



8 Blockbild und Höhenlinien

Veranschaulichen Sie sich die durch die Funktion

$$z = f(x, y) = \frac{y}{1 + x^2}$$

beschriebene Fläche im Bereich $B := \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, \}$

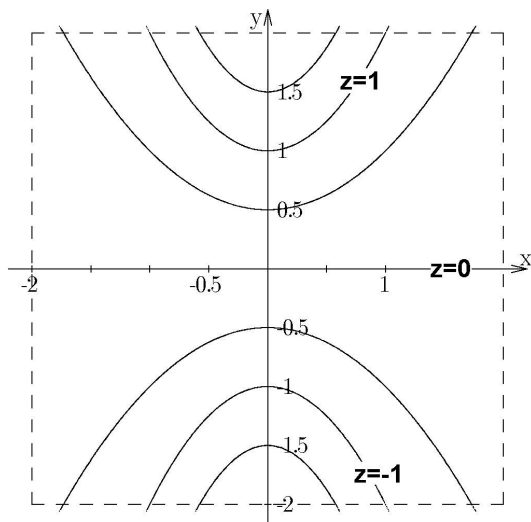
Aufgabe 8.1a) Veranschaulichung der Fläche durch eine Höhenkarte mit den Höhen $z = \pm \frac{1}{2}$, $z = \pm 1$ und $z = \pm \frac{3}{2}$

Lösung von Aufgabe 8.1a):

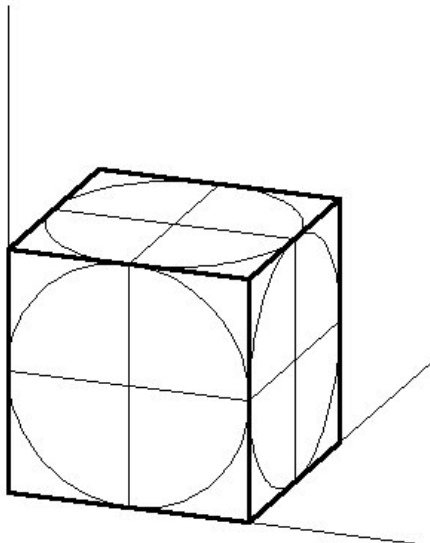
Die Höhenlinien ergeben sich aus der Bedingung

$$z = \text{konstant}$$

Höhe	definierende Gleichung	Beschreibung Normalform
$z = c = 0$	$y = 0$	x -Achse
$z = c = \frac{1}{2}$	$2 \cdot y = 1 + x^2$	Parabel $x^2 = 2 \cdot (y - \frac{1}{2})$: Scheitel in $(0, \frac{1}{2})$, Öffnung $p = 2$
$z = c = 1$	$y = 1 + x^2$	Parabel $x^2 = 1 \cdot (y - 1)$: Scheitel in $(0, 1)$, Öffnung $p = 1$
$z = c = \frac{3}{2}$	$\frac{2}{3} \cdot y = 1 + x^2$	Parabel $x^2 = \frac{2}{3} \cdot (y - \frac{3}{2})$: Scheitel in $(0, \frac{3}{2})$, Öffnung $p = \frac{2}{3}$
$z = c = -\frac{1}{2}$	$2 \cdot y = -(1 + x^2)$	Parabel $x^2 = -2 \cdot (y + \frac{1}{2})$: Scheitel in $(0, -\frac{1}{2})$, Öffnung $p = -2$
$z = c = -1$	$y = -(1 + x^2)$	Parabel $x^2 = -1 \cdot (y + 1)$: Scheitel in $(0, -1)$, Öffnung $p = -1$
$z = c = -\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3} \cdot y = -(1 + x^2)$	Parabel $x^2 = -\frac{2}{3} \cdot (y + \frac{3}{2})$: Scheitel in $(0, -\frac{3}{2})$, Öffnung $p = -\frac{2}{3}$



Aufgabe 8.1a): Höhenlinien

Aufgabe 8.1b) Veranschaulichung der Fläche durch ein Blockbild**Axonometrische
Darstellung**

Aufgabe 8.1b): Darstellung durch ein Blockbild

Es ist daher folgende Projektion f notwendig:

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \cdot \cos(\alpha) + \frac{y}{2} \cdot \cos(\beta) \\ x \cdot \sin(\alpha) + \frac{y}{2} \cdot \sin(\beta) + z \end{pmatrix}$$

Bei der hier gewählten axonometrischen Darstellung (siehe nebenstehende Darstellung eines Würfels) werden folgende Winkel verwendet:

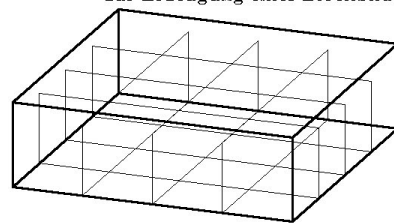
Die x -Achse wird um $\alpha = -7^\circ 10'$ um $(0, 0, 0)$ in der x, z -Ebene gedreht,

die y -Achse wird auf die Hälfte gekürzt und im Winkel von $\beta = 41^\circ 25'$ gegenüber der positiven x -Achse gezeichnet.

die z -Achse behält ihre Richtung und Länge.

Ein „Blockbild“ kann als ein Gipsmodell interpretiert werden, in dem die Geometrie durch „Spanten“ in einen Rahmen mit den Abmessungen des Bereiches B gegeben wird (siehe Bild unten).

