13 Integralrechnung, arithmetisches Mittel

Mittelwertsatz der Integralrechnung Wenn f stetig auf einem Intervall $[a, b]$ ist, so gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = f(c) \cdot (b - a)$$

Geometrische Interpretation: es gibt eine Zahl c, so daß das Rechteck F_R mit der Grundseite $[a, b]$ und der Höhe $f(c)$ den gleichen Flächeninhalt hat wie die Fläche F_K über dem Intervall $[a, b]$ zwischen der Kurve $f(x)$ und der x-Achse, falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$.

Aufgabe 13.1: Zeigen Sie, daß für das **arithmetische Mittel** $m(u, v) = \frac{1}{2} \cdot (u + v)$ zweier Zahlen u und v gilt

$$\boldsymbol{m(u, v) = \frac{1}{v - u} \cdot \int_u^v x \cdot dx}$$

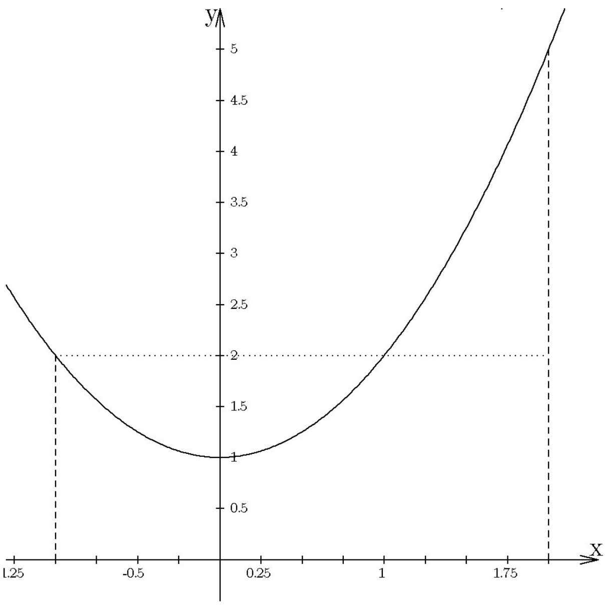
Lösung von Aufgabe 13.1:
Es ist

$$\frac{1}{v-u} \cdot \int_u^v x \cdot dx = \frac{1}{v-u} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=u}^{x=v} = \frac{1}{v-u} \cdot \left[\frac{v^2 - u^2}{2}\right] = \frac{(v+u) \cdot (v-u)}{2 \cdot (v-u)} = \frac{v+u}{2}$$

Aufgabe 13.2
Geben Sie den Mittelwert f_{mitt} für $f(x) = 1 + x^2$ im Intervall $[-1, 2]$ an und kennzeichnen Sie die beiden in der 'geometrischen Interpretation' genannten Flächen.

Lösung von Aufgabe 13.2:
Es ist

$$\begin{aligned} f_{mitt} &= \frac{1}{2 - (-1)} \cdot \int_{-1}^{2} (1 + x^2) \cdot dx \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=2} \\ &= 2 \end{aligned}$$



Aufgabe 13.2: Mittel von $f(x) = 1 + x^2$ im Intervall $[-1, 2]$

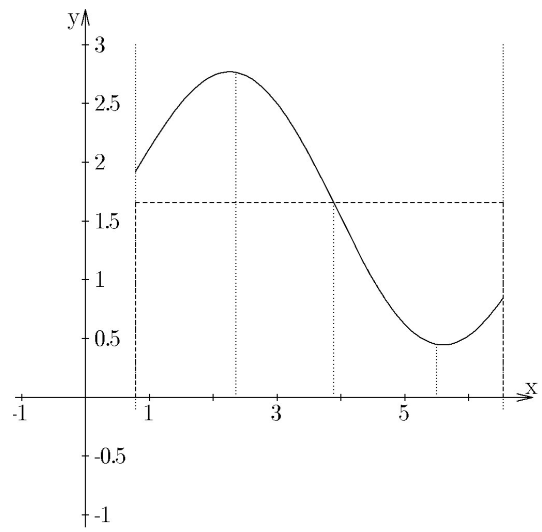
13.3: Geben Sie den Mittelwert f_{mitt} für die Funktion

$$f(x) = 2 - \frac{x}{10} + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{im Intervall } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 11 \cdot \frac{\pi}{6}\right]$$

und kennzeichnen Sie die beiden in der 'geometrischen Interpretation' genannten Flächen F_R und F_K.

