

Anordnung in der „Einführung in die Geometrie“

zu den Anfängen unseres gleichnamigen Buches

Karzel / Sörensen / Windelberg

Dirk Windelberg

Hannover

Helmut Karzel zu seinem 80. Geburtstag

Berlin, 2008

Inhalt

1 Grundidee

2 Anordnung in $A(\mathbb{R}^2)$

3 Definition einer Anordnung in einer affinen Ebene

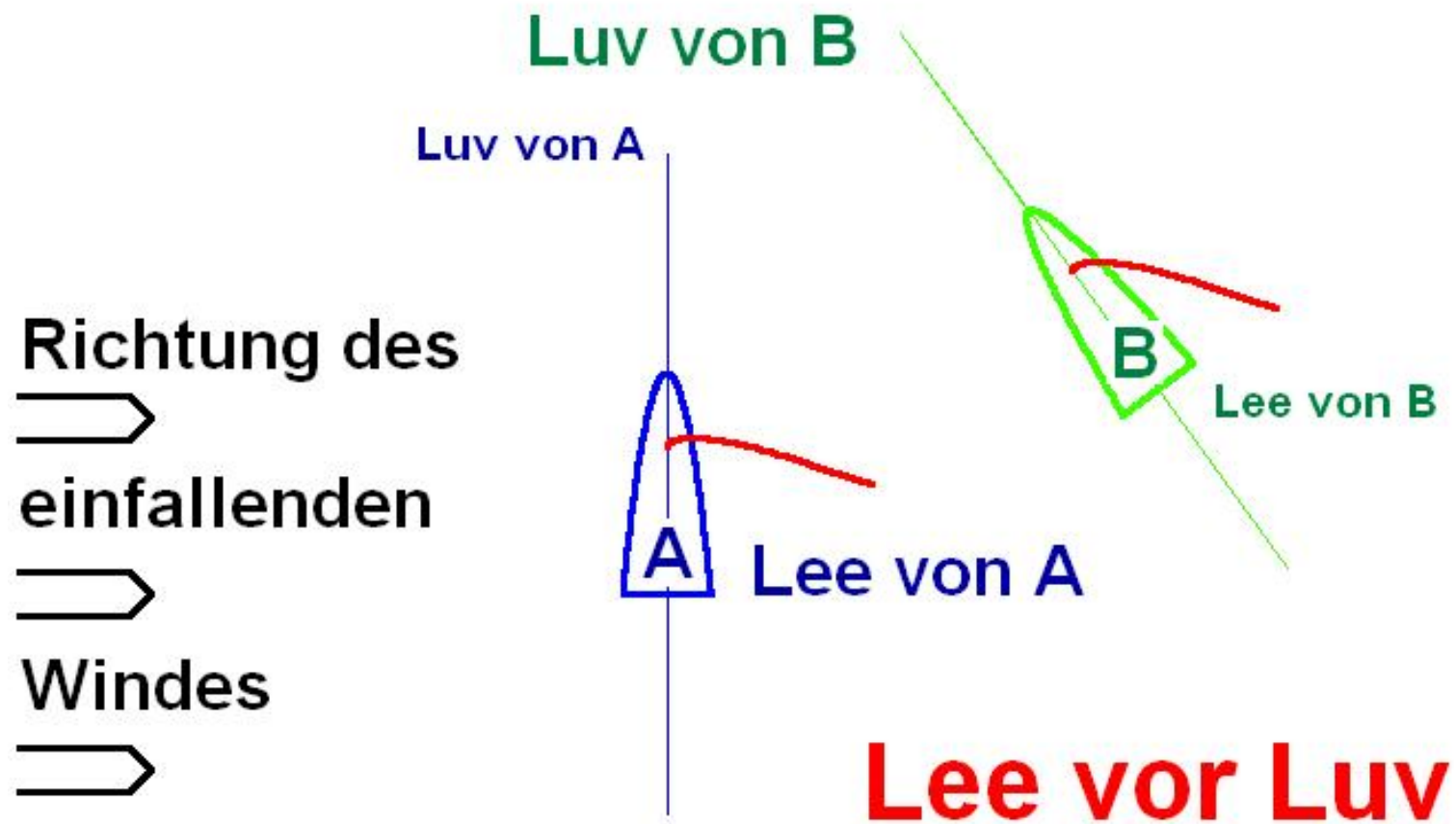
1 Grundidee

Anordnung in der Geometrie wird oft nicht verstanden -
auch nicht nach der Lektüre der Karzel'schen Vorlesung

Einführung in die Geometrie

oder des gleichnamigen Buches.

Hier wird der Versuch unternommen,
nochmals den Karzel'schen Weg
von der Anschauung zur axiomatischen Darstellung
zu beschreiben -
in der Hoffnung,
dass weder die Idee der Anordnung
noch die der Grundlagen
in Vergessenheit gerät.



Haben zwei auf Kollisionskurs fahrende Segelfahrzeuge den Wind von derselben Seite, so hat das luvwärts fahrende Schiff dem leewärts fahrenden Schiff auszuweichen.

2 Anordnung in $A(\mathbb{R}^2)$

In der Vorlesungsmitschrift sowie in dem Buch „Einführung in die Geometrie“ wird im Kapitel „affine angeordnete Ebene“ dargestellt, wie sich Studenten

eine „**Anordnung einer Ebene**“,
eine „**Ordnungsfunktion**“ und
eine „**Zwischenrelation**“

vorzustellen haben.

Da diese Begriffe sowohl in der Anschauungsebene als auch in der axiomatisch begründeten Geometrie vorkommen, gibt es kaum eine Staatsexamensprüfung, in der diese Begriffe so verwendet werden, wie sie von H. Karzel eingeführt wurden.

Hier soll daher wiederholt nochmals der Gedankengang dargestellt werden, damit der Anordnungsbegriff auch in Zukunft nicht verloren geht.

2.1 Definition einer Ordnungsfunktion in $A(\mathbb{R}^2)$

In der affinen reellen Ebene $A(\mathbb{R}^2)$ ist

$E = \mathbb{R}^2$ die Menge der Punkte.

Die Geraden in $A(\mathbb{R}^2)$ beschreiben wir in der Form

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (m, c) & \longrightarrow \langle m, c \rangle := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = m \cdot x + c\} \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ c & \longrightarrow \langle c \rangle := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x = c\} \end{cases}$$

