

# Piet Heins Superellipse

Martin Gardner

## 1. Einleitung

Um den zivilisierten Menschen herum spielt sich - von ihm kaum bemerkt - innerhalb und außerhalb seines Hauses ein Konflikt zwischen den beiden uralten Gestaltungsformen ab: dem Eckigen und dem Runden. Fahrzeuge mit runden Rädern, gelenkt von Hand mit rundem Steuer, bewegen sich auf Straßen, die wie die Linien eines rechtwinkligen Gitters unterteilt sind. Bauwerke und Häuser bestehen meist aus rechten Winkeln, gelegentlich wird ihre Form etwas durch runde Kuppeln und Fenster gemildert. Wir essen an rechteckigen und runden Tischen mit rechteckigen Servietten auf unserem Schoß, essen von runden Tellern und trinken aus Gläsern mit runden Querschnitten. Wir zünden zylindrische Zigaretten mit Streichhölzern aus einer rechteckigen Packung an und bezahlen die rechteckige Rechnung mit rechteckigen Banknoten und runden Münzen.

Sogar unsere Spiele verbinden das Rechteckige mit dem Runden. Die meisten Spiele im Freien werden mit runden Bällen auf rechteckigen Feldern gespielt. Vom Billard bis zum Damespiel sind es ähnliche Kombinationen des Runden mit dem Rechteckigen. Rechteckige Spielkarten werden aufgefächert in runder Anordnung gehalten. Allein die Buchstaben auf dieser rechteckigen Seite sind eine Kombination rechteckiger Winkel und runder Bögen. Wohin man auch blickt, die Szene ist von Quadraten und Kreisen bevölkert, auch mit den ihnen verwandten gestreckten Formen: Rechtecken und Ellipsen. (In einer bestimmten Weise ist die Ellipse allgemeiner als der Kreis, da jeder Kreis bei seitlicher Betrachtung wie eine Ellipse erscheint.) Auf den Gemälden der Op-Art und bei Entwürfen für Stoffmuster stehen sich Quadrate, Kreise, Rechtecke und Ellipsen wie im täglichen Leben unverträglich gegenüber.

Der dänische Schriftsteller und Erfinder Piet Hein warf kürzlich die faszinierende Frage auf: Was ist die einfachste und auch angenehmste geschlossene Kurve, die genau in der Mitte zwischen diesen beiden gegenüberstehenden Tendenzen liegt? Piet Hein (man spricht von ihm immer mit seinen beiden Namen) ist vom Ursprung her ein Wissenschaftler, gut bekannt in Skandinavien und den Englisch sprechenden Ländern wegen seiner außerordentlich populären Bände reizender aphoristischer Gedichte (die Kritiker mit den Epigrammen von Martial vergleichen) und wegen seiner Schriften über wissenschaftliche und humanistische Themen. Als Hobby-Mathematiker gilt er als Erfinder der Spiele »Hex«, »Soma-Würfel« und anderer bemerkenswerter Spiele und Puzzles. Er war ein Freund von Norbert Wiener, dessen letztes Buch »God and Golem« ihm gewidmet ist.

## 2. Problemstellung

Die Frage, die sich Piet Hein selber stellte, erwuchs aus einer komplizierten Stadtplanaufgabe im Jahre 1959 in Schweden. Stockholm hatte viele Jahre vorher schon entschieden, einen überfüllten Stadtteil mit alten Häusern und engen Straßen im Herzen der City abzureißen und

neu aufzubauen. Nach dem Zweiten Weltkrieg wurde das umfangreiche und kostspielige Programm begonnen. Zwei neue breite Verkehrsadern, die von Nord nach Süd und Ost nach West laufen, werden durch das Stadtzentrum gelegt. An ihrer Schnittstelle war ein großer rechteckiger Platz geplant, der jetzt Sergels-Platz heißt. In seinem Mittelpunkt befindet sich ein ovales Becken mit Fontänen, umringt von einem ovalen Teich mit einigen hundert kleineren Fontänen. Durch den lichtdurchlässigen Boden des Teiches dringt das Tageslicht in ein ovales Selbstbedienungsrestaurant, das unter Straßenniveau liegt und das von einem ovalen Ring von Säulen und Läden umrundet wird. Noch zwei weitere Stockwerke mit Restaurants und Tanzlokalen sowie Toiletten und Küchen befinden sich darunter.