Lösung 13.3:
Es ist

$$\begin{aligned} f_{mitt} &= \frac{1}{11 \cdot \frac{\pi}{6}} \cdot \left[2 \cdot x - \frac{x^2}{20} - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]_{x=\frac{\pi}{4}}^{x=\frac{\pi}{4}+11\cdot\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{11 \cdot \frac{\pi}{6}} \cdot \left(\frac{11}{3} \cdot \pi - \frac{77}{360} \cdot \pi^2 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + 1\right) \approx 1.6567 \end{aligned}$$



Aufgabe 13.3: Zum Mittelwertsatz der Intergralrechnung

Aufgabe 13.4: Mittelwertbildung bei Temperaturen

Die Temperatur (in $^\circ C$) in Hannover wird am 10.04.2001 für die Zeit t von 0:00 bis 24:00 Uhr ($0 \leq t \leq 24$) vorhergesagt durch die Funktion $f(t) = 15 + 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{12} - 10\right)$. Berechnen Sie die mittlere Temperatur f_{mitt} im Zeitintervall $[6:40, 18:15]$ und kennzeichnen Sie die beiden in der 'geometrischen Interpretation' genannten Flächen F_R und F_K.

Lösung 13.4:
Nach den Regeln der Substitution (oder nach Formelsammlung) ist

$$\begin{aligned} f_{mitt} &= \frac{1}{\frac{73}{4} - \frac{20}{3}} \cdot \int_{\frac{20}{3}}^{\frac{73}{4}} \left(15 + 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{12} - 10\right)\right) dt \\ &= \frac{12}{139} \cdot \left[15 \cdot t - \frac{60}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{12} - 10\right)\right]_{t=\frac{20}{3}}^{t=\frac{73}{4}} = 13.6 \end{aligned}$$

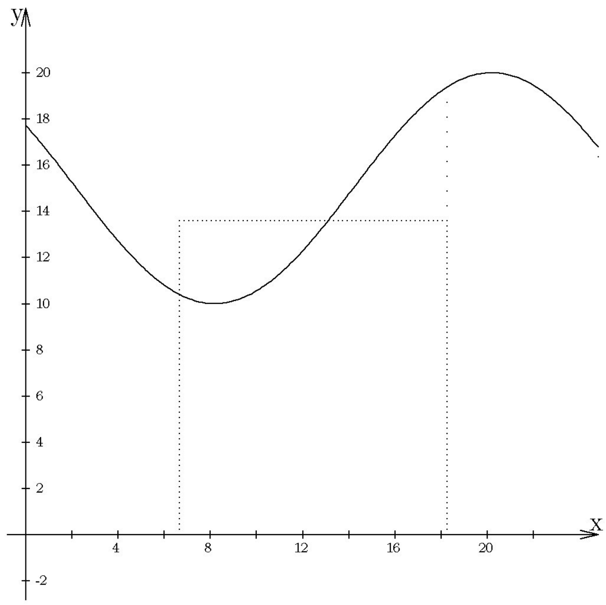


Bild zu Aufgabe 13.4): Zum Mittelwertsatz der Intergralrechnung:
$f(t) = 15 + 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{12} - 10\right)$ zwischen 6:40 Uhr und 18:15 Uhr:
Über dem Zeitintervall $[6.67, 18.25]$ ist
die Fläche des Rechtecks
gleich
der Fläche zwischen x-Achse und Kurve

Substitutionsregel (REP Seite 286)

Für zwei Funktionen $g = g(t)$ und $f = f(g(t))$ gilt:

$$\int f(x) \cdot dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) \cdot dt$$

wobei $x = g(t)$ und $dx = g'(t) \cdot dt$ zu setzen ist.

partielle Integration (REP Seite 288)

Für zwei Funktionen $u = u(x)$ und $v = v(x)$ gilt:

$$\int u' \cdot v \cdot dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \cdot dx$$

Aufgabe 13.5:
Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x \cdot \sin^2(x) \cdot dx$ nach dem Verfahren der partiellen Integration.