Spanten zur Erzeugung eines Blockbildes



Aufgabe 8.1b): Lage der Spanten zur Erzeugung eines Blockbildes

Lösung von Aufgabe 8.1b):

Es werden Spanten eingezeichnet

- a) für $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$. Für jede Spante und für den Rand wird jeweils die Höhe $z = f(x_i, y)$ mit $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $-2 \leq y \leq 2$ berechnet.

$$z(x_0, y) = f(-2, y) = \frac{y}{5}$$

$$z(x_1, y) = f(-1, y) = \frac{y}{2}$$

$$z(x_2, y) = f(0, y) = y$$

$$z(x_3, y) = f(1, y) = \frac{y}{2}$$

$$z(x_4, y) = f(2, y) = \frac{y}{5}$$

- b) für $y_1 = -1$, $y_2 = 0$ und $y_3 = 1$. Für jede Spante und den Rand wird jeweils die Höhe $z = f(x, y_i)$ mit $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $-2 \leq x \leq 2$ berechnet.

$$z(x, y_0) = f(x, -2) = \frac{-2}{1+x^2}$$

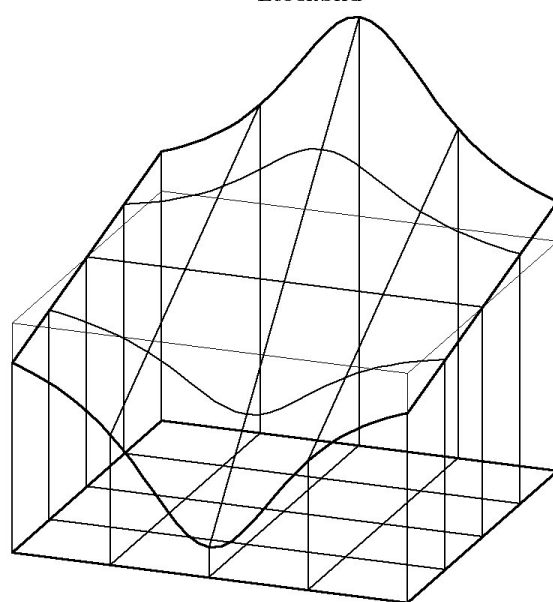
$$z(x, y_1) = f(x, -1) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$z(x, y_2) = f(x, 0) = 0$$

$$z(x, y_3) = f(x, 1) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$z(x, y_4) = f(x, 2) = \frac{2}{1+x^2}$$

Blockbild

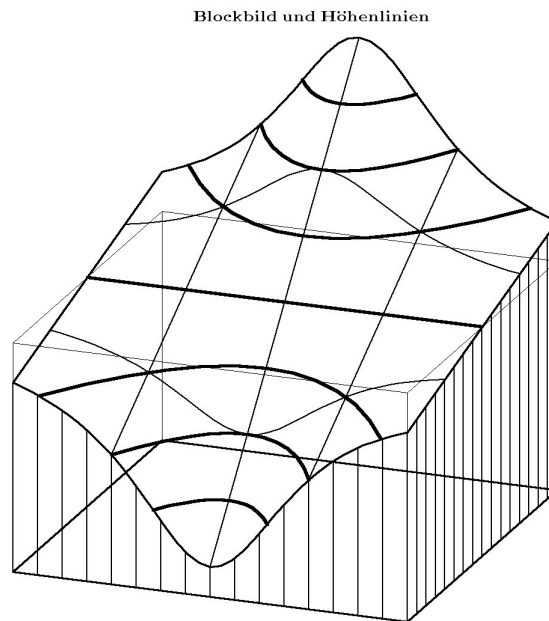


Aufgabe 8.1b): Blockbild

Aufgabe 8.1c)

Zeichnen Sie in das Blockbild (b) die Höhenlinien aus (a) ein.

Lösung:

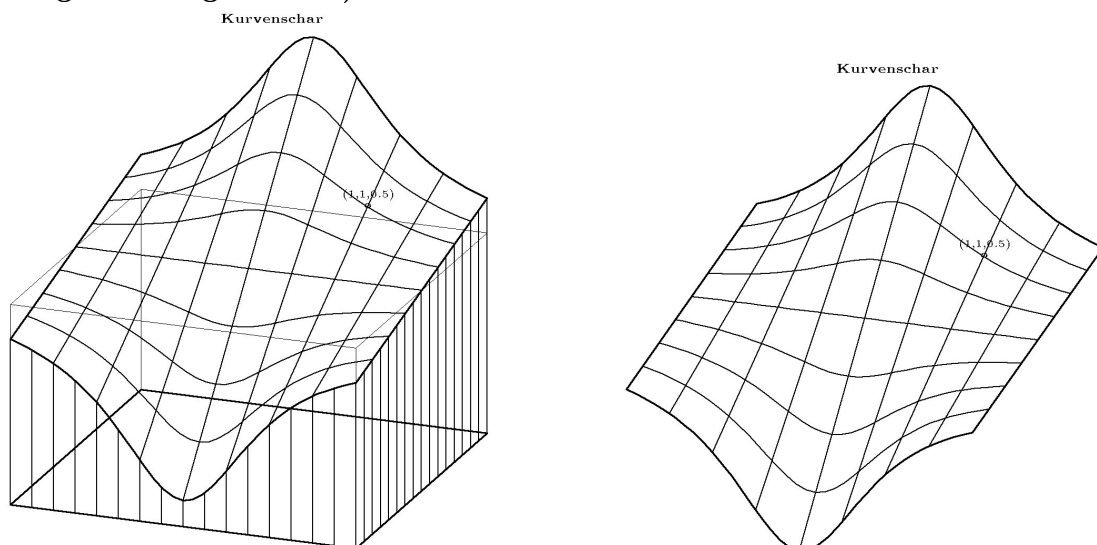


Aufgabe 8.1c): Blockbild und Höhenlinien

Aufgabe 8.1d)

Erzeugen Sie die Fläche aus Kurvenscharen $z = f(x, y_i)$ mit $y_i = -2 + 0.5 \cdot i$ ($i = 0, \dots, 8$) und den Kurvenscharen $z = f(x_i, y)$ $x_i = -2 + 0.5 \cdot i$ ($i = 0, \dots, 8$). Kennzeichnen Sie den Punkt mit den Koordinaten $(1, 1, 0.5)$.

