Mathematik für Ingenieure
Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik
Dr. Dirk Windelberg **Universität Hannover**

Stand: 18. August 2008
http://www.iazd.uni-hannover.de/~windelberg/teach/ing

9 Extremwertaufgaben, zweidimensional

2D: Notwendige Bedingung für das Auftreten eines relativen Extremwertes:
Es seien $B \subseteq \mathbb{R}$ und $f : B \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn der Graph von f in $x_e \in B$ ein relatives Extremum besitzt, so ist $f'(x_e) = 0$.

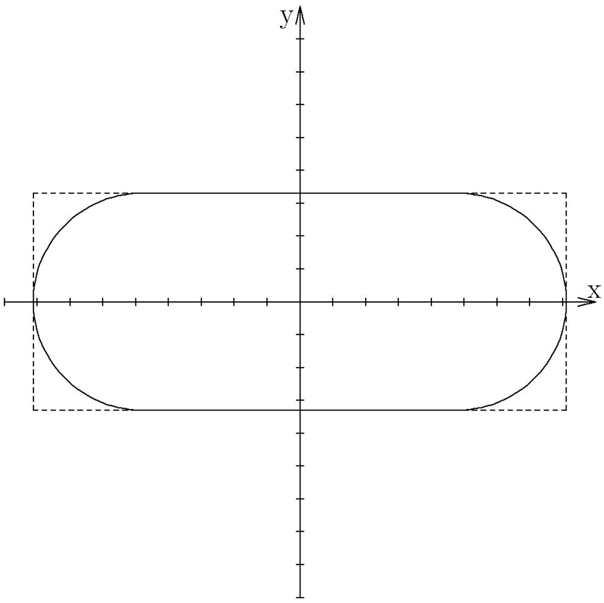
absolutes Maximum:
Eine Stelle $x_a \in B$ heisst **absolutes Maximum** in B, wenn für alle $x \in B$ gilt $f(x_a) \geq f(x)$.

Aufgabe 9.1:
Ein Stadion mit einer 400 m-Laufbahn bestehend aus zwei parallelen geraden Laufstrecken mit zwei angesetzten Halbkreisen soll so angelegt werden, dass der Flächeninhalt des Rechtecks zwischen den Geraden unter Beachtung der beiden Zusatzforderungen

1. Länge x des Rechtecks mindestens 90 m
2. Breite y des Rechtecks mindestens 66 m

möglichst gross wird.

Wie lang werden die geraden Laufstrecken?



Aufgabe 9.1
Extremwerte mit Randbedingungen

Lösung 9.1:

Länge der Laufbahn: $2 \cdot x + \pi \cdot y = 400$.

$\Leftrightarrow \quad y = \frac{400}{\pi} - \frac{2}{\pi} \cdot x.$

Nach Bedingung 2 soll gelten $y \geq 66$.

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{400}{\pi} - \frac{2 \cdot x}{\pi} \geq 66 \quad \Longleftrightarrow \quad 400 - 2 \cdot x \geq 66 \cdot \pi \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq 200 - 33 \cdot \pi \approx 96.33 .$$

Der Flächeninhalt F des Rechtecks beträgt $F = x \cdot y$.
Gesucht ist das Maximum der Funktion $f(x) = \frac{400}{\pi} \cdot x - \frac{2}{\pi} \cdot x^2$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[90 ; 200 - 33 \cdot \pi] = [90.00 ; 96.33] =: I$.

$$f'(x) = \frac{400}{\pi} - \frac{4}{\pi} \cdot x ; \qquad f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 100 \notin I .$$

Das gesuchte Maximum kann also nur am Rand des Intervalls I liegen.

$$\begin{aligned} f(90.00) &= \frac{400}{\pi} \cdot 90 - \frac{2}{\pi} \cdot 90^2 = 6302.54 ; \\ f(96.33) &= \frac{400}{\pi} \cdot 96.33 - \frac{2}{\pi} \cdot 96.33^2 = 6357.61 . \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \quad$ Maximum bei $x = 200 - 33 \cdot \pi = 96.33$.

Länge der geraden Laufstrecken: $x = 96.33m$.

Aufgabe 9.2:
Es soll eine (oben offene) Schachtel gebastelt werden. Dazu schneidet man aus einem quadratischen Karton der Kantenlänge 12 cm an den vier Ecken jeweils ein Quadrat der (noch zu bestimmenden) Seitenlänge x aus und biegt die überstehenden Teile hoch. Die fertige Schachtel soll natürlich ein möglichst großes Volumen haben: Wie muß man dazu die Länge x wählen ?