Lösung Aufgabe 13.5:
Es ist

$$\int \sin^2(x) \cdot dx = \int \sin(x) \cdot \sin(x) \cdot dx \quad \begin{array}{c} u' := \sin(x) \quad \Rightarrow \quad u = -\cos(x) \\ v := \sin(x) \quad \Rightarrow \quad v' = \cos(x) \\ \hline\hline \end{array}$$

$$-\cos(x) \cdot \sin(x) + \int \cos^2(x) \cdot dx$$

$$= -\cos(x) \cdot \sin(x) + \int (1 - \sin^2(x)) \cdot dx = -\cos(x) \cdot \sin(x) + x - \int \sin^2(x)) \cdot dx$$

also ist

$$\boxed{2 \cdot \int \sin^2(x) \cdot dx = -\cos(x) \cdot \sin(x) + x + C \quad \text{oder} \quad \int \sin^2(x) \cdot dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) + C^*}$$

Hiermit kann diese Aufgabe gelöst werden:

$$\int x \cdot \sin^2(x) \cdot dx \quad \begin{array}{c} u' := \sin^2(x) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(x) \\ v := x \quad \Rightarrow \quad v' = 1 \\ \hline\hline \end{array}$$

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)\right) \cdot x - \int \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)\right) \cdot dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \cdot \sin^2(x) + C^*$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) + \frac{1}{4} \cdot \sin^2(x) + C^*.$$

Aufgabe 13.6:
Geben Sie den Mittelwert f_{mitt} für $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$ im Intervall $[0, \sqrt{\pi}]$ an und kennzeichnen Sie die beiden in der 'geometrischen Interpretation' genannten Flächen.

Lösung von Aufgabe 13.6:

Nach den Regeln der Substitution ist

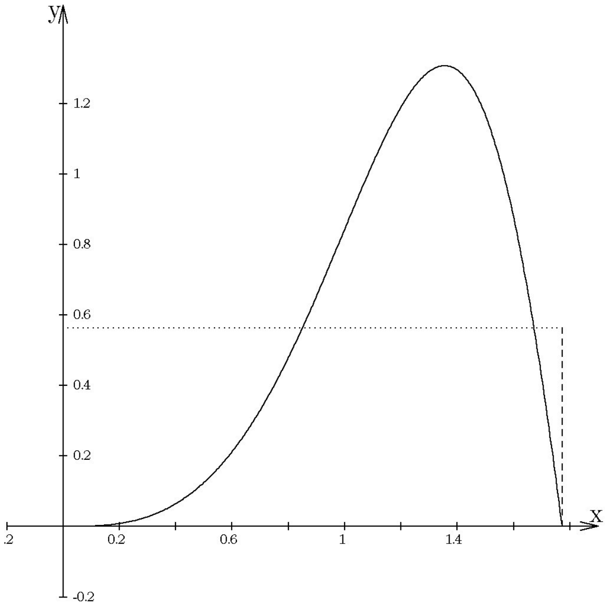
$$\int x \cdot \sin(x^2) \cdot dx \overset{\substack{t := x^2 \quad g(t) = \sqrt{t} \cdot \sin(t) \\ \frac{dt}{dx} = 2 \cdot x = 2 \cdot \sqrt{t}}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \int \sqrt{t} \cdot \sin(t) \cdot \frac{dt}{2 \cdot \sqrt{t}}$$

$$= \int \frac{1}{2} \cdot \sin(t) \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \cos(t)$$

$$\overset{t=x^2}{=\!=} -\frac{1}{2} \cdot \cos(x^2)$$

Daher ist

$$\begin{aligned} f_{mitt} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin(x^2) \cdot dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot \cos\left(x^2\right) \right]_0^{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 1 \approx 0.564 \end{aligned}$$



Aufgabe 13.6: Mittel von $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$ *im Intervall* $[0, \sqrt{\pi}]$