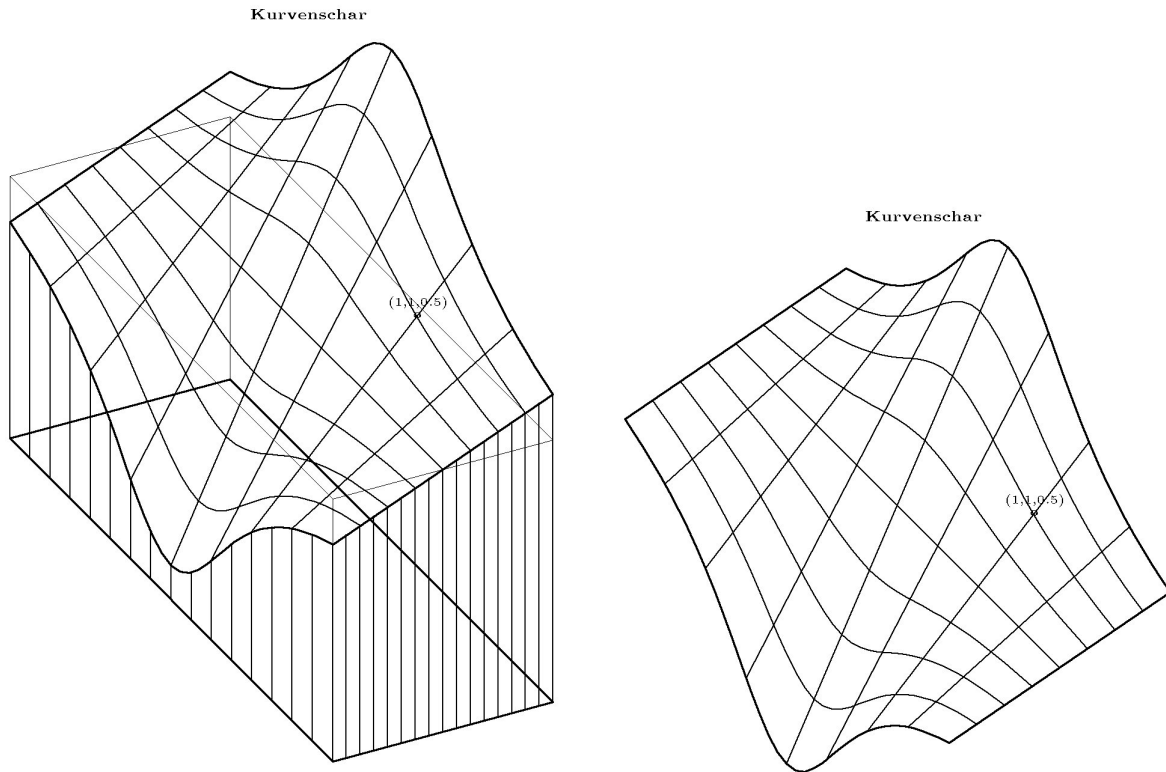
Lösung von Aufgabe 8.1d)



Aufgabe 8.1d): Erzeugende Kurvenscharen bei $\alpha = -7^\circ 10'$ und $\beta = 41^\circ 25'$

Aufgabe 8.1e)

Erzeugen Sie die Fläche aus Kurvenscharen $z = f(x, y_i)$ mit $y_i = -2 + 0.5 \cdot i$ ($i = 0, \dots, 8$) und den Kurvenscharen $z = f(x_i, y)$ $x_i = -2 + 0.5 \cdot i$ ($i = 0, \dots, 8$) (wie in Teil d)), aber wählen Sie zur axonometrischen Darstellung die Winkel $\alpha = -45^\circ$ und $\beta = 15^\circ$. Kennzeichnen Sie den Punkt mit den Koordinaten $(1, 1, 0.5)$.

Lösung 8.1e):

Aufgabe 8.1e): Erzeugende Kurvenscharen bei $\alpha = -45^\circ$ und $\beta = 15^\circ$

Aufgabe 8.1f): Tangentialebene

Bestimmen Sie die Tangentialebene im Punkt $(1, 1)$ und zeichnen Sie diese in eine der Zeichnungen d) oder e) ein.

Versuchen Sie - zeichnerisch - herauszufinden, ob bzw. wie die Tangentialebene die Fläche im Bereich $B_1 := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, \}$ schneidet.

Lösung von Aufgabe 8.1f):

Es ist

$$f_x = \frac{-2 \cdot x \cdot y}{(1 + x^2)^2} \quad f_y = \frac{1}{1 + x^2}$$

Hier ist

$$f(1, 1) = \frac{1}{2} \quad f_x(1, 1) = \frac{-2}{(1 + 1^2)^2} = -\frac{1}{2} \quad f_y(1, 1) = \frac{1}{2}$$

und damit für $(x_0, y_0) = (1, 1)$

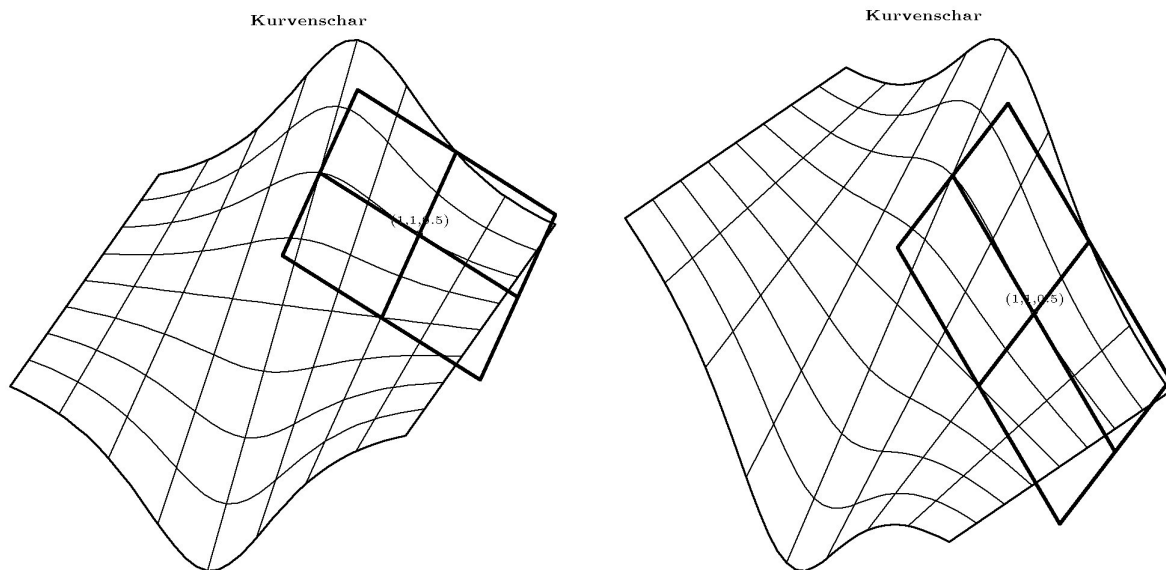
$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (x - 1) + \frac{1}{2} \cdot (y - 1)$$

oder

$$2 \cdot z = 1 - (x - 1) + (y - 1) = 1 - x + y \quad \text{oder} \quad x - y + 2 \cdot z = 1$$