Dann wird die Menge der Geraden beschrieben durch

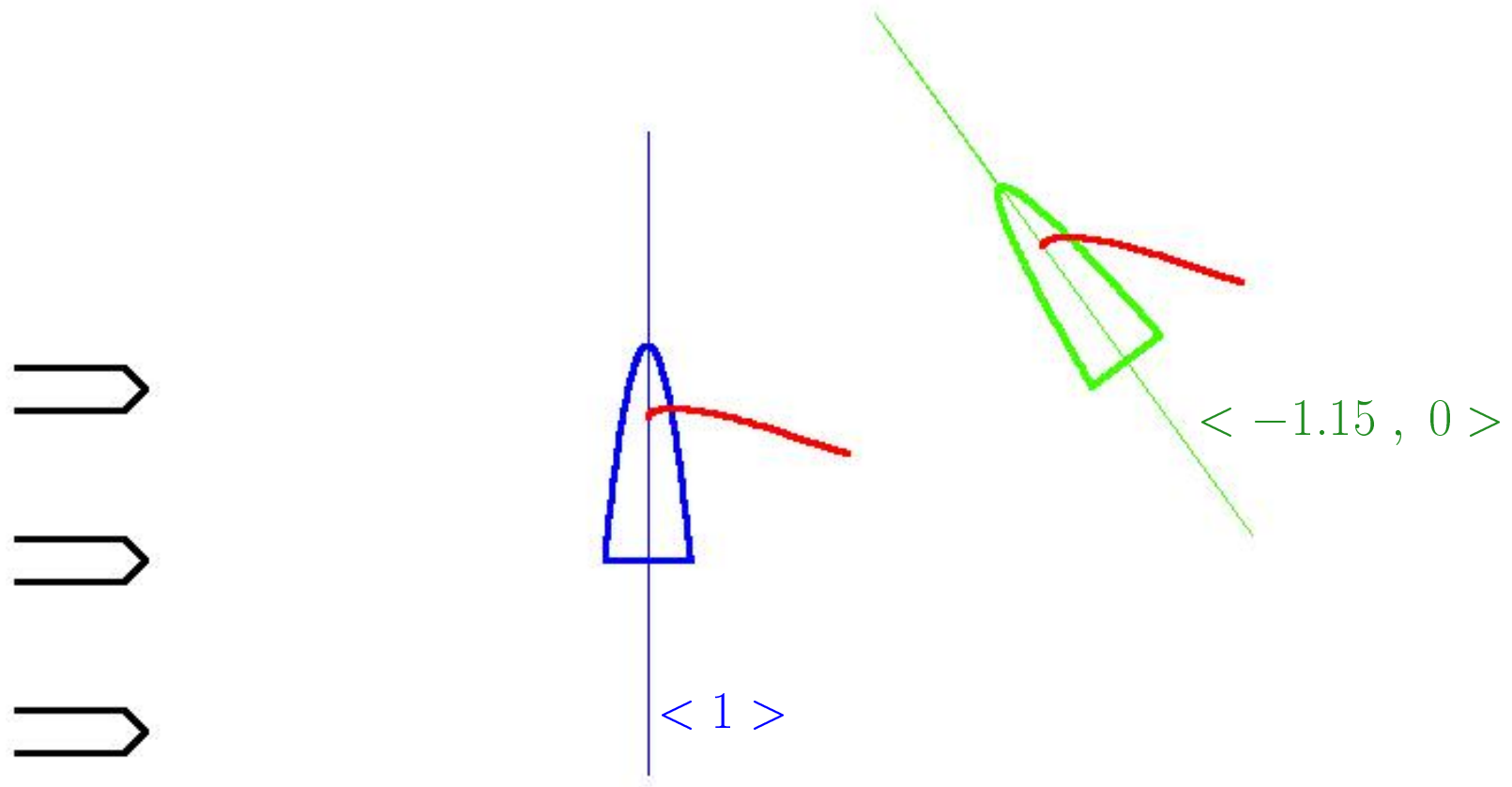
$$\mathcal{G} := \{ \langle m, c \rangle, m, c \in \mathbb{R} \} \cup \{ \langle c \rangle, c \in \mathbb{R} \}$$

Wir betrachten $\mathbb{R}$ als angeordneten Körper $\mathbb{R}(\leq)$ und beschreiben unsere Ebene nun durch

$$\boxed{A(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}, \leq)}$$

In dieser Ebene führen wir dann eine Abbildung „ $\circ$ “ ein:

$$\circ : \begin{cases} \mathcal{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\langle m, c \rangle, x, y) & \longrightarrow \langle m, c \rangle \circ (x, y) := m \cdot x + c - y \\ (\langle c \rangle, x, y) & \longrightarrow \langle c \rangle \circ (x, y) := -x + c \end{cases}$$



2.2 Eigenschaften von $G \circ (x, y)$

Übungsaufgabe

Es gelten folgende Eigenschaften:

$$(14.2) \quad G \circ (x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in G$$

$$(14.3) \quad G \circ [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = G \circ (x_1, y_1) + G \circ (x_2, y_2) - G \circ (0, 0)$$

$$(14.4) \quad G \circ [\lambda \cdot (x, y)] = \lambda \cdot G \circ (x, y) + (1 - \lambda) \cdot (G \circ (0, 0))$$

