AG Qualität

Bestimmung der Federkonstante des Bodens bei einem Falltest

30. Oktober 2002

AG Qualität im Fachbereich Mathematik
Universität Hannover, Welfengarten 1, D - 30167 Hannover / Germany
Telefon: + 49 - 511 - 762 - 3336 oder - 3337 · Telefax: + 49 - 511 - 838 60 72
homepage: http://www-ifm.math.uni-hannover.de/~windelberg
Verantwortlicher Leiter: Dr. Dirk Windelberg

1 Zusammenfassung

Es wird ein (eventuell beladener) Container betrachtet, der auf einen Betonboden fällt. Es wird angenommen, dass der Betonboden wie eine Feder wirkt, d.h. dass es eine Federkonstante k für das System Betonboden/Container gibt, so dass der Weg des Containers in den Beton proportional zu der Kraft ist, mit der der Container auf den Betonboden drückt.

Der Literatur kann diese Federkonstante im allgemeinen nicht entnommen werden. Daher wird hier angenommen, dass bereits ein Fallversuch stattgefunden hat, um dadurch die Federkonstante des Systems Betonboden/Container mit Hilfe der allgemeinen Bewegungsgleichung für den freien Fall zu bestimmen.

Mit dieser Federkonstante kann dann auch für jeden weitern Fall eines Containers auf diesen Boden die maximale Beschleunigung im Aufprallpunkt berechnet werden.

2 Federkonstante des Systems Beton-Boden / Container

2.1 Bewegungsgleichung für den freien Fall

Der Beton-Boden, auf den der Container fiel, wird als eine Feder mit der Federkonstanten k betrachtet. Der fallende Container drückt mit einer Kraft F auf diesen Boden und bewirkt dadurch eine Vertiefung um eine Strecke x. Die Kraft F kann beschrieben werden durch $F = m \cdot b$, wobei m die Masse des Containers (einschließlich seiner Ladung) und b die Beschleunigung ist, die durch die Kraft erzeugt wird.

Hier soll diese Beschleunigung aus den Meßdaten entnommen werden, um die Federkonstante des Betons zu bestimmen:

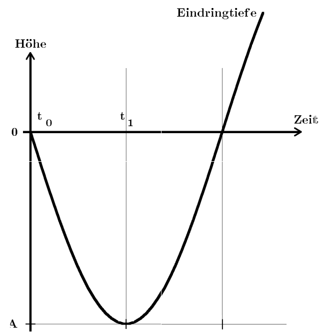

Abb. 1: Bestimmung der Federkonstante

Da $b = \ddot{x}$ ist, ergibt sich die folgende *Bewegungsgleichung B* :

$$F = -k \cdot x \quad \text{und} \quad F = m \cdot b = m \cdot \ddot{x} \quad \text{, also} \quad m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x \tag{B}$$

Ansatz zur Lösung der Bewegungsgleichung: Es wird angenommen, daß es eine ‘Amplitude’ A und eine ‘Frequenz’ ω gibt mit

$$x = x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \text{und damit} \quad \dot{x} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{und} \quad \ddot{x} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{$B1$}$$

Es wird hier nur die Zeit t betrachtet zwischen dem Auftreffen auf den Boden (zur Zeit $t_0 = 0$) und dem ersten tiefsten Eindringen (zur Zeit t_1), also $0 \leq t \leq t_1$.

Mit (*B1*) wird aus (*B*) zunächst $m \cdot \left(-A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)\right) = -k \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ und daher

$$m \cdot \omega^2 = k \quad \text{oder} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \tag{$B2$}$$

Nach (B1) ist die Aufprallgeschwindigkeit $\dot{x} = v_0$ zur Zeit $t = 0$ wegen $\cos(\omega \cdot 0) = 1$ gegeben durch

$$v_0 = A \cdot \omega \quad \text{oder} \quad A = \frac{v_0}{\omega} \tag{$B3$}$$

Da angenommen wird, dass der Betonboden wie eine Feder wirkt, wird der Container wieder zurückfedern, nachdem er den Boden bei dem ersten Aufprall eingedrückt hat.

Randbedingung: Im Zeitpunkt t_1 ist die Geschwindigkeit $\dot{x}$ des Containers $\dot{x}$=0.