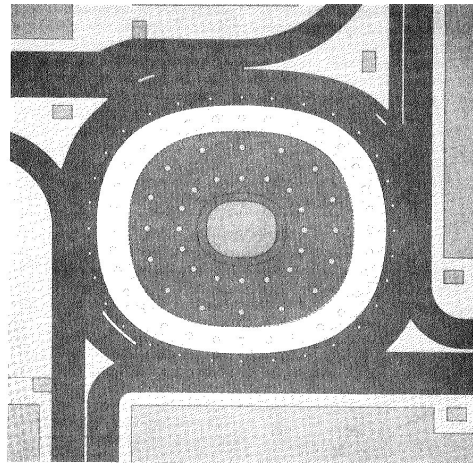


Abbildung 1: Karte von Stockholms Untergrund-Restaurant und dem Wasserbecken darüber

Beim Entwurf der genauen Form des Zentrums gerieten die schwedischen Architekten in unerwartete Schwierigkeiten. Eine elliptische Form wurde verworfen, da ihre spitzen Enden einen reibungslosen Verkehrsfluß störten. Auch harmonierte die Form nicht mit dem rechteckigen Platz. Die Stadtplaner sahen dann einen Verlauf vor, der aus acht runden Bögen bestand, was aber zusammengeflickt aussah, da er häßliche Übergänge an den Verbindungsstellen der acht Bögen besaß. Zusätzlich verlangten die Pläne ineinanderliegende ovale Formen unterschiedlicher Größe, wobei die acht bogenförmigen Krümmungen ein harmonisches Wechselspiel verhinderten.

Bei diesem Stand der Dinge konsultierte das Architektenteam, das für dieses Projekt verantwortlich war, Piet Hein. Es war gerade die richtige Aufgabe für seine aus Mathematik und Kunst kombinierte Vorstellungskraft, seinen Sinn für Humor, sein Geschick, in unüblichen Richtungen schöpferisch zu denken. Welche Art Krümmung, weniger spitz als die einer Ellipse, würde er entwickeln, die ein angenehmes Zusammenwirken und ein harmonisches Einpassen in den rechteckigen offenen Platz im Herzen von Stockholm ermöglichte?

### 3. Variationen von Ellipsen

Um Piet Heins neuartige Antwort zu verstehen, müssen wir zunächst die Ellipsen -wie er es auch tat - als einen speziellen Fall einer Gruppe von Kurven betrachten, deren mathematische Beschreibung in kartesischen Koordinaten mit der Gleichung

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1$$

erfolgt. Darin sind  $a$  und  $b$  unterschiedliche Parameter (beliebige Konstanten), die die beiden Halbachsen der Kurve darstellen, und  $n$  ist irgendeine natürliche Zahl. Die senkrechten Klammern zeigen an, daß jeder Bruch als Absolutwert, d. h. ohne Berücksichtigung seines Vorzeichens, behandelt werden muß. (Auf diese Klammern wird bei einigen später angegebenen Gleichungen verzichtet; nehmen Sie aber an, daß Absolutwerte gemeint sind.)

Wenn  $n = 2$  ist, dann bestimmen die Realwerte von  $x$  und  $y$  die Punkte der Kurve, die eine Ellipse darstellen mit ihrem Mittelpunkt im Ursprung der beiden Koordinaten.

Wenn  $n$  kleiner wird (von 2 nach 1), wird das Oval mehr an den Enden ausgeprägt („Subellipsen“, wie Piet Hein sie nennt).

Für  $n = 1$  wird die Figur ein Parallelogramm.

Wenn  $n$  kleiner als 1 ist, dann werden die vier Seiten konkave Kurven, deren Krümmung immer stärker wird, je mehr  $n$  sich Null nähert.

An der Stelle  $n = 0$  degeneriert die Kurve zu zwei gekreuzten geraden Linien.

Läßt man  $n$  größer als 2 werden, dann flachen die Seiten des Ovals immer stärker ab, und die Kurve wird mehr und mehr einem Rechteck ähnlich.

Selbstverständlich ergibt sich für  $n \rightarrow \infty$  ein Rechteck.