Damit lautet hier die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(1, 1)$ an die Fläche $z = f(x, y)$

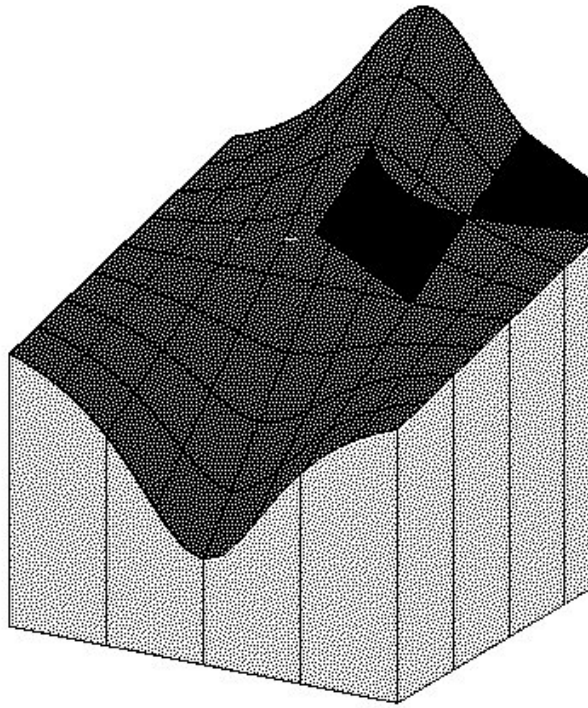
$$T = \{(x, y, z) \mid x - y + 2 \cdot z = 1\}$$



Aufgabe 8.1f): Tangentialebene im Punkt $(1, 1)$ an die Fläche $z = f(x, y)$

links: $\alpha = -45^\circ$ und $\beta = 15^\circ$

rechts: $\alpha = -45^\circ$ und $\beta = 15^\circ$



Aufgabe 8.1f): Tangentialebene im Punkt $(1, 1)$ an die Fläche $z = f(x, y)$
mit Schnittlinien zwischen Fläche und Tangentialebene

Natürlich kann die Schnittlinie zwischen Fläche und Tangentialebene bestimmt werden: Es muss gelten

$$2 \cdot z = 2 \cdot \frac{y}{1+x^2} = 1 - x + y \quad \text{oder} \quad 2 \cdot y = (1+x^2) \cdot (1-x+y) = 1 - x + y + x^2 - x^3 + x^2 \cdot y$$

und damit

$$y \cdot (1 - x^2) = 1 - x + x^2 - x^3 \quad \text{oder} \quad y = \frac{1 - x + x^2 - x^3}{1 - x^2}$$

Folglich ist die Schnittkurve S bestimmt durch

$$S = \left\{ (x, y, z); x \in \mathbb{R}; y = \frac{1 - x + x^2 - x^3}{1 - x^2}; z = \frac{1 - x + y}{2} \right\}$$

Gradient

Falls für einen Punkt (x_0, y_0) einer Funktion $f(x, y)$ sowohl $f(x_0, y_0)$ als auch die partiellen Ableitungen $f_x(x_0, y_0)$ und $f_y(x_0, y_0)$ definiert sind, so heißt

$$\text{grad } f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{der } \mathbf{Gradient} \text{ von } f$$

Aufgabe 8.1g) (Gradient):

Berechnen Sie für die Funktion $z = f(x, y) = \frac{y}{1+x^2}$ den Gradient im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

- Zeichnen Sie diesen Gradienten in die Höhenkarte dieser Fläche ein (der Gradient in (x_0, y_0) steht senkrecht auf der Höhenlinie durch diesen Punkt)
- Zeichnen Sie diesen Gradienten in das Blockbild dieser Fläche ein (der Gradient in (x_0, y_0, z_0) zeigt in Richtung der maximalen Steigung)

Lösung von Aufgabe 8.1g):

Es ist nach 8.1f)

$$f(1, 1) = \frac{1}{2} \quad f_x(1, 1) = \frac{-2}{(1+1^2)^2} = -\frac{1}{2} \quad f_y(1, 1) = \frac{1}{2}$$

Also ist der Gradient

$$\text{grad } f(1, 1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

und der Gradient hat die Steigung $m_{\text{gradient}} = -1$.

Andererseits geht durch den Punkt $(1, 1)$ die Höhenlinie zur Höhe $z = \frac{1}{2}$. Die Höhenlinie hat nach 8.1a) die Gleichung

$$y = \frac{1}{2} \cdot (1 + x^2)$$

Damit kann die Steigung dieser Kurve im Punkt $(1, 1)$ berechnet werden:

$$y' = x \quad , \text{ also } y'_{(x=1)} = m_{\text{Tangente}} = 1$$

Auf der Tangente steht also der Gradient senkrecht, denn es ist

$$m_{\text{Tangente}} \cdot m_{\text{gradient}} = -1$$

relative Extremwerte

3D: Notwendige Bedingung für das Auftreten eines relativen Extremwertes:

Es seien $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn der Graph von $z = f(x, y)$ in (x_e, y_e) ein relatives Extremum besitzt, so ist

$$f_x(x_e, y_e) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_e, y_e) = 0 \quad (1)$$

3D: Hinreichende Bedingung für das Auftreten eines relativen Extremwertes:

Es ist zunächst die Determinante

$$D(x, y) := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \quad (2)$$

zu berechnen. Dann ist für jedes mögliche Extremum (x_e, y_e) der Wert $D(x_e, y_e)$ zu berechnen:

- wenn $D(x_e, y_e) > 0$ und $f_{xx} < 0$, dann besitzt die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt (x_e, y_e) ein relatives Maximum
- wenn $D(x_e, y_e) > 0$ und $f_{xx} > 0$, dann besitzt die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt (x_e, y_e) ein relatives Minimum
- wenn $D(x_e, y_e) < 0$, dann besitzt die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt (x_e, y_e) ein kein Extremum (es liegt ein Sattelpunkt vor)
- wenn $D(x_e, y_e) = 0$, dann ist keine Aussage über ein Extremum möglich

Aufgabe 8.1h) (Extremwerte):

Bestimmen Sie die (relativen und absoluten) Extremwerte von $z = f(x, y)$.

