

Kuppelbau in Potsdam

1. Aufgabe

Es gibt eine geometrisch gut vermessene Kuppel in Potsdam, die neu verkleidet werden soll. Diese Kuppel hat ein Gerüst aus 24 Rippen. Die Rippen sind Kreisbögen; die Kreismittelpunkte dieser Rippen fallen jedoch nicht in einem Punkt zusammen (d.h. die Kuppel ist keine Kugelkuppe).

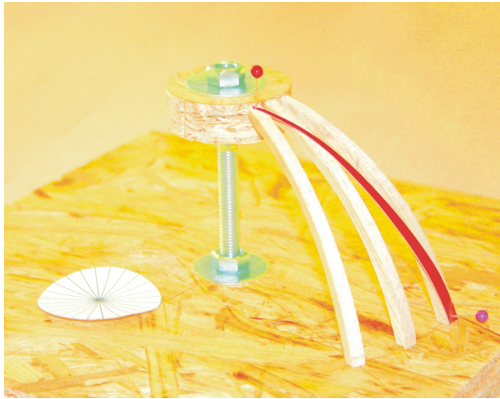


Abbildung 1: Modellbau

Die Rippen sollen in ihrer Position stabil gehalten werden, indem Latten diagonal über jeweils 3 Rippen genagelt werden. Da diese Latten gebogen werden müssen, soll hier berechnet werden, welche Krümmung und welche Torsion bei jeder dieser Latten auftreten. Auf diese Verlattung wird dann eine Metallkuppel über der gesamten Konstruktion angebracht.

2. Modellierung der Kuppel

Die folgenden Maße werden für eine Modellierung verwendet:

Jede Rippe $R(\varphi_i)$ (mit $\varphi_i = i \cdot 15^\circ$ und $i \in \{0, 1, \dots, 23\}$) wird beschrieben durch

$$R(\varphi_i) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i) \cdot [-r_u + r \cdot \cos(\vartheta)] \\ \sin(\varphi_i) \cdot [-r_u + r \cdot \cos(\vartheta)] \\ z_u + r \cdot \sin(\vartheta) \end{pmatrix} ; \vartheta_a \leq \vartheta \leq \vartheta_e \right\}$$

Rippengleichung

mit $r = 4.59 \text{ m}$, $r_u = 0.38 \text{ m}$ und $z_u = -1.02 \text{ m}$

Die Bodenplatte liegt in der Höhe $z = z_a = 0 \text{ m}$, die Kopfplatte befindet sich in der Höhe $z = z_o = 3.34 \text{ m}$. Dann ergeben sich die folgenden Anfangs- und Endwinkel sowie der Radius r_o der Kopfplatte:

$$\vartheta_a = 12.840^\circ, \vartheta_e = 71.785^\circ \text{ und } r_o = 1.055 \text{ m}$$

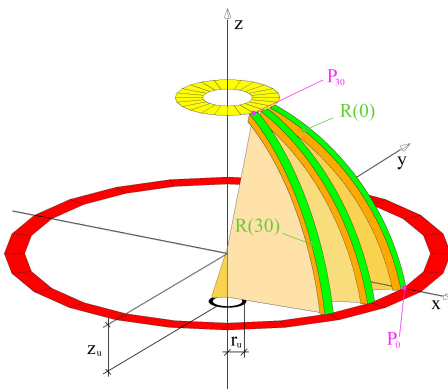


Abbildung 2: Mathematisches Modell

3. Verlattung des Gerüsts

Da geplant ist, durch jede der Holzlatten jeweils drei Rippen (und damit insgesamt 30°) fest miteinander zu verbinden, werden hier nur 3 Rippen modelliert:

Die erste Holzlatte soll an der Rippe $R(0)$ in Höhe der Bodenplatte (im Punkt P_0) und an der Rippe $R(30)$ in Höhe der Kopfplatte (im Punkt P_{30}) angeschraubt werden. Damit sind zwei Punkte für eine Lattenkurve gegeben - falls es überhaupt eine solche gibt.