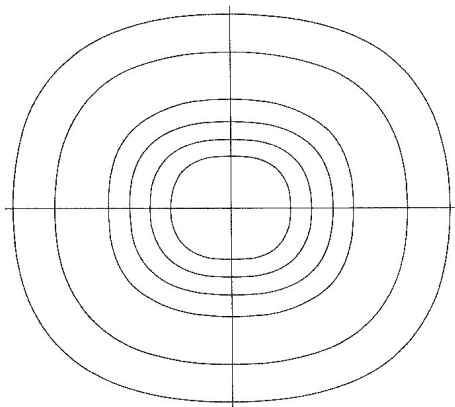


Abbildung 2: Konzentrische Superellipsen

### 4. Berücksichtigung der Ästhetik

An welchem Punkt ist nun eine solche Kurve für das Auge am angenehmsten? Piet Hein bestimmte dafür  $n = 2.5$ . Mit Hilfe eines Computers wurden 400 Koordinatenpaare bis zur 15. Dezimalstelle berechnet und viele größere Kurven, alle mit dem gleichen Höhen-Breiten-Verhältnis, in unterschiedlichen Größen präzise aufgezeichnet. (Das Höhen-Breiten-Verhältnis entsprach den Proportionen des noch nicht gebauten Platzes im Zentrum Stockholms.) Die Kurven erwiesen sich als eigenartig aber doch befriedigend, weder zu rund noch zu rechteckig, ei-

ne glückliche Mischung von elliptischer und rechteckiger Schönheit. Wirken mehrere solcher Kurven, wie in Abbildung 1 und 2 zu sehen, zusammen, so vermitteln sie ein starkes Gefühl von Harmonie und Parallelismus zwischen den konzentrischen Ovalen. Piet Hein nennt solche Kurven mit Exponenten über 2 »Superellipsen«.

Stockholm akzeptierte ohne Zögern die Superellipse mit dem Exponenten 2.5 als Grundmotiv für sein neues Zentrum. Wenn das ganze Zentrum schließlich fertiggestellt ist, wird es sicher eine der größten Attraktionen Schwedens für Touristen werden (ganz gewiß auch für Mathematiker). Schon das große superelliptische Wasserbecken verlieh der Stadt Stockholm ein ungewöhnliches mathematisches Flair ähnlich den großen Kurven der Abspannseile des »Gateway Arch« in St. Louis, die die Skyline dieser Stadt beherrschen.

Inzwischen hat Bruno Mathsson, der bekannte schwedische Möbeldesigner, die Superellipse des Piet Hein mit Begeisterung übernommen. Zuerst stellte er Schreibtische in superelliptischer Form her, die jetzt in den Büros vieler schwedischer Persönlichkeiten stehen. Danach folgten superelliptische Tische, Stühle und Betten. (Wer braucht die Ecken?) Dänische, schwedische, norwegische und finnische Industriefirmen wendeten sich bei der Lösung verschiedener Probleme der Fragen rechteckig gegen kreisförmig an Piet Hein, und so entwarf dieser in den vergangenen Jahren superelliptische Möbel, Eßgeschirre, Servierbretter, Lampen, Silberwaren, Stoffmuster usw. Die Tische, Stühle und Betten sind mit einer weiteren Erfindung von Piet Hein versehen: Mit neuartigen, selbst arretierenden Beinen, die sehr leicht entfernt und wieder angebracht werden können.

### 5. Versuche einer Begründung

»Die Superellipse besitzt die gleiche überzeugende Einheitlichkeit wie Kreis und Ellipse, doch ist sie weniger augenfällig und weniger banal«, schrieb Piet Hein kürzlich in dem führenden dänischen Magazin, das sich mit angewandter Kunst und Industriedesign beschäftigt. (Das weiße Titelblatt dieser Ausgabe des Magazins zeigt nur die schwarze Linie einer Superellipse, unterschrieben mit der Gleichung für die Kurve.) »Die Superellipse ist mehr als eine neue Modetorheit«, fährt Piet Hein fort, »sie ist eine Befreiung aus der Zwangsjacke der einfacheren Kurven erster und zweiter Potenz, der geraden Linie und konischer Abschnitte.« Übrigens darf die Superellipse von Piet Hein nicht mit den außerordentlich ähnlichen, kartoffelförmigen Kurven verwechselt werden, die man oft sieht, besonders an der Frontseite von Fernsehapparaten. Sie sind selten mehr als ein ovales Flickwerk aus unterschiedlichen Arten von Bögen und entbehren auch irgendeiner Formel, die ihnen eine ästhetische Einheit gäbe.