Lösung 9.2:
Das Volumen der fertigen Schachtel hängt natürlich von x ab und beträgt

$$V(x) = x \cdot (12 - 2 \cdot x)^2 \quad \text{(Grundfläche} \times \text{Höhe !)}$$

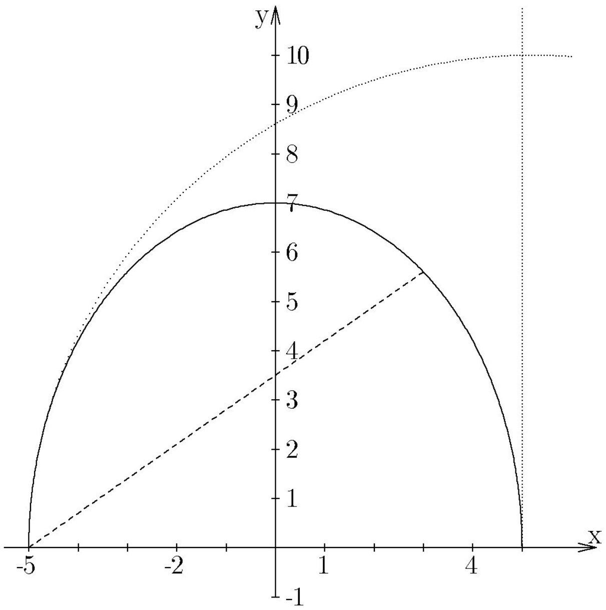
Da offensichtlich nur $0 \leq x \leq 6$ interessant ist, muß also das absolute Maximum der Funktion $V(x)$ auf dem Intervall $[0, 6]$ gesucht werden.
Die beiden Randpunkt $x = 0$ und $x = 6$ liefern das Null-Volumen. Das Maximum von V wird deshalb im Inneren des Intervalles angenommen und muß sich durch die Bedingung $V'(x) = 0$ verraten. Nun ist

$$V'(x) = (12 - 2 \cdot x)^2 - 4 \cdot x \cdot (12 - 2 \cdot x) = (12 - 2 \cdot x) \cdot (12 - 6 \cdot x)$$

V' hat also nur eine Nullstelle im *Inneren* des Intervalles, nämlich bei $x = 2$. Hier muß demnach das Maximum liegen. Das maximale Volumen der Schachtel ist also $V(2) = 128\, cm^3$.

Aufgabe 9.3:
Bestimmen Sie denjenigen Punkt der Halbellipse $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1$ mit $y \geq 0$, der vom Punkt $A = (-5, 0)$ den grössten Abstand hat.

Lösung 9.3:



Aufgabe 9.3
relative und absolute Extremwerte
gesuchter maximaler Abstand: gestrichelt
Abstand des Punkte (x, y) von $(-5, 0)$:
$d(x) := \sqrt{-x^2 \cdot \frac{24}{25} + 10 \cdot x + 25}$ (punktiert)

Halbellipse $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{7^2} = 1$, Punkt $A = (-5, 0)$.
Das Abstandsquadrat eines beliebigen Punktes $P = (x, y)$ auf der Halbellipse von A beträgt

$$D(x, y) = (x+5)^2 + y^2 \quad \text{mit} \quad y^2 = 7^2 - \frac{7^2}{5^2} \cdot x^2$$

Folglich kann das Abstandsquadrat D auch als Funktion von x allein beschrieben werden:

$$\begin{aligned} D(x) &= (x+5)^2 + 49 - \frac{49}{25} \cdot x^2 \\ &= x^2 + 10 \cdot x + 25 - \frac{49}{25} \cdot x^2 \\ &= x^2 \cdot \left(1 - \frac{49}{25}\right) + 10 \cdot x + 25 \\ &= -x^2 \cdot \frac{24}{25} + 10 \cdot x + 25 \end{aligned}$$

(d.h. $D(x)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel)
Zunächst werden einige Randwerte bestimmt:
Es ist $D(-5) = 0$, $D(0) = 5^2 + 7^2 = 74$ und $D(5) = 100$

Nun werden Extremwerte gesucht:
Es ist $D'(x) := \dfrac{d}{d\,x} D(x) = -2 \cdot x \cdot \dfrac{24}{25} + 10$.
Eine notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremwertes x_e ist $D'(x_e) = 0$. Hier ist

$$\begin{aligned} D'(x_e) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad -2 \cdot x_e \cdot \frac{24}{25} + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad x_e = 5 \cdot \frac{25}{24} \approx 5.2 \end{aligned}$$

Also liegt das globale Extremum nicht mehr auf der Ellipse.

Das (absolute) Maximum ist daher im Punkt $(5, 0)$ erreicht.