Lösung von Aufgabe 8.1h):

Nach 8.1f) ist

$$f_x = \frac{-2 \cdot x \cdot y}{(1 + x^2)^2} \quad \text{und} \quad f_y = \frac{1}{1 + x^2}$$

Aus der notwendigen Bedingung folgt

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0 \quad \text{wegen} \quad f_x = 0$$

Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass weder die x -Achse noch die y -Achse ein relatives Extremum bildet.

Ein absolutes Minimum tritt auf dem Rand im Punkt $(0, -2)$ auf.

Ein absolutes Maximum tritt auf dem Rand im Punkt $(0, 2)$ auf.

Zur hinreichenden Bedingung:

$$\text{Es ist} \quad f_{xx} = \frac{8 \cdot x^2 \cdot y}{(1 + x^2)^3} - \frac{2 \cdot y}{(1 + x^2)^2} \quad \text{und} \quad f_{xy} = \frac{-2 \cdot x}{(1 + x^2)^2} \quad \text{und} \quad f_{yy} = 0$$

und folglich

$$f_{xx}(0, y) = -2 \cdot y \quad \text{und} \quad f_{xy}(0, y) = 0 \quad \text{und} \quad f_{yy}(0, y) = 0$$

$$f_{xx}(x, 0) = 0 \quad \text{und} \quad f_{xy}(x, 0) = \frac{-2 \cdot x}{(1 + x^2)^2} \quad \text{und} \quad f_{yy}(x, 0) = 0$$

also ist

$$D(0, y) = \begin{vmatrix} -2 \cdot y & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad D(x, 0) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{-2 \cdot x}{(1 + x^2)^2} \\ \frac{-2 \cdot x}{(1 + x^2)^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{4 \cdot x^2}{(1 + x^2)^4}$$

Also ist für zwar $(0, y)$ keine Aussage über ein Extremum möglich. Für $(x, 0)$ ist zwar $D(x, 0) > 0$, aber es ist $f_{xx}(x, 0) = 0$.

Aufgabe 8.2:

Veranschaulichen Sie sich die durch die Funktion

$$z = f(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$$

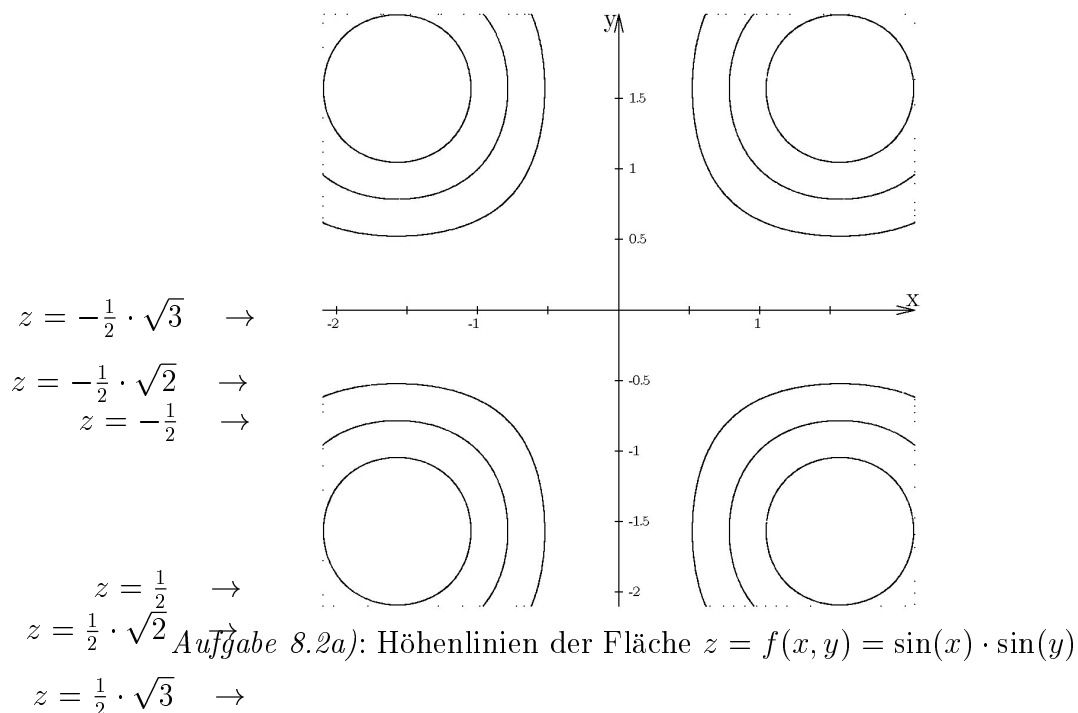
beschriebene Fläche im Bereich $B := \{(x, y) \mid -\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi, \}$

a) durch eine Höhenkarte für die Höhen $z_0 = 0$, $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ und $z_3 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$

Lösung von Aufgabe 8.2a):

Die Gleichung $z = \text{const.} = \sin(x) \cdot \sin(y)$ lässt sich nach y auflösen:

$$y = \arcsin\left(\frac{z}{\sin(x)}\right) \quad \text{und} \quad y = \arcsin\left(-\frac{z}{\sin(x)}\right)$$



Aufgabe 8.2a): Höhenlinien der Fläche $z = f(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$

b) durch ein Blockbild für die zylindrischen Spanten

$$\{(x, y, z); x = \cos(\varphi), y = \sin(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi\} \quad \text{und}$$

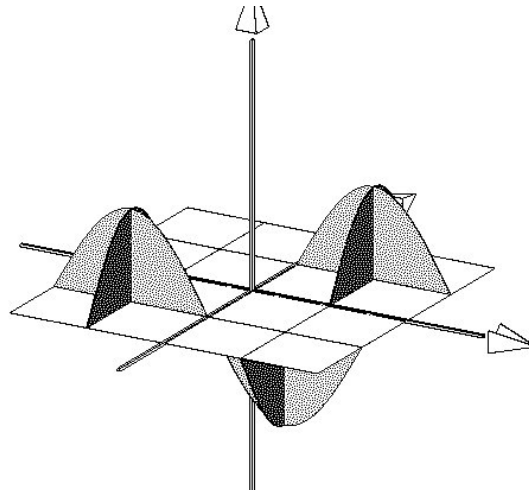
$$\{(x, y, z); x = 2 \cdot \cos(\varphi), y = 2 \cdot \sin(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi\}$$

Zeichnen Sie jeweils die Kurve $z = f(\varphi)$ auf ein Blatt, das

ba) zu einem Zylinder $\{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1\}$

bb) zu einem Zylinder $\{(x, y, z); x^2 + y^2 = 2\}$

geformt werden kann und dann eine Spante des Blockbildes liefert.