Wenn die Achsen einer Ellipse gleich sind, so ist diese natürlich ein Kreis. Wenn in der Gleichung für einen Kreis  $x^2 + y^2 = 1$  der Exponent 2 durch eine höhere Zahl ersetzt wird, wird die Kurve zu dem, was Piet Hein »Superkreis« nennt. Bei dem Exponenten 2.5 ist dieser ein »genialer quadrierter Kreis« in dem Sinn, daß ein künstlerischer Mittelweg zwischen diesen beiden Exponenten

gefunden wurde. Die unterschiedlichen Kurven, gezeichnet nach der allgemeinen Gleichung  $x^n + y^n = 1$ , für  $n$  von 0 bis unendlich, sind in Abbildung 3 dargestellt. Könnte man die Zeichnung gleichmäßig entlang einer Achse ausdehnen, dann würde sie auch die Kurvengruppen von Ellipsen, Subellipsen und Superellipsen zeigen.

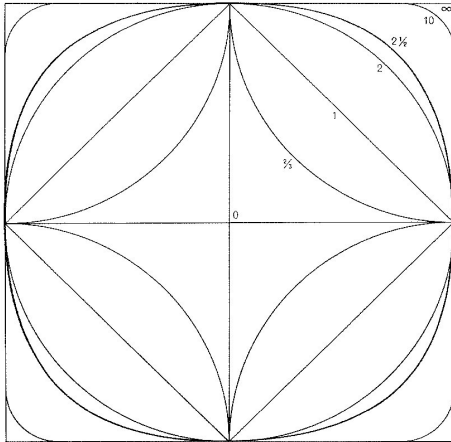


Abbildung 3: Superkreise  
und dazugehörige Kurvenscharen

### 6. Übergang zum Dreidimensionalen

In gleicher Weise kann man die Exponenten der korrespondierenden Gleichungen für Kugeln und Ellipsoide im kartesischen Koordinatensystem vergrößern und erhält das, was Piet Hein »Superkugeln« und »Superellipsoide« nennt. Wenn ihr Exponent 2.5 ist, dann erhalten wir Kugeln und Ellipsoide, die auf halbem Wege zu Würfeln bzw. Quadern sind.

Das echte Ellipsoid mit drei ungleichen Achsen wird durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

beschrieben. Darin sind  $a$ ,  $b$  und  $c$  unterschiedliche Parameter; sie entsprechen der halben Länge einer jeden Achse. Sind diese drei Parameter gleich, dann ist der Körper eine Kugel. Sind zwei Parameter gleich, so ist der Körper ein Rotationsellipsoid oder ein Sphäroid. Man erhält sie durch Rotation einer Ellipse um eine ihrer Achsen. Erfolgt die Rotation um ihre längere Achse, so erhält man ein langes Sphäroid, eine Art von Eiform mit kreisförmigen Querschnitten senkrecht zu seiner Achse.

Es zeigt sich, daß ein massives Modell eines gestreckten Sphäroids gleichmäßiger Dichte ebenso wenig wie ein Hühnerei auf einer seiner Seite stehen kann, wenn man nicht einen Kunstgriff anwendet, der gewöhnlich Kolumbus zugeschrieben wird. Kolumbus kehrte 1493, nachdem er Amerika entdeckt hatte, nach Spanien zurück. Er glaubte aber, das neue Land sei Indien gewesen und daß ihm der Beweis gelungen wäre, daß die Erde sei rund. In Barcelona wurde ein Bankett zu seinen Ehren gegeben. So erzählte Girolamo Benzoni in seinem 1565 in Venedig erschienenen Buch »Die Geschichte der Neuen Welt« (ich zitiere aus einer alten englischen Übersetzung):

*Kolumbus nahm an einer Gesellschaft zusammen mit vielen*

*spanischen Adligen teil ... und einer von diesen wagte zu fragen: »Señor Christopher, auch wenn Sie nicht die Inder gefunden hätten, würden wir nicht unbeeindruckt von einem Mann sein, der die gleichen Dinge unternommen hätte, wie Sie sie taten, hier in unserem eigenen Vaterland Spanien, das voll großer Männer, Könner auf dem Gebiet der Kosmographie und Literatur ist?« Kolumbus antwortete auf diese Worte zunächst nichts und bat nur, man solle ihm ein Ei bringen. Er legte es vor sich auf den Tisch*