2.3 Definition einer Ordnungsfunktion $(G|(x_1, y_1), (x_2, y_2))$

In $A(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}, \leq)$ definieren wir für $\vec{a} := (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{b} := (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha_{<} : \begin{cases} (\mathcal{G} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)' \longrightarrow \{-1, 1\} \\ (G, \vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow (G|\vec{a}, \vec{b})_{<} := \text{sign}((G \circ \vec{a}) \cdot (G \circ \vec{b})) \end{cases}$$

wobei $(\mathcal{G} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)' := \{(G, \vec{a}, \vec{b}) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; \vec{a}, \vec{b} \notin G\}$.

Übungsaufgabe

Für diese Funktion gelten die beiden folgenden Eigenschaften:

(13.6) Für alle $G \in \mathcal{G}$ und alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus G$ gilt:

$$(G|\vec{a}, \vec{b}) = (G|\vec{b}, \vec{a})$$

(13.7) Für alle $G \in \mathcal{G}$ und alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus G$ gilt:

$$(G|\vec{a}, \vec{b}) \cdot (G|\vec{b}, \vec{c}) = (G|\vec{a}, \vec{c})$$

2.4 Definition einer angeordneten Ebene

Diese auf $(\mathcal{G} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)'$ definierte Funktion $\alpha_<$, für die die Eigenschaften (13.6) und (13.7) gelten, wird **Ordnungsfunktion** genannt.

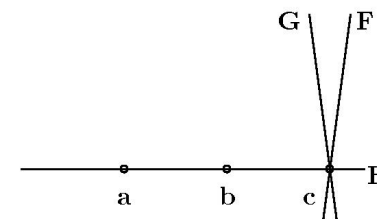
Mit dieser Ordnungsfunktion wird $(\mathcal{G} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)'$ zu einer **angeordneten Ebene** die wir mit $A(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}, \alpha_<)$ bezeichnen wollen:

Übungsaufgabe

In $A(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}, \alpha_<)$ gelten:

A 1 (Geradenrelation) Für alle $F, G, H \in \mathcal{G}$ und alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in H$, $\vec{c} \in F \cap G$ und $\vec{a}, \vec{b} \notin F, G$ gilt:

$$\left(F | \vec{a}, \vec{b} \right) = \left(G | \vec{a}, \vec{b} \right)$$



A 2 Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$ drei verschiedene kollineare Punkte und $A, B, C \in \mathcal{G}$ mit $A \cap \overline{\vec{a}, \vec{b}} = \vec{a}$, $B \cap \overline{\vec{a}, \vec{b}} = \vec{b}$ und $C \cap \overline{\vec{a}, \vec{b}} = \vec{c}$. Dann gilt:

Genau einer der drei Werte $\left\{ \begin{array}{l} \left(A | \vec{b}, \vec{c} \right) \\ \left(B | \vec{c}, \vec{a} \right) \\ \left(C | \vec{a}, \vec{b} \right) \end{array} \right\}$ ist gleich -1

V 1 Für alle $G \in \mathcal{G}$ und alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus G$ mit

$$\left(G | \vec{a}, \vec{b} \right) = -1 \text{ gilt } G \cap \overline{\vec{a}, \vec{b}} \neq \emptyset$$

2.5 Definition einer Seiteneinteilung

Durch die Ordnungsfunktion $\alpha_<$ wird eine **Seiteneinteilung** definiert:

Seiteneinteilung

In $A(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}, \leq)$ sind jeder Geraden $G \in \mathcal{G}$ zwei Teilmengen

$$\{G\}^+ := \{\vec{a} \in \mathbb{R}^2; G \circ \vec{a} > 0\}$$

und

$$\{G\}^- := \{\vec{a} \in \mathbb{R}^2; G \circ \vec{a} < 0\}$$

zugeordnet; damit ist

$$E = \mathbb{R}^2 = \{G\}^+ \cup G \cup \{G\}^-$$

eine disjunkte Zerlegung von $E = \mathbb{R}^2$.

