Stand: 18. August 2008
http://www.iazd.uni-hannover.de/∼windelberg/teach/ing

22 Differentialgleichungs-Systeme

lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

Zwei oder mehrere Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ (oder $x(t)$, $y(t)$, ...) bilden ein „lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung“, wenn sie sich beschreiben lassen in der Form

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix} = A(x) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \\ \dots \\ r_n(x) \end{pmatrix}$$

wobei $A(x)$ eine $n \times n$-Matrix und $\overrightarrow{r(x)}$ ein nur von x abhängiger Vektor ist ($\overrightarrow{r(x)}$ wird auch als „Störvektor“ bezeichnet).

Homogenes lineares DGL-System 1. Ordnung ($n = 2$)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A(x) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = A(t) \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Lösungs-Verfahren klassisch

HA Es wird das DGL-System aufgelöst nach $y_1' = ...$ und $y_2' = ...$.

HB Falls y_1' die Variable y_2 enthält, wird

a) die Gleichung $y_1' = ...$ nach y_2 aufgelöst
b) y_1' nach x abgeleitet, so dass y_