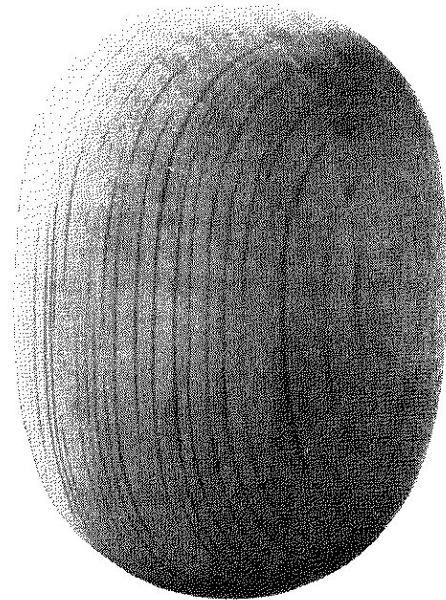


Abbildung 4: Hölzernes Superei  
es kann auf beiden Enden stehen

*und sagte: »Meine Herren, ich möchte eine Wette mit jedem von Ihnen machen, daß er es nicht fertigbringen wird, das Ei so wie es ist und ohne Hilfsmittel zum Stehen zu bringen.« Sie versuchten es alle und keiner hatte Erfolg, das Ei aufzustellen. Nachdem das Ei die Runde gemacht hatte und wieder in die Hände von Kolumbus kam, stellte er es hin, indem er es auf dem Tisch aufschlug, und das Ei an einem Ende einknickte. Alle waren betroffen, da sie verstanden, was er damit sagen wollte: Nachdem eine große Tat vollbracht ist, weiß jeder Mann, wie es gemacht wird.*

### 7. Bezug zur Modellierung einer Kuppel

Die Geschichte mag wahr sein, aber eine verdächtig ähnliche Geschichte ist fünfzehn Jahre früher von Giorgio Vasari in seinem berühmten Buch: »Das Leben der wichtigsten Maler, Bildhauer und Architekten« (Florenz, 1550) erzählt worden. Der junge Filippo Brunelleschi, der italienische Architekt, hatte für die Kathedrale Santa Maria del Fiore in Florenz eine ungewöhnlich große und schwere Kuppel entworfen. Die Vertreter der Stadt baten, sein Modell zu sehen, was er aber ablehnte. Er schlug statt dessen vor, wer auch immer ein Ei aufrecht auf ein glattes Stück Marmor stellen könne, der solle die Kuppel bauen, weil dadurch jedermanns Intellekt erkennbar würde. Deshalb nahmen alle jene Meister ein Ei und versuchten, es aufrecht zu stellen, aber keinem gelang es. Nachdem Filippo dazu aufgefordert wurde, es hinzustellen, nahm er es anmutig in die Hand, gab einem Ende einen Schlag und stellte es so aufrecht hin. Die Handwerker protestierten,

sie hätten das auch tun können, aber Filippo antwortete lachend, daß sie ebenso **das Kuppelgewölbe aufrichten könnten, wenn sie das Modell oder den Entwurf gesehen hätten**. Und so wurde beschlossen, daß er den Auftrag für diese Arbeit erhielt.

Die Geschichte hat aber noch eine Pointe. Als die Kuppel endlich vollendet war (viele Jahre später, aber Jahrzehnte vor der ersten Reise von Kolumbus), besaß sie die **Form eines halben Eies, abgeflacht am oberen Ende**.

### 8. Quintessenz

Was hat dies nun mit den Supereiern zu tun? Nun, ich habe die Geschichten von Kolumbus und Brunelleschi erzählt, da Piet Hein entdeckte, daß ein fester Körper mit dem Exponenten 2.5 - tatsächlich ein Superei mit beliebigen Exponenten - wenn nicht zu hoch in bezug auf seine Breite, sofort auf jedem seiner Enden ohne zusätzliche List stehen kann. Tatsächlich stehen heute Dutzende dieser prallen hölzernen und silbernen Supereier sicher und dauerhaft auf ihren Enden überall in Skandinavien. Betrachten wir das hölzerne Superei in Abbildung 4. Es genügt einer Gleichung mit dem Exponenten 2.5 und einem Höhen-Breiten-Verhältnis von 4 : 3, Es sieht aus, als würde es umkippen, aber es tut es nicht. Diese gespenstische Stabilität, die das Superei auf beiden Seiten besitzt, kann als Symbolik des superelliptischen Gleichgewichts zwischen dem Rechteckigen und dem Runden angesehen werden und gilt wiederum als ein schönes Symbol für das ausgeglichene Wesen von Menschen wie Piet Hein einer ist, die ein erfolgreiches Bindeglied zwischen G. P. Snows »zwei Kulturen« bilden.