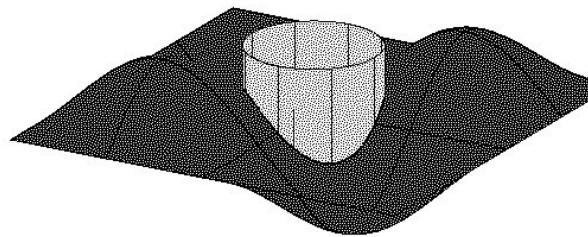
Lösung 8.2b):

Aufgabe 8.2b): Blockbild der Fläche $z = f(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$ mit $-\pi \leq x, y \leq \pi$

Wenn für x und y jeweils die Zylinderkoordinaten eingesetzt werden, ergibt sich

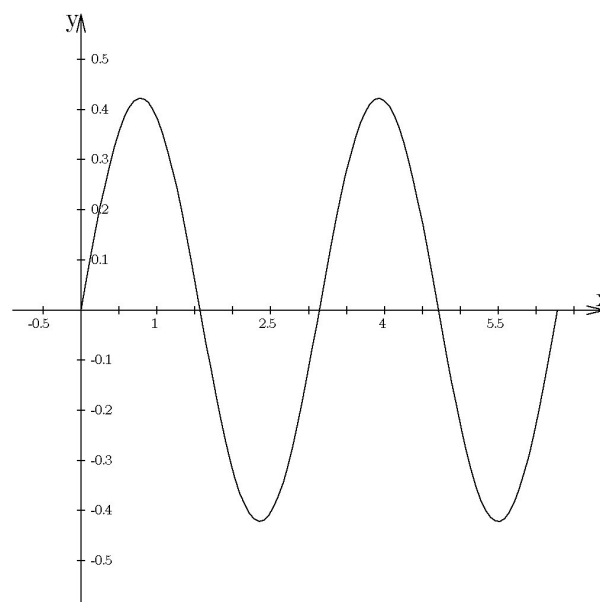
- für den Zylinder mit Radius 1:

$$z = \sin(\cos(\varphi)) \cdot \sin(\sin(\varphi)) \quad \text{für} \quad 0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi$$



Aufgabe 8.2b): Blockbild der Fläche $z = f(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$ mit $-\pi \leq x, y \leq \pi$,
geschnitten mit dem Zylinder $\{ (x, y, z) ; x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1 \}$

Die Abwicklung des oben dargestellten Zylinders hat dann folgende Form:

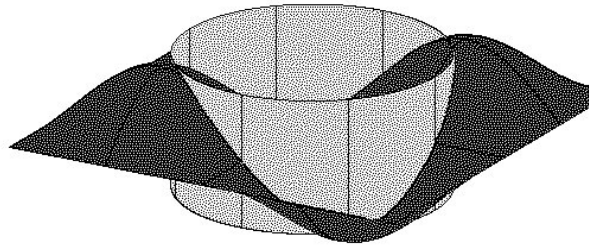


Aufgabe 8.2b): Abwicklung der zylindrischen Spante

$$\{ (x, y, z) ; x = \cos(\varphi), y = \sin(\varphi), z = \sin(\cos(\varphi)) \cdot \sin(\sin(\varphi)), 0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \}$$

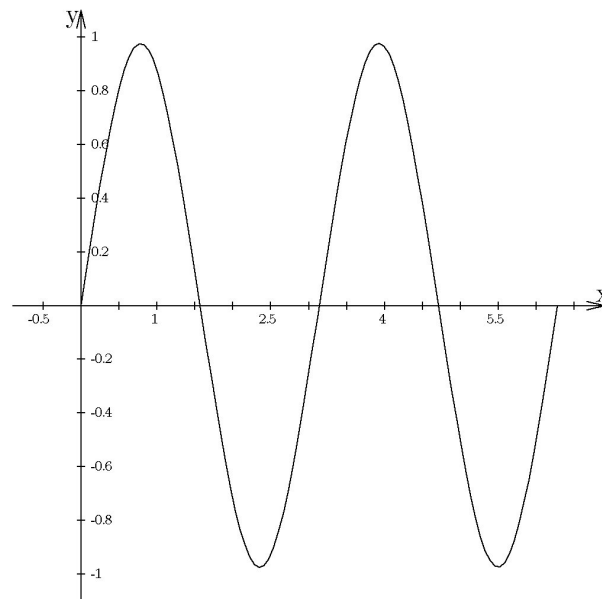
- für den Zylinder mit Radius 2:

$$z = \sin(\cos(2 \cdot \varphi)) \cdot \sin(\sin(2 \cdot \varphi)) \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi$$



Aufgabe 8.2b): Blockbild der Fläche $z = f(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$,
geschnitten mit dem Zylinder $\{ (x, y, z) ; x^2 + y^2 = 4 \}$

Die Abwicklung des oben dargestellten Zylinders hat dann die Form der gestrichelten Linie:



Aufgabe 8.2b): Abwicklung der zylindrischen Spante
 $\{ (x, y, z) ; x = 2 \cdot \cos(\varphi), y = 2 \cdot \sin(\varphi), z = \sin(2 \cdot \cos(\varphi)) \cdot \sin(2 \cdot \sin(\varphi)) \}$
für $0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi$

8.2c) Tangentialebene

Berechnen Sie für die Fläche $z = \sin(x) \cdot \sin(y)$ die Tangentialebene in den Punkten $P_1 = (x_1, y_1) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ und $P_2 = (x_2, y_2) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$ und zeichnen Sie diese jeweils in die Höhenkarte a) ein. Verwenden Sie dabei folgende Berandungen für die Tangentialebene im Punkt P_i : $x_i - \frac{\pi}{4} \leq x \leq x_i + \frac{\pi}{4}$ und $y_i - \frac{\pi}{4} \leq y \leq y_i + \frac{\pi}{4}$

