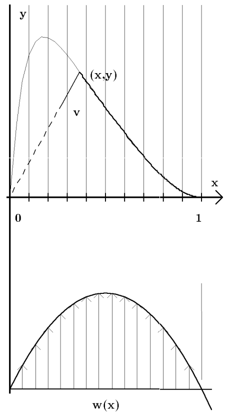
Differentialgleichung Schwimmer in fliessendem Gewässer

Aufgabe: Ein Fluß strömt im Streifen $0 < x < 1$ mit der Wassergeschwindigkeit $\vec{w} = (0, w(x))$. Zur Zeit $t = 0$ startet der Schwimmer im Punkt $(1, 0)$ zur Flußüberquerung. Dabei schwimmt er mit der konstanten Relativgeschwindigkeit v und immer in Richtung auf den Markierungspunkt $(0, 0)$. Geben Sie die Bahnkurve des Schwimmers an für den Fall $w(x) = 2 \cdot x \cdot (1 - x)$.



Geometrie:
In nebenstehendem Bild ist einerseits der Weg des Schwimmers und andererseits die Strömung $w(x)$ dargestellt.

DGL-Lösung:
Es seien $\dot{x} := \frac{dx}{dt}$ und $\dot{y} := \frac{dy}{dt}$. Dann setzt sich die Geschwindigkeit des Schwimmers aus den beiden folgenden Komponenten zusammen:

- infolge Strömung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w(x) \end{pmatrix} \tag{1}$$

- infolge Schwimmbewegung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \cdot \frac{x}{|(x,y)|} \\ -v \cdot \frac{y}{|(x,y)|} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Durch vektorielle Addition ergibt sich daher insgesamt aus (1) und (2):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \cdot \frac{x}{|(x,y)|} \\ -v \cdot \frac{y}{|(x,y)|} + w(x) \end{pmatrix}$$

Die Bahnkurve $y = y(x)$ wird dann durch ihre Ableitung bestimmt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy\,/\,dt}{dx\,/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{x} - \frac{w(x)}{v} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \tag{3}$$

Gleichung (3) stellt eine Differentialgleichung vom Typ

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

dar (*Ähnlichkeits-Differentialgleichung*), die am einfachsten gelöst werden kann, wenn substituiert wird: $z := \frac{y}{x}$. Dann ist nämlich $y = x \cdot z$ und damit $y' = z + x \cdot z'$, also wird aus (3):

$$z + x \cdot z' = z - \frac{w(x)}{v} \cdot \sqrt{1 + z^2} \tag{4}$$

Mit Trennung der Variablen wird aus (4)

$$\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{1}{v} \cdot \frac{w(x)}{x} \quad \text{und damit} \quad \operatorname{arsinh}(z) = -\frac{1}{v} \cdot \int \frac{w(x)}{x}\, dx$$

Für die Strömung $w(x) = 2 \cdot x \cdot (1-x)$ kann das Integral gelöst werden:

$$\operatorname{arsinh}(z) = \frac{1}{v} \cdot (1-x)^2 + c \quad \text{und damit} \quad y = x \cdot \sinh\left(\frac{1}{v} \cdot (x-1)^2\right)$$

Geometrische (iterative) Lösung

Von einem Startpunkt $P_0 = (x_0, y_0)$ erreicht der Schwimmer während eines festzusetzenden Zeitintervalls $\Delta\, t$ den Ort (x_1, y_1), wobei sich Srömungsgeschwindigkeit des Wassers und die Schwimmgeschwindigkeit des Schwimmers vektoriell addieren.

1. Startpunkt: $P_0 = (x_0, y_0)$

2. Stromversetzung: Von diesem Ort wird er während des Zeitintervalles $\Delta\, t$ von der Strömung transportiert:

$$\overline{strom}^{>} = (0, w(x)) \cdot \Delta\, t)$$

3. Schwimmbewegung: In dem gleichen Zeitintervall $\Delta\, t$ schwimmt er in Richtung auf den Punkt $(0, 0)$ um das Stück

$$\overline{schwimm}^{>} = v \cdot \left(\frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, \frac{-y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right) \cdot \Delta\, t$$

also wird der Punkt (x_1, y_1) bestimmt durch

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) &= (x_0, y_0) + \overline{strom}^{>} + \overline{schwimm}^{>} \\
&= (x_0, y_0) + (0, w(x)) \cdot \Delta\, t) - v \cdot \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right) \cdot \Delta\, t \\
&= \left(x_0 + 0 - v \cdot \left[\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right] \cdot \Delta\, t\, ,\, y_0 + w(x) \cdot \Delta\, t - v \cdot \left[\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right] \cdot \Delta\, t\right)
\end{aligned}$$

Ein kleines Programm würde dann unter Verwendung der Strömungsbedingung $w(x) = 2 \cdot x \cdot (1-x)$ etwa wie folgt aussehen:

```
v=.4: x0 = 1: y0 = 0
FOR i = 1 TO 600
j = 1 / 200
x1 = x0 - v * x0 / SQR(x0^2 + y0^2) * j
y1 = y0 + 2 * x0 * (1 - x0) * j - v * y0 / SQR(x0^2 + y0^2) * j
PRINT x1; " "; y1
x0 = x1: y0 = y1: NEXT i
end
```

Damit erhält man die Bahnkurve des Schwimmers als Ergebnis der ersten 600 Zeit-Schritte (siehe den fett gezeichneten Teil der Kurve auf der Vorderseite).