natürlicher Spline

Problem: Oft wird zu mehreren Punkten (in einer Ebene oder im Raum) eine Kurve gesucht, die genau durch diese Punkte geht. Wenn diese Kurve nicht allzu viele *Wellen* enthalten soll, eignet sich dazu eine *Spline-Interpolation*.

Aufgabe: Es wird ein „natürlicher Spline“ durch die drei Punkte $E_0 = (0,0)$, $E_1 = (-2,-1)$, $E_2 = (0,-2)$ gesucht (siehe Bild).

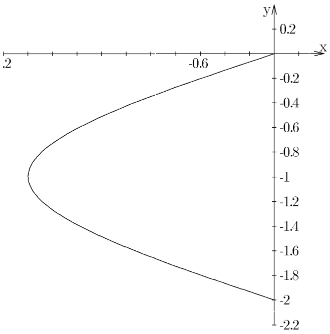

Bild: Natürlicher Spline zwischen den Punkten $(0,0)$, $(-2,-1)$ und $(0,-2)$

Dabei heisst eine Kurve S natürlicher Spline durch die Punkte E_0, E_1 und E_2, wenn gilt:
S setzt sich zusammen aus zwei kubischen Polynomen $\vec{x}|_{[0,1]}(t)$ und $\vec{x}|_{[1,2]}(t)$, wobei

$$\vec{x}|_{[i,i+1]}(t) = (x|_{[i,i+1]}(t), y|_{[i,i+1]}(t)) \quad \text{mit} \quad i \le t \le i+1 \qquad i \in \{0,1,2\}$$

ist mit den Eigenschaften:

1. Für jedes i mit $0 \le i \le 1$ ist $\vec{x}|_{[i,i+1]}(t)$ eine kubische ganzrationale Funktion.
2. Die Krümmung ist am Anfang und am Ende gleich 0,
   und in dem Verbindungspunkt E_1 ändert sich die Krümmung nicht.
   - Die Krümmung in E_0 ist gleich 0.
   - Die Krümmung ändert sich in dem Verbindungspunkt E_1 nicht.
   - Die Krümmung in E_2 ist gleich 0.
3. Die Gesamtkurve hat keinen Knick.
4. Für jedes i mit $0 \le i \le 1$ liegt $E_i = (x_i, y_i)$ auf dieser Kurve
5. Für jedes i mit $0 \le i \le 1$ liegt $E_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$ auf dieser Kurve.

Lösung (Blatt 1/2) zu Aufgabe: natürlicher Spline

Alle Punkte sollen auf einem Spline mit „natürlicher“ Randbedingung liegen, d.h. es soll gelten: zu je zwei benachbarten Punkten E_i und E_{i+1} mit $0 \leq i \leq 1$ werden kubische Polynome

$$x|_{[i,i+1]}(t) \quad \text{und} \quad y|_{[i,i+1]}(t)$$

gesucht, so daß die stückweise durch

$$\vec{x}|_{[i,i+1]}(t) = (x|_{[i,i+1]}(t), y|_{[i,i+1]}(t)) \quad \text{mit} \quad i \leq t \leq i+1$$

beschriebene Kurve folgende Eigenschaften hat:

1. Für jedes i mit $0 \leq i \leq 1$ ist $\vec{x}|_{[i,i+1]}(t)$ ein kubischer Spline, d.h. es gibt Vektoren $\vec{a}_{[i,i+1]}$, $\vec{b}_{[i,i+1]}$, $\vec{c}_{[i,i+1]}$ und $\vec{d}_{[i,i+1]}$ mit

$$\vec{x}|_{[i,i+1]}(t) = \vec{a}_{[i,i+1]} + \vec{b}_{[i,i+1]} \cdot (t-i) + \vec{c}_{[i,i+1]} \cdot (t-i)^2 + \vec{d}_{[i,i+1]} \cdot (t-i)^3 \quad \text{für} \quad i \leq t \leq i+1 \tag{1}$$

2. Die Krümmung ist am Anfang und am Ende gleich 0, und in dem Verbindungspunkt E_1 ändert sich die Krümmung nicht.

   - Die Krümmung in E_0 ist gleich 0, d.h.

$$\vec{c}_{[0,1]} = 0 \tag{2}$$

   - Die Krümmung ändert sich in dem Verbindungspunkt E_1 nicht, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\vec{x}|_{[0,1]}(1) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\vec{x}|_{[1,2]}(0) \\ \text{d.h.} \quad \vec{c}_{[0,1]} + 3 \cdot \vec{d}_{[0,1]} &= \vec{c}_{[1,2]} \end{aligned} \tag{3}$$

   - Die Krümmung in E_2 ist gleich 0, d.h.

$$\vec{c}_{[1,2]} + 3 \cdot \vec{d}_{[1,2]} = 0 \tag{4}$$

3. Die Gesamtkurve hat keinen Knick, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{x}|_{[0,1]}(1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{x}|_{[1,2]}(0)$$

   d.h.