2.6 Definition einer Zwischenrelation

Mit Hilfe der Seiteneinteilung wird auf einer beliebigen Geraden eine **Zwischenrelation** definiert:

Zwischenrelation

Es sei $G \in \mathcal{G}$ eine beliebige Gerade in $A(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}, \leq)$.

Dann führen wir auf G folgende Relation $(|,)$ ein:

$$(|,) : \begin{cases} G^{3'} & \longrightarrow \{1, -1\} \\ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) & \longrightarrow (\vec{a} | \vec{b}, \vec{c}) := (H | \vec{b}, \vec{c}) \end{cases}$$

wobei $G^{3'} := \{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \in G^3; \vec{a} \neq \vec{b}, \vec{c}\}$

sowie $H \in \mathcal{G}$ mit $\vec{a} \in H$ und $H \neq G$ ist.

Diese Relation zwischen drei Punkten von G wird **Zwischenrelation** genannt.

Wegen A 1 ist diese Relation wohldefiniert.

Übungsaufgabe

Für eine Zwischenrelation gelten die folgenden Eigenschaften:

(Z 1) Für alle $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \in G^{3'}$ gilt:

$$(\vec{a}|\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}|\vec{c}, \vec{b})$$

(Z 2) Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in G$ mit $\vec{a} \neq \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ gilt:

$$(\vec{a}|\vec{b}, \vec{c}) \cdot (\vec{a}|\vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}|\vec{b}, \vec{d})$$

(Z 3) Für drei verschiedene Punkte $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in G$ gilt:

genau einer der Werte $(\vec{a}|\vec{b}, \vec{c})$, $(\vec{b}|\vec{c}, \vec{a})$, $(\vec{c}|\vec{a}, \vec{b})$ ist gleich -1

3 Definition einer Anordnung in einer affinen Ebene

Wir wollen hier die zuvor zum Teil als Übungsaufgaben formulierten Eigenschaften verwenden, um Anordnung axiomatisch einzuführen.

Dazu definieren wir

in einem speziellen Inzidenzraum

eine Seiteneinteilung und damit

eine Ordnungsfunktion.

3 Angeordnete Ebene

Es sei $(E, \mathcal{G})$ ein Inzidenzraum mit E 1 und I 3
d.h. also:

- E ist eine Menge, deren Elemente wir Punkte nennen, und
- $\mathcal{G}$ ist eine Teilmenge der Potenzmenge von E , deren Elemente wir Geraden nennen.
- Es gilt I 1:
Zu $x, y \in E$ mit $x \neq y$ gibt es genau ein $G \in \mathcal{G}$ mit $x, y \in G$.
- Es gilt I 3:
Für alle $G \in \mathcal{G}$ gilt $|G| \geq 3$.
- Es gilt E 1:
Es gibt 3 nicht kollineare Punkte.

3.1 Definition einer Seiteneinteilung

Jeder Geraden $G \in \mathcal{G}$ seien zwei Teilmengen

$$\{G\}^+, \{G\}^- \subset E$$

so zugeordnet, dass gilt

$$E = \{G\}^+ \cup G \cup \{G\}^- \text{ ist eine disjunkte Zerlegung von } E$$

$\{G\}^+$ und $\{G\}^-$ heissen Seiten von G .