Lösung von Aufgabe 8.2c):

Es ist

$$f_x = \cos(x) \cdot \sin(y) \quad \text{und} \quad f_y = \sin(x) \cdot \cos(y)$$

und daher

- für den Punkt P_1 :

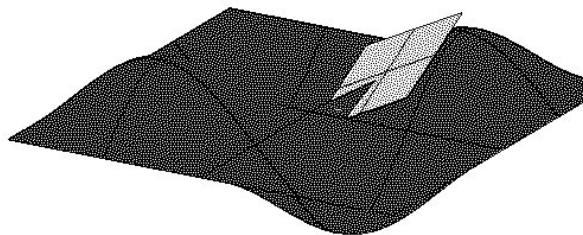
$$f_x(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \quad f_y(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \quad f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

Dann ist die Tangentialebene in dem Punkt P_1 definiert durch

$$T = \{(x, y, z) \mid z = f(x_1, y_1) + f_x(x_1, y_1) \cdot (x - x_1) + f_y(x_1, y_1) \cdot (y - y_1)\}$$

also

$$T = \left\{ (x, y, z) \mid z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2} \cdot (y - \frac{\pi}{4}) \right\} = \{(x, y, z) \mid 2 \cdot x + 2 \cdot y - 4 \cdot z = \pi - 2\}$$



Aufgabe 8.2c): Tangentialebene der Fläche $z = f(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$
im Punkt $P_1 = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

- für den Punkt $P_2 = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$:

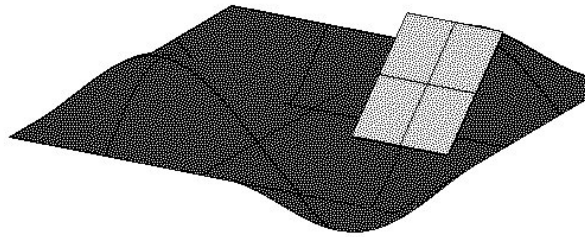
$$f_x(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}) = 0 \quad f_y(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \quad f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

Dann ist die Tangentialebene in dem Punkt P_2 definiert durch

$$T = \{(x, y, z) \mid z = f(x_2, y_2) + f_x(x_2, y_2) \cdot (x - x_2) + f_y(x_2, y_2) \cdot (y - y_2)\}$$

also

$$T = \left\{ (x, y, z) \mid z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot (y - \frac{\pi}{6}) \right\} = \{(x, y, z) \mid 6 \cdot \sqrt{3} \cdot y - 12 \cdot z = \pi \cdot \sqrt{3} - 6\}$$



Aufgabe 8.2c): Tangentialebene der Fläche $z = f(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$
im Punkt $P_2 = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$
(Tangentialebene für $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$)

8.2d) (Extremwerte)

Bestimmen Sie (relative und absolute) Extremwerte im Bereich

$$B := \{(x, y) \mid -\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi, \}$$

und vergleichen das Ergebnis mit Ihrer Zeichnung.

Lösung 8.2d):

Zunächst sollen die relativen Extrema in B gesucht werden: Es ist

$$f_x = \cos(x) \cdot \sin(y) \quad \text{und} \quad f_y = \sin(x) \cdot \cos(y)$$

Folglich führt

1. die Bedingung $f_x(x_e, y_e) = 0$ zu den Lösungen

$$(\pm \frac{\pi}{2}, y) \text{ oder } (x, \pm \pi) \text{ oder } (x, 0)$$

2. die Bedingung $f_y(x_e, y_e) = 0$ zu den Lösungen

$$(\pm \pi, y) \text{ oder } (0, y) \text{ oder } (x, \pm \frac{\pi}{2})$$

Es sollen beide Bedingungen gleichzeitig gelten, also gibt es 13 mögliche Extremwerte:

$(x_1, y_1) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(x_2, y_2) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(x_3, y_3) = (\pi, \pi)$
$(x_4, y_4) = (\pi, -\pi)$	$(x_5, y_5) = (-\pi, \pi)$	$(x_6, y_6) = (-\pi, -\pi)$
$(x_7, y_7) = (\pi, 0)$	$(x_8, y_8) = (-\pi, 0)$	$(x_9, y_9) = (0, \pi)$
$(x_{10}, y_{10}) = (0, -\pi)$	$(x_{11}, y_{11}) = (0, 0)$	$(x_{12}, y_{12}) = (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$
$(x_{13}, y_{13}) = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$		

Nun soll für jeden dieser Punkte geprüft werden, ob die hinreichende Bedingung erkennen läßt, ob es sich wirklich um ein Extremum handelt - und wenn ja, dann um welches.

Es ist nach (2)

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin(x) \cdot \sin(y) & \cos(x) \cdot \cos(y) \\ \cos(x) \cdot \cos(y) & -\sin(x) \cdot \sin(y) \end{vmatrix}$$

$D(x_1, y_1) = 1, f_{xx} < 0$: Max	$D(x_2, y_2) = 1, f_{xx} > 0$: Min	$D(x_3, y_3) = -1$: SP
$D(x_4, y_4) = -1$: SP	$D(x_5, y_5) = -1$: SP	$D(x_6, y_6) = -1$: SP
$D(x_7, y_7) = -1$: SP	$D(x_8, y_8) = -1$: SP	$D(x_9, y_9) = -1$: SP
$D(x_{10}, y_{10}) = -1$: SP	$D(x_{11}, y_{11}) = -1$: SP	$D(x_{12}, y_{12}) = 1, f_{xx} > 0$: Min
$D(x_{13}, y_{13}) = 1, f_{xx} > 0$: Max		

SP = Sattelpunkt

Also gibt es nur die vier relativen Extrema (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_{12}, y_{12}) und (x_{13}, y_{13}) ; die maximale Höhe ist +1 und die minimale Höhe ist -1.

Auf den Rändern gilt:

für $x = \pi$ ist $z = 0$, also kein absolutes Extremum.

für $x = -\pi$ ist $z = 0$, also kein absolutes Extremum.

für $y = \pi$ ist $z = 0$, also kein absolutes Extremum.

für $y = -\pi$ ist $z = 0$, also kein absolutes Extremum.