Zusatz 9.3a):

Allgemein wird die Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ mit $a < b$ und der Punkt $A = (-a, 0)$ betrachtet. Gesucht ist eine Bedingung, bei der das aus der Abstandsfunktion berechnete relative Maximum nicht ausserhalb der Ellipse liegt, sondern innerhalb.

Lösung 9.3a):

Das Abstandsquadrat des Punktes A von einem beliebigen Punkt $P = (x, y)$ auf der Halbellipse beträgt

$$D(x, y) = (x + a)^2 + y^2 \quad \text{mit} \quad y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$$

Folglich kann D als Funktion von x beschrieben werden:

$$D(x) \quad = \quad (x + a)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot x + a^2 + b^2$$

(d.h. D ist eine Parabel)
Zunächst werden einige Randwerte bestimmt:
Es ist $D(-a) = 0$, $D(0) = a^2 + b^2$ und $D(a) = 4 \cdot a^2$.
Nun werden Extremwerte x_e gesucht:
Es ist $D'(x_e) = 2 \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot x_e + 2 \cdot a$.
Folglich ist

$$\begin{aligned} D'(x) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot x_e + a = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad \left(a^2 - b^2\right) \cdot x_e + a^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_e = \frac{a^3}{b^2 - a^2} \end{aligned}$$

Wenn dieser Wert innerhalb der Ellipse liegen soll, so muss gelten

$$-a \le x_e = \frac{a^3}{b^2 - a^2} \le a$$

(Bemerkung: für $a = 5$ und $b = 7$ ist $x_e = \dfrac{5^3}{7^2 - 5^2} = \dfrac{125}{24} = 5.2$)
Wenn $a > 0$ angenommen wird, muss

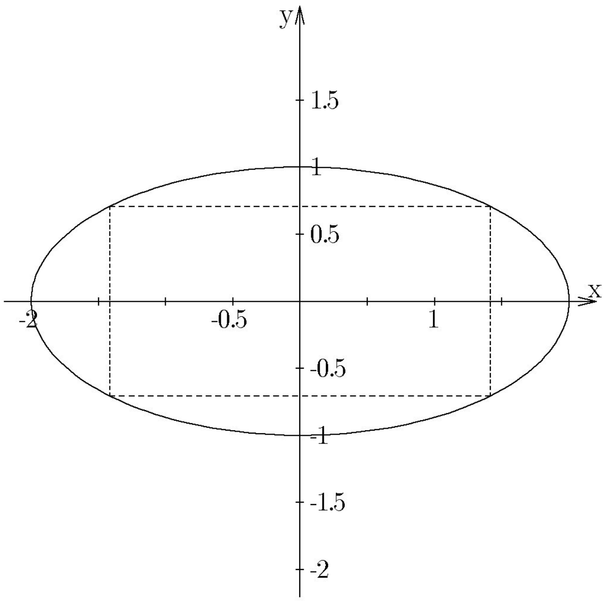
$$\frac{a^2}{b^2 - a^2} \le 1 \qquad \text{oder mit } a < b \qquad a^2 \le b^2 - a^2$$

oder $2 \cdot a^2 \le b^2$ gelten.

Aufgabe 9.4:

Der Ellipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ soll ein Rechteck $\{(x,y)\,;\ |x| \le A\,,\ |y| \le B\,\}$ einbeschrieben werden. Wie müssen A und B gewählt werden, damit der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird?

Lösung 9.4:



Aufgabe 9.4: maximaler Flächeninalt

Für ein der Ellipse einbeschriebenes Rechteck der Form $-A \le x \le A$, $-B \le y \le B$ muß offenbar

$B = \sqrt{1 - \dfrac{A^2}{4}}$ sein (Ellipsengleichung !).

Der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks beträgt demnach $F(A) = 4AB = 4A\sqrt{1 - \dfrac{A^2}{4}}$. Gesucht ist also das Maximum der Funktion $F(A)$ auf dem Intervall $0 \le A \le 2$.

In den Randpunkten kann das Maximum wegen $F(0) = F(2) = 0$ nicht liegen, es ist also im Inneren zu suchen und muß sich deshalb durch $F'(A) = 0$ verraten!

Nun ist

$$F'(A) = 4 \cdot \sqrt{1 - \frac{A^2}{4}} - \frac{A^2}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{4}}} = 0$$

$\longleftrightarrow 4 \cdot (1 - \frac{A^2}{4}) = A^2 \longleftrightarrow A = \sqrt{2}$

(die zweite Lösung $A = -\sqrt{2}$ liegt außerhalb des Intervalles $[0,2]$).

Da $A = \sqrt{2}$ der einzige innere Punkt mit $F'(A) = 0$ ist, muss hier das (globale) Maximum liegen!

Der maximale Flächeninhalt beträgt also $F(\sqrt{2}) = 4$.