Dann definieren wir:

$$\alpha : \begin{cases} (\mathcal{G} \times E \times E)' \longrightarrow \{1, -1\} \\ (G, a, b) \longrightarrow (G|a, b) := \begin{cases} +1, & \text{falls entweder } a, b \in \{G\}^+ \\ & \text{oder } a, b \in \{G\}^- \text{ gilt} \\ -1, & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Übungsaufgabe

Für diese Seiteneinteilung gelten die beiden folgenden Eigenschaften:

(13.6) Für alle $G \in \mathcal{G}$ und alle $a, b \in E \setminus G$ gilt:

$$(G|a, b) = (G|b, a)$$

(13.7) Für alle $G \in \mathcal{G}$ und alle $a, b \in E \setminus G$ gilt:

$$(G|a, b) \cdot (G|b, c) = (G|a, c)$$

Diese Abbildung α heißt **Ordnungsfunktion**.

Bemerkung: Wir hätten auch auf die Definition einer Seiteneinteilung verzichten können und eine Ordnungsfunktion als eine Abbildung α mit den Eigenschaften (13.6) und (13.7) einführen können.

3.2 Definition einer angeordneten Ebene

Es sei $(E, \mathcal{G}, \alpha)$ ein Inzidenzraum mit E 1 und I 3 sowie mit einer Ordnungsfunktion α .

$(E, \mathcal{G}, \alpha)$ heißt **angeordnete Ebene**, wenn die drei folgenden Axiome gelten:

A 1 (Geradenrelation) Für alle $F, G, H \in \mathcal{G}$ und alle $a, b, c \in E$ mit $a, b, c \in H$, $c \in F \cap G$ und $a, b \notin F, G$ gilt:

$$(F|a, b) = (G|a, b)$$

A 2 Es seien $a, b, c \in E$ drei verschiedene kollineare Punkte und $A, B, C \in \mathcal{G}$ mit $A \cap \overline{a, b} = a$, $B \cap \overline{a, b} = b$ und $C \cap \overline{a, b} = c$.

Dann gilt:

$$\text{Genau einer der drei Werte } \left\{ \begin{array}{l} (A|b, c) \\ (B|c, a) \\ (C|a, b) \end{array} \right\} \text{ ist gleich } -1$$

V 1 Für alle $G \in \mathcal{G}$ und alle $a, b \in E \setminus G$ mit

$$(G|a, b) = -1 \text{ gilt } G \cap \overline{a, b} \neq \emptyset$$

3.3 Definition einer Zwischenrelation

Zwischenrelation

Es sei $G \in \mathcal{G}$ eine beliebige Gerade in einer angeordneten Ebene $(E, \mathcal{G}, \alpha)$.

Dann führen wir auf G folgende Relation $(|,)$ ein:

$$(|,) : \begin{cases} G^{3'} & \longrightarrow \{1, -1\} \\ (a, b, c) & \longrightarrow (a | b, c) := (H | b, c) \end{cases}$$

wobei $G^{3'} := \{(a, b, c) \in G^3; a \neq b, c\}$

sowie $H \in \mathcal{G}$ mit $a \in H$ und $H \neq G$ ist.

Die Relation $(|,)$ zwischen drei Punkten von G heißt **Zwischenrelation**.
Wegen A 1 ist diese Relation wohldefiniert.

3.4 Definition einer affinen desarguesschen angeordneten Ebene

Um den Zusammenhang zwischen der Anordnung eines Körpers und der Anordnung einer Geometrie herzustellen, betrachten wir eine affine desarguessche angeordnete Ebene $(E, \mathcal{G}, \alpha)$.

In dieser Ebene können wir auf einer Geraden $K \in \mathcal{G}$

- zunächst zwei (verschiedene) Punkte 0 und 1 festlegen und dann
- K mit einer Körperstruktur versehen und
- eine Anordnung $<$ auf den Körper K mit Hilfe des Seiteneinteilung übertragen:

$$(1) \ 0 < 1$$

$$(2) \ p < q \ p \neq q \text{ und } \left\{ \begin{array}{ll} (p|0, q) \cdot (0|1, p) = -1, & \text{falls } p \neq 0 \\ (0|1, q) = 1, & \text{falls } p = 0 \end{array} \right\}$$

**Vielen Dank
an meinen Doktorvater
Helmut Karzel**