4. Die Lattenkurve

Idee: Für eine Kugel gilt, dass ein Großkreis jeweils die kürzeste Entfernung zweier Punkte beschreibt. Ein Großkreis ist dabei definiert als Schnittkurve einer Ebene durch den Kugelmittelpunkt mit der Kugel.

Hier soll daher auf der z -Achse ein Punkt P_z gesucht werden, so dass die Verbindungslinie zwischen den Schnittpunkten von

- der Ebene durch P_0 , P_{30} und P_z und
- den 31 Rippen $R(j)$ mit $j \in \{0, 1, 2, \dots, 30\}$ (gemäß Rippengleichung)

minima

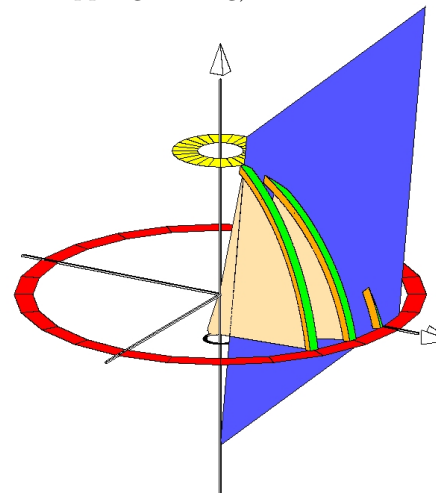


Abbildung 3: Schnitt des Gerüsts aus Rippen mit einer Ebene durch P_0 , P_{30} und $P_z = (0, 0, -0.9)$

Variation des Punktes P_z ergibt folgende Lösungen:

$z_{z,15}$	Lattenlänge	P_{15} auf Rippe $R(15)$
3.0	4.9055	2.423
-3.5	4.8573	3.061
-4.0	4.8561	3.064
-10.0	4.8412	3.087
$-\infty$	4.8712	3.107

Tabelle 1: Zusammenhang zwischen $P_z = (0, 0, z_{z,15})$, Lattenlänge und P_{15}

Tabelle 1 zeigt, dass die Berechnung der Lattenlänge (infolge der Rechenungenauigkeiten bei gradweiser Längenberechnung) nicht zu einer eindeutigen Bestimmung des Punktes P_z führt - und dass sich ferner die Ergebnisse nur sehr gering unterscheiden.

Wir wählen hier daher (willkürlich)

$$P_z = (0, 0, -3.50)$$

Bei dieser Wahl von P_z muss die Latte auf der Rippe $R(15)$ in einer Höhe von 3.06 m vernagelt werden.

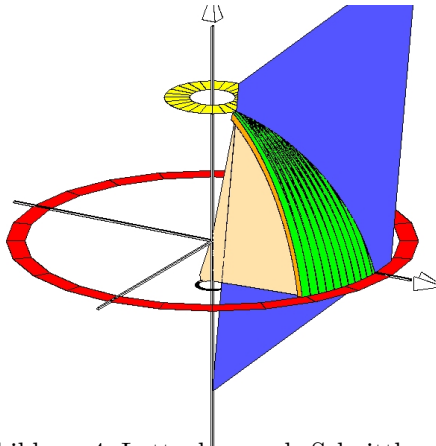


Abbildung 4: Lattenkurve als Schnittkurve 30 Rippen für 30°

5. Der Lattenwinkel

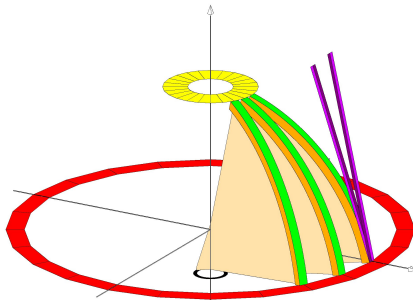


Abbildung 5: Latte geschraubt und gedreht

Es entstand die Frage, unter welchem Winkel gegenüber der Bodenplatte die erste Holzlatte an die Rippe $R(0)$ angeschraubt werden sollte:

Beträgt der Winkel 90° , so würde sich die Latte bei Druck auf das freie Lattende in Richtung auf die Kopfplatte parallel zur x, z -Ebene bewegen.