$$\vec{b}_{[0,1]} + 2 \cdot \vec{c}_{[0,1]} + 3 \cdot \vec{d}_{[0,1]} = \vec{b}_{[1,2]} \tag{5}$$

4. Für jedes i mit $0 \leq i \leq 1$ liegt $E_i = (x_i, y_i)$ auf diesem Spline, d.h.

$$(0,0) = E_0 = \vec{x}|_{[0,1]}(0) = \vec{a}_{[0,1]} \tag{6}$$

$$(-2,-1) = E_1 = \vec{x}|_{[1,2]}(0) = \vec{a}_{[1,2]} \tag{7}$$

5. Für jedes i mit $0 \leq i \leq 1$ liegt $E_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$ auf diesem Spline, d.h.

$$\begin{aligned} (-2,-1) = E_1 &= \vec{x}|_{[0,1]}(1) = \vec{a}_{[0,1]} + \vec{b}_{[0,1]} + \vec{c}_{[0,1]} + \vec{d}_{[0,1]} \\ (0,-2) = E_2 &= \vec{x}|_{[1,2]}(1) = \vec{a}_{[1,2]} + \vec{b}_{[1,2]} + \vec{c}_{[1,2]} + \vec{d}_{[1,2]} \end{aligned}$$

   und damit wegen (6) und (7)

$$(-2,-1) = \vec{b}_{[0,1]} + \vec{c}_{[0,1]} + \vec{d}_{[0,1]} \tag{8}$$

$$(0,-2) = (-2,-1) + \vec{b}_{[1,2]} + \vec{c}_{[1,2]} + \vec{d}_{[1,2]} \quad \text{oder} \quad (2,-1) = \vec{b}_{[1,2]} + \vec{c}_{[1,2]} + \vec{d}_{[1,2]} \tag{9}$$

Lösung (Blatt 2/2)

zu Aufgabe: natürlicher Spline

Es gilt also $\vec{a}_{[0,1]} = (0,0)$ nach (6)
und $\vec{a}_{[1,2]} = (-2,-1)$ nach (7)
und $\vec{c}_{[0,1]} = (0,0)$ nach (2)
sowie das folgende lineare Gleichungssystem

Gl	$\vec{b}_{[0,1]}$	$\vec{d}_{[0,1]}$	$\vec{b}_{[1,2]}$	$\vec{c}_{[1,2]}$	$\vec{d}_{[1,2]}$	rechte Seite					
3	0	3	0	-1	0	$(0,0)$		1			
4	0	0	0	1	3	$(0,0)$			1		
5	1	3	-1	0	0	$(0,0)$	X	0	0	0	1
8	1	1	0	0	0	$(-2,-1)$				1	
9	0	0	1	1	1	$(2,-1)$					1

$$\vec{b}_{[1,2]} = \vec{b}_{[0,1]} + 3 \cdot \vec{d}_{[0,1]}$$

3’	0	3	0	-1	0	$(0,0)$	X	1	0	1
4’	0	0	0	1	3	$(0,0)$		1		
8’	1	1	0	0	0	$(-2,-1)$			1	
9’	1	3	0	1	1	$(2,-1)$				1

$$\vec{c}_{[1,2]} = 3 \cdot \vec{d}_{[0,1]}$$

4”	0	3	0	0	3	$(0,0)$	X	0	-1
8”	1	1	0	0	0	$(-2,-1)$		1	
9”	1	6	0	0	1	$(2,-1)$			3

$$\vec{d}_{[1,2]} = -\vec{d}_{[0,1]}$$

8”’	1	1	0	0	0	$(-2,-1)$	X	-3
9”’	3	15	0	0	0	$(6,-3)$		1

$$\vec{b}_{[0,1]} = (-2,-1) - \vec{d}_{[0,1]}$$

9””	0	12	0	0	0	$(12,0)$	X

$$\vec{d}_{[0,1]} = (1,0)$$

also $\vec{d}_{[0,1]} = (1,0)$ und damit $\vec{b}_{[0,1]} = (-2,-1) - (1,0) = (-3,-1)$
und damit $\vec{d}_{[1,2]} = -(1,0) = (-1,0)$
und damit $\vec{c}_{[1,2]} = 3 \cdot (1,0) = (3,0)$
und damit $\vec{b}_{[1,2]} = (-3,-1) + 3 \cdot (1,0) = (0,-1)$

Nach (1) ist dann

$$\begin{aligned} \vec{x}|_{[0,1]}(t) &= (0,0) + (-3,-1) \cdot t + (1,0) \cdot t^3 \quad 0 \le t \le 1 \\ \vec{x}|_{[1,2]}(t) &= (-2,-1) + (0,-1) \cdot (t-1) + (3,0) \cdot (t-1)^2 + (-1,0) \cdot (t-1)^3 \quad 1 \le t \le 2 \end{aligned} \tag{10}$$