Da $v(t) = \dot{x}$ die Geschwindigkeit ist, kann aus dieser Randbedingung mit (*B1*) der Zeitpunkt t_1 bestimmt werden:

$$\dot{x} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t_1) = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega \cdot t_1 = \frac{\pi}{2} \quad \longrightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{2 \cdot \omega} \tag{$B4$}$$

Da $\ddot{x}$ die Beschleunigung ist, wird nach (*B1*) die *maximale Beschleunigung* b_{max} zur Zeit $t = t_1$ erreicht. Damit ist nach (*B1*)

$$b_{max} = \ddot{x}(t_1) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t_1) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -A \cdot \omega^2$$

und weiter nach (*B3*) und (*B2*)

$$b_{max} = -\frac{v_0}{\omega} \cdot \omega^2 = -v_0 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (B5)$$

2.2 Federkonstante aus den Daten eines Fallversuchs

Es wird angenommen, dass bereits ein Fallversuch durchgeführt wurde, wobei folgende Daten dokumentiert wurden:

Fallhöhe (= Höhe des tiefsten Punktes des Containers): $H = 0.3\,m$

Gesamtmasse des (eventuell beladenen) Containers $m = 150\,000\,kg$
Nach den Fallgesetzen beträgt dann die Aufprallgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \approx 2.5\,m/s$.

maximale Beschleunigung an dem Auftreffpunkt P beim Aufprall auf den Betonboden: $b_{(max,P)} = 30\,g$
Mit diesen Daten ergibt sich aus (B5):

$$b_{(max,P)} = 30\,g = 2.5\,m/s \cdot \sqrt{\frac{k}{150\,000\,kg}} \qquad (1)$$

oder

$$k = \left(\frac{30 \cdot 9.81\,m/s^2}{2.5\,m/s}\right)^2 \cdot 150\,000\,kg \approx 2080\,\frac{MN}{m} = 208\,000\,\frac{t}{m} \qquad (2)$$

d.h. zum Eindrücken des Betonbodens um $x = 1\,mm$ wäre eine Kraft von $208\,t$ notwendig.

2.3 maximale Beschleunigung beim Aufprall

Unter der Annahme, daß die Federkonstante des Betonbodens aus der bei dem Fallversuch gemessenen Beschleunigung gemäß (1) und (2) bestimmt wird, kann nun für einen Container mit der Masse m_C und der Aufprallgeschwindigkeit $v_{0,C}$ die maximale Beschleunigung in dem Aufprallpunkt Q nach (*B5*) abgeschätzt werden.

3 Festigkeit des Beton-Bodens

Es gilt nach (B5):

$$b^P_{max} = -v \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

mit folgenden Bezeichnungen

b^P_{max}	:	maximale Beschleunigung in einem Punkt P
k	:	Federkonstante des Systems Beton-Boden/Container-Rahmen
m	:	Masse des im Containerpunkt P auf den Beton-Boden auftreffenden Containers
v	:	Geschwindigkeit beim Auftreffen des Containers auf den Beton-Boden

Daher gilt bei gleicher Masse und gleicher Aufprallgeschwindigkeit:

$$b_{max} \sim \sqrt{k}$$

und daher

je härter der Beton-Boden, desto größer ist die Beschleunigung.

4 Elastizität - Federkonstante

Theorie: Ein Stab mit Querschnitt A und Länge l_0 werde mit einer Kraft F gedrückt/gezogen. Dann ist die Spannung $\sigma = \frac{F}{A}$
Das Ergebnis sei eine Verkürzung/Verlängerung der Länge l_0 auf die Länge l. Dann ist

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Es wird definiert: der Elastizitätsmodul $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$
Der Elastizitätsmodul von Beton beträgt $E_{Beton} = 40\,MPa = 40\,MN/m^2$
Der Elastizitätsmodul von Stahl beträgt $E_{Stahl,min} = 150\,MPa$ bis $E_{Stahl,max} = 310\,MPa$

Der Beton werde um 7 cm=0.07 m eingedrückt. Dann ist $\Delta l = 0.07\,m$ und $\epsilon = \frac{0.07\,\mathrm{m}}{l_0}$ Wie hoch war der Betonblock, auf den der Container fiel (d.h.wie gross war l_0)?

Wie groß ist die Fläche A, die eingedrückt wird, wenn der Container auf auf den Betonblock fällt?

Annahme 1: $A = 1\,000\,cm^2 = 0.1\,m^2$
Annahme 2: Der Container wirkte mit der Kraft F_C auf den Betonboden; $F_C = 0.72\,MN$
Gesucht: l_0.
Wir nehmen an, dass diese Kraft F_C auf die Fläche A drückt. Dann ist

$$\sigma = \frac{0.72}{0.1}\,\frac{MN}{m^2} = 7.2\,MPa$$

Da Beton den Elastizitätsmodul $E_{Beton} = 40\,MPa$ besitzt, ist

$$E_{Beton} = 40\,MPa = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{7.2 \cdot l_0}{0.07}\,\frac{MPa}{m}$$

oder

$$l_0 = 40 \cdot \frac{0.07}{7.2}\,m \approx 0.39\,m$$

Daher wäre die Höhe des Betonblocks 39 cm.

Wenn daraus nach Gleichung (B) die Federkonstante k gerechnet werden soll, dann ist zu berücksichtigen: Innerhalb der Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes herrscht Elastizität. Damit ist die Änderung der Länge Δl proportional zu der aufgewendeten Kraft:

$$k = -\frac{F}{\Delta l} = -\frac{0.72}{0.07}\,\frac{MN}{m} \approx 10\,\frac{MN}{m}$$