Aufgabe 8.3:

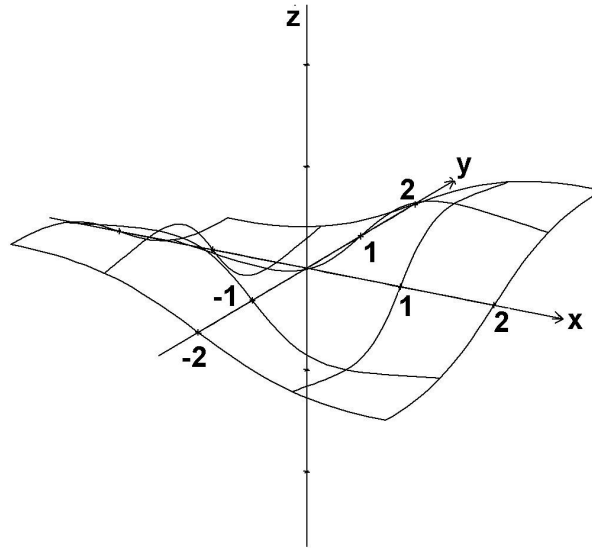
Veranschaulichen Sie sich die durch die Funktion

$$z = f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$$

beschriebene Fläche im Bereich $B := \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 2, \}$

8.3a) durch eine Höhenkarte für die Höhen $z_0 = 0$ und $z_1 = \frac{1}{4}$

Lösung 8.3a):

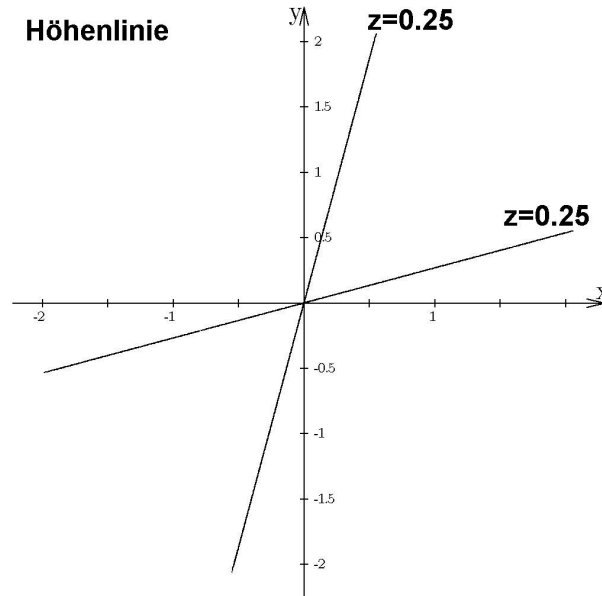


Aufgabe 8.3: Fläche $z = f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$

$z_0 = 0$ liefert $x = 0$ oder $y = 0$ - im Punkt $(0, 0)$ ist die Fläche nicht definiert.

$z_1 = \frac{1}{4}$ liefert die Kurven

$$\frac{1}{4} = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = 4 \cdot x \cdot y$$



Aufgabe 8.3a): Höhenlinien der Höhe $z_1 = \frac{1}{4}$ der Fläche $z = f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$ für $-2 \leq x \leq 2$ und $-2 \leq y \leq 2$

8.3b) durch ein Blockbild

Erzeugen Sie die Spanten aus den Kurvenscharen $z = f(x, y_i)$ mit $y_i = -2 + i$ ($i = 0, \dots, 4$) und $z = f(x_i, y)$ mit $x_i = -2 + i$ ($i = 0, \dots, 4$).

Lösung 8.3b):

In der Gleichung der Fläche $z = f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$ werden zunächst die Ebenen y_i betrachtet:

$z = f(x, y_0)$ mit $y_0 = -2$: $z = \frac{-x \cdot 2}{x^2 + 4}$ (durchgezogene Linie)

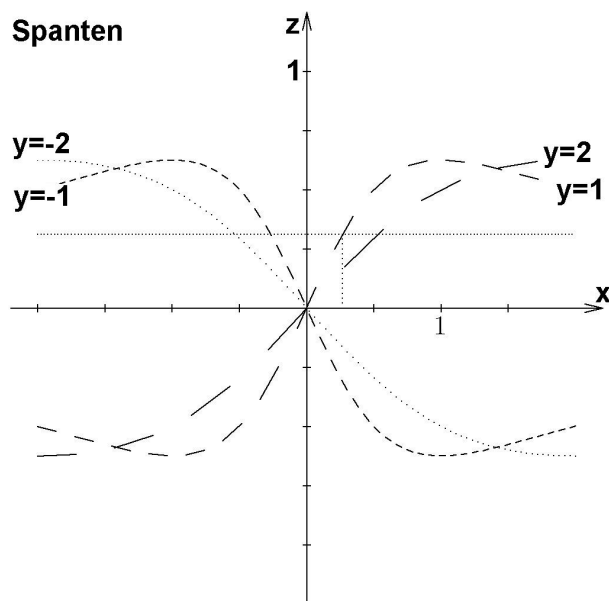
$z = f(x, y_1)$ mit $y_1 = -1$: $z = \frac{-x \cdot 1}{x^2 + 1}$ (100 Striche)

$z = f(x, y_2)$ mit $y_2 = 0$: $z = 0$ (im Punkt $(0, 0)$ ist die Fläche nicht definiert)

$z = f(x, y_3)$ mit $y_3 = 1$: $z = \frac{x \cdot 1}{x^2 + 1}$ (30 Striche)

$z = f(x, y_4)$ mit $y_4 = 2$: $z = \frac{x \cdot 2}{x^2 + 4}$ (15 Striche)

Diese einzelnen Spanten sind im folgenden Bild für $-2 \leq x \leq +2$ dargestellt.



Aufgabe 8.3b): Spanten-Kurven der Fläche $z = f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$

- 8.3c)** Untersuchen Sie die Fläche in der Umgebung des Nullpunktes $(0, 0)$, indem Sie zunächst $f(0, 0)$ definieren und dann versuchen, eine Tangentialebene in $(0, 0)$ zu bestimmen.