Gilt dies jedoch auch, wenn der Winkel z.B. 81° beträgt?

6. Die Latte

Die Latten sind zunächst rechteckig und müssen noch entsprechend zugesägt werden. Es lässt sich aufgrund der Kenntnis der Umfänge von Kopf- und Bodenplatte sowie aufgrund der Berechnungen der Lattenwinkel angeben, wie breit eine Latte unten und wie breit sie oben sein müsste.

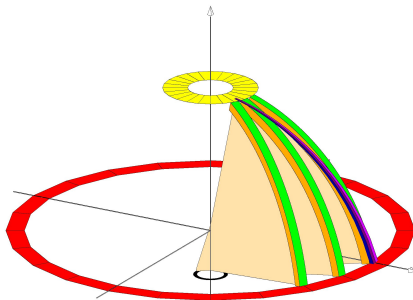


Abbildung 6: die ersten Latten

Wenn z.B. 120 Latten verwendet werden sollen, so müsste die Lattenbreite unten etwa 20 cm und oben etwa 5 cm) betragen.

Es werden die Latten durch jeweils gerade Schnitte

so zugesägt, dass sie oben und unten die geforderten Breiten besitzen (auch wenn zu erwarten ist, dass dann die Kuppel nicht vollständig geschlossen ist).

7. Zwei Latten

Dann lässt sich auch zeigen, wie gross der Schlitz zwischen je zwei Latten sein wird:

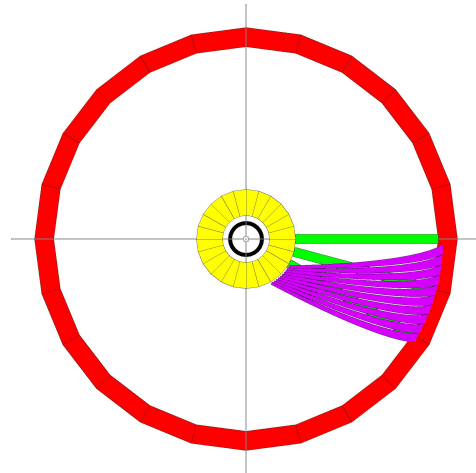


Abbildung 7: Schlitz zwischen den Latten

8. Krümmung

Mit den Normalenrichtungen

- $\vec{n}(0) = (0.975, 0.000, 0.222)$ im Punkt P_0 ,

- $\vec{n}(15) = (0.443, -0.119, 0.889)$ im Punkt P_{15} und

- $\vec{n}(30) = (0.271, -0.156, 0.950)$ im Punkt P_{30} kann die Krümmung berechnet werden, indem jeweils der Cosinus des Winkels zwischen zwei Normalenrichtungen berechnet wird.

Dieser Winkel beschreibt die Krümmung:

Krümmung κ

$\kappa(P_0, P_{15}) = 52^\circ$, bezogen auf die Länge 4.06 m

$\kappa(P_{15}, P_{30}) = 10^\circ$, bezogen auf die Länge 0.81 m

$\kappa(P_0, P_{30}) = 62^\circ$, bezogen auf die Länge 4.87 m

9. Torsion

Entsprechend kann auch die Torsion berechnet werden:

Mit den Binormalenrichtungen

- $\vec{b}(0) = (-0.023, 0.992, 0.102)$ im Punkt P_0 ,

- $\vec{b}(15) = (-0.041, 0.987, 0.152)$ im Punkt P_{15} und

- $\vec{b}(30) = (-0.049, 0.983, 0.176)$ im Punkt P_{30} beschreibt der Winkel zwischen zwei Binormalenrichtungen die Torsion:

Torsion τ

$\tau(P_0, P_{15}) = 8^\circ$, bezogen auf die Länge 4.06 m

$\tau(P_{15}, P_{30}) = 2^\circ$, bezogen auf die Länge 0.81 m

$\tau(P_0, P_{30}) = 10^\circ$, bezogen auf die Länge 4.87 m

Nun kann entschieden werden, welche Holzart diese Anforderungen an Krümmung und Torsion bei welcher Dicke erfüllt, ohne dabei zu brechen.