## Anhang

### A1. Lamé'sche Kurven

Die Familie der ebenen Kurven, die durch die Gleichung

$$\left| \frac{x}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n = 1$$

beschrieben wird, wurde erstmalig von Gabriel Lamé, einem französischen Physiker des 19. Jahrhunderts, erkannt und untersucht. Er schrieb darüber 1818. In Frankreich werden sie »courbes de Lamé«, in Deutschland »Lamé'sche Kurven« genannt. Die Kurven sind algebraisch, wenn  $n$  rational, und transzendent, wenn  $n$  irrational ist.

Ist  $n = \frac{2}{3}$  und  $a = b$  (siehe Abbildung 3), dann ist die Kurve ein Astroid. Das ist jene Kurve, die von einem Punkt eines Kreises erzeugt wird, der ein Viertel oder drei Viertel des Radius eines größeren Kreises besitzt, indem der kleinere auf dessen Innenseite abgewälzt wird. Solomon W. Golomb wies auf die Tatsache hin, daß bei ungeraden Exponenten  $n$ , und wenn die Zeichen für den Absolutwert nicht berücksichtigt werden, man in der Gleichung der Lamé'schen Kurven eine Familie von Kurven erhält, zu denen die berühmten Zauberkurven von Agnesi gehören. (Die Zauberkurve entspricht  $n = 3$ .) William Hogan schrieb und teilte mit, daß er und auch andere Ingenieure oftmals Parkplatzkurven als Lamé'sche Kurven mit den Exponenten 2.2 realisieren. In den dreißiger Jahren nannte man diese, wie er sagt, »2.2-Ellipsen«.

Wenn eine Superellipse (eine Lamékurve mit einem Exponenten größer als 2) auf ein vorgegebenes Objekt angewendet wird, dann können natürlich sowohl der Exponent als auch die Parameter  $a$  und  $b$  an gegebene Umstände und an das ästhetische Empfinden angepaßt werden. Für den Stockholmer Verkehrsknotenpunkt verwendete Piet Hein die Parameter  $n = 2.5$  und  $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$ . Wenige Jahre später benutzte der Architekt Gerald Robinson aus Toronto die Superellipse für das Parkhaus eines Einkaufszentrums in Peterborough, einem Torontoer Vorort. Länge und Breite sollten das Verhältnis  $\frac{a}{b} = \frac{9}{7}$  haben. Dabei zeigte eine Untersuchung, daß ein Exponent, wenig größer als 2.7, eine Superellipse ergab, die den besten künstlerischen Eindruck hervorrief. Robinson empfahl  $e$  als Exponent (da  $e$  gleich 2,718 ... ist). Dies hat die Konsequenz, schreibt Norman T. Gridgman in seinem informativen Artikel über Lamé'sche Kurven, daß jeder Punkt des Ovals außer den vier Punkten, die auf den Achsen liegen, transzendent ist.

Einige Leser empfahlen andere Parameter. J. D. Turner schlug den Mittelwert der Flächen zwischen den Grenzwerten Kreis und Quadrat oder Rechteck und Ellipse vor, indem er den Exponenten so wählte, daß eine Fläche entstand, die exakt in der Mitte zwischen den beiden Extremflächen lag. D. C. Mandeville fand heraus, daß der Exponent einer Kurve, der die Flächen von Kreis und Quadrat halbiert, sehr nahe bei  $\pi$  liegt und er sich fragt, ob es nicht in Wirklichkeit  $\pi$  ist. Unglücklicherweise ist dies nicht der Fall. Norton Black, der einen Computer benutzte, wies nach, daß dieser Wert ein wenig größer als 3.17 ist. Turner schlug auch einen Mittelwert zwischen Rechteck und Ellipse vor durch Wahl eines Exponenten, bei dem die Kurve durch den Mittelpunkt einer Verbindungslinie zwischen der Ecke des Rechtecks und dem korrespondierenden Punkt auf der Ellipse verläuft.

Turner und Black schlugen eine Konstruktion der Superellipse durch Anwendungen des ästhetisch angenehm wirkenden »goldenen Schnittes« vor, indem sie das Verhältnis  $\frac{a}{b}$  der Regel des goldenen Schnittes entsprechend bestimmten. Turner wählte zur gefälligsten Superellipse das Oval mit den Parametern  $\frac{a}{b}$  im goldenen Verhältnis und  $n = e$ . Michael L. Balinski und Philetus H. Holt empfahlen in ihrem Brief, den die New York Times im Dezember 1968 veröffentlichte, eine goldene Superellipse mit  $n = 2.5$  als beste Form für einen Verhandlungstisch in Paris. Es war zur Zeit, als die Diplomaten die Friedenskonferenz über Vietnam vorbereiteten und sich über die Form des Verhandlungstisches stritten. Balinski und Holt schrieben dazu, man solle die Diplomaten, wenn sie sich nicht über einen Tisch einigen könnten, in ein hohes Superei stecken, und sie so lange schütteln, bis sie sich in »superelliptischer Übereinstimmung« befänden.

Der Sergels-Platz oder Sergel's Torg, wie er auf Schwedisch heißt, ist noch im Bau. Die Straßenebene des Platzes mit dem See und den Springbrunnen ist bereits fertiggestellt. Voraussichtlich wird die Piet-Hein-Arkade darunter mit den Geschäften und Restaurants 1979 vollendet.

## A2. Superellipsoide

Das Superei ist ein Sonderfall unter den Festkörpern, die man Superellipsoide nennt. Die Gleichung für das Superellipsoid ist:

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n + \left|\frac{z}{c}\right|^n = 1$$

Ist  $a = b = c$ , dann bildet der Körper eine Superkugel, deren Form durch Variation der Exponenten zwischen Kugel und Würfel verändert werden kann.

Ist  $a = b$ , dann bildet der Körper ein Superei. Seine Gleichung ist:

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{a}\right|^n + \left|\frac{z}{b}\right|^n = 1$$

Die Gleichung für die Supereier mit kreisförmigen Querschnitten kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\left|\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right|^n + \left|\frac{z}{b}\right|^n = 1$$

## A3. Beweise zur Standfestigkeit

Als ich meinen Artikel über die Superellipse schrieb, glaubte ich, daß jedes massive Superei, basierend auf einem Exponenten größer als 2 und kleiner als unendlich, vorausgesetzt, seine Höhe übertrifft seine Breite nicht zu stark, auf seinen Enden fest stehen würde. Natürlich kann ein massives Superei mit einem unendlich großen Exponenten, das die Form eines Kreiszylinders besitzt, im Prinzip unabhängig von seinem Höhen-Breiten-Verhältnis auf seinen flachen Enden stehen. Aber abgesehen von diesem Sonderfall schien es gefühlsmäßig klar zu sein, daß für jeden Exponenten ein kritisches Verhältnis von Höhe und Breite existiert, von dem an das Ei instabil wird. Tatsächlich veröffentlichte ich sogar für diesen Fall folgenden Beweis:

*Wenn der Schwerpunkt CG eines Eies unterhalb des Mittelpunktes der Krümmung CC der Eigrundfläche am Mittelpunkt der Grundfläche liegt, dann wird das Ei im Gleichgewicht sein. Es ist im Gleichgewicht, da bei jedem Antippen des Eies sich CG nach oben bewegt. Erreicht CG eine Höhe oberhalb CC, so wird das Ei instabil, weil bereits durch das leichteste Antippen CG verschoben werden kann. Um sich das klar zu machen, betrachte man zunächst die Kugel links in Abbildung 5. In der Kugel befinden sich CG und CC am gleichen Punkt: dem Zentrum der Kugel. Für irgendeine Superkugel mit einem Exponenten größer als 2, gezeigt als zweites Bild von links, liegt CC oberhalb von CG, da die Krümmung der Basis des Körpers geringer ist. Je höher der Exponent, um so geringer die Krümmung der Basis, um so höher liegt CC. Nun nehme man an, daß die Superkugel gleichmäßig aufwärts entlang ihrer vertikalen Koordinate ausgedehnt wird und sich dabei zu einem Rotationssuperellipsoid verformt, zu dem was Piet Hein Superei nennt. Bei dieser Ausdehnung bewegt sich CC nach unten und CG nach oben. Selbstverständlich muß es einen Punkt X geben, bei dem CC und CG die gleiche Höhe haben. Bis zum Erreichen dieses entscheidenden Punktes ist das Superei stabil - dritte Skizze von links. Hinter diesem Punkt wird das Superei instabil - rechte Skizze.*

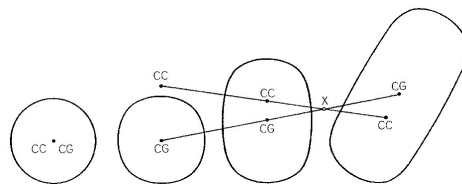


Abbildung 5: Darstellung eines falschen Beweises für die Instabilität eines Supereies

## A4. Fehler im Beweis?

C. E. Gremer, ein ehemaliger U.S.-Navy-Kommandant, war der erste von vielen Lesern, die mich über meine fehlerhafte Beweisführung informierten. Im Gegensatz zu meiner Intuition ist der Krümmungsradius an der Basis aller Supereier unendlich groß! Wenn wir die Höhe eines Supereies ansteigen und seine Breite dabei konstant lassen, bleibt die Krümmung am Fußpunkt flach. Die deutschen Mathematiker nennen diesen Punkt »Flachpunkt«. Die Superellipse besitzt einen ähnlichen Flachpunkt an ihren Enden. Mit anderen Worten: Alle Supereier, unabhängig von ihrem Höhen-Breiten-Verhältnis, sind theoretisch stabil! Wenn ein Superei größer und dünner wird, gibt es natürlich ein kritisches Verhältnis, bei dem eine Auslenkung, die nötig ist, um es umzuwerfen, nahe an Null kommt, für das Faktoren wie inhomogenes Material, unebene Oberfläche, Vibrationen, Luftströmungen usw. es praktisch instabil machen. In einem mathematisch idealen Sinn gibt es kein kritisches Höhen-Breiten-Verhältnis. Und Piet Hein hat es so ausgedrückt: Theoretisch kann man beliebig viele Supereier, jedes drei Zentimeter breit und so hoch wie das EmpireState Building, eins über das andere, Ende auf Ende stellen, und sie werden nicht fallen. Die Bestimmung genauer Kippwinkel, bei denen ein bestimmtes Superei nicht mehr im Gleichgewicht bleiben kann, ist eine knifflige Aufgabe der Berechnung. Viele Leser führten diese durch und schickten ihre Ergebnisse.

Wenn man vom Ausbalancieren von Eiern spricht, so wissen die Leser vielleicht nicht, daß man eigentlich jedes Hühnerei mit seinem breiten Ende auf eine weiche Oberfläche aufstellen kann, wenn man eine ruhige Hand hat und genügend Geduld aufwendet. (Man erreicht nichts, wenn man das Ei zuerst schüttelt, um Eigelb mit Eiweiß zu vermischen.) Noch rätselhafter ist ein Trick, bei dem man ein Ei auf seinem spitzen Ende aufstellen kann. Man streue heimlich eine kleine Menge Salz auf den Tisch und balanciere das Ei darauf aus, aber blase, bevor die Zuschauer gerufen werden, die überschüssigen Salzkörner weg. Die wenigen verbleibenden Salzkörner, die das Ei halten, sind - besonders auf einer weißen Oberfläche - kaum sichtbar. Aus irgendwelchen sonderbaren Gründen wurde das Ausbalancieren von Hühnereiern auf ihren breiten Enden 1945 in China zur Mode - so berichtete es wenigstens »Life« in einer Bildergeschichte vom 9. April 1945.

Das größte Superei der Welt, hergestellt aus Stahl und Aluminium und beinahe eine Tonne schwer, wurde im Oktober 1971 vor Kelvin Hall in Glasgow zu Ehren von Piet Hein aufgestellt, als er dort einen Vortrag anlässlich einer Ausstellung »Modernes Wohnen« hielt. Zweimal

war die Superellipse auf dänischen Briefmarken zu sehen: 1970 auf einer blauen Zwei-Kronen-Marke zu Ehren Bertel Thorwaldsens und 1972 auf einem Weihnachtsstempel zusammen mit Portraits der Königin und des Prinzgemahls.

Überall in der Welt werden in Läden, die sich auf ungewöhnliche Geschenkartikel spezialisiert haben, Supereier mannigfacher Größe und Materials verkauft. Die kleinen massiven Stahleier kennt man auch unter dem Namen »Beamtenspielzeug«. Der beste Spieltrick ist, sie auf einem Ende aufzustellen, sie leicht anzustoßen, und zu bewirken, daß sie sich zunächst ein-, zwei- oder dreimal umdrehen, bevor sie auf dem anderen Ende stehenbleiben. Hohle Supereier, mit Salzlösungen gefüllt, werden als Getränkekühler verkauft, größere Supereier wurden als Zigarettentuis entworfen. Auch kostbare Supereier, die allein als Kunstwerke dienen, wurden hergestellt. Informationen darüber, wie man diese Supereier bekommen kann, ebenso wie Möbel, Geschirr und andere Produkte mit superelliptischem Design, erhält man von Piet Hein Information Center Finsensvej 33, DK-2000 Kopenhagen F, Dänemark.