehöhe längs des Grundrisses

$C \to B$: es ist $30 \le x \le 50$, und in diesem Intervall ist die Höhenlinie konstant: $f(x) = 1$. Damit beträgt in diesem 20 m langen Intervall der Flächeninhalt
$F_{CB} = 20 \cdot 1 = 20$
und die mittlere Geländehöhe 1.



Integral als Fläche zwischen Kurve und x-Achse



Differenz zwischen Gelände und Deckenoberkante

Aufgabe 7.7: Geländehöhe längs des Grundrisses

Der gesamte Flächeninhalt F_{ges} beträgt also
$F_{ges} = F_{BA} + F_{AD} + F_{DC} + F_{CB} = \frac{55}{12} - \frac{200}{3} + \frac{55}{12} + 20 = -\frac{75}{2}.$

Der Mittelwert des Flächeninhalts ist dann $mitt\,(F_{ges}) = \frac{1}{50} \cdot \left(-\frac{75}{2}\right) = -\frac{3}{4}.$

Damit liegt die Deckenoberkante der Kellerdecke im Mittel um

$$1 - (-\frac{3}{4}) = 1.75\,m$$

über der Geländeoberfläche.

d.h. bei mathematischer Mittelwertbildung ist das Geschoss ein Vollgeschoss im Sinne der NBauO.

Zur Bestimmung des arithmetischen Mittels g der Geländehöhen kann auch wie folgt stückweise integriert werden:

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{50-0} \cdot \int_0^{50} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{50} \cdot \left(\int_0^5 f(x)\,dx + \int_5^{25} f(x)\,dx + \int_{25}^{30} f(x)\,dx + \int_{30}^{50} f(x)\,dx\right) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} g = \frac{1}{50} \cdot (\quad & \left[x + \frac{2}{3 \cdot 25} \cdot x^3 - \frac{3}{4 \cdot 125} \cdot x^4\right]_{x=0}^{x=5} \\ + \quad & \left[\frac{1}{3 \cdot 20} \cdot (x-15)^3 - 5 \cdot x\right]_{x=5}^{x=25} \\ + \quad & \left[\frac{1}{2} \cdot (x-25)^2 - \frac{7}{3 \cdot 25} \cdot (x-25)^3 + \frac{3}{4 \cdot 125} \cdot (x-25)^4\right]_{x=25}^{x=30} \\ + \quad & [x]_{x=30}^{x=50}) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{50} \cdot (\left[5 + \frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{3}{4} \cdot 5\right] + \left[\frac{1}{3 \cdot 20} \cdot (10^3 - (-10)^3) - 5 \cdot 20\right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{2} \cdot 5^2 - \frac{7}{3} \cdot 5 + \frac{3}{4} \cdot 5\right] + [20]) \\ &= \frac{1}{50} \cdot (5 + \frac{10}{3} - \frac{15}{4} + \frac{2\,000}{3 \cdot 20} - 100 + \frac{25}{2} - \frac{35}{3} + \frac{15}{4} + 20) \\ &= \frac{1}{50} \cdot (5 - 100 + 20 + \frac{25}{2} + \frac{10}{3} + \frac{100}{3} - \frac{35}{3} - \frac{15}{4} + \frac{15}{4}) \\ &= \frac{1}{50} \cdot (-75 + \frac{25}{2} + \frac{75}{3}) = \frac{1}{50} \cdot \frac{-450 + 75 + 150}{6} = \frac{-225}{300} = -0.75 \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\boldsymbol{m_a = d - g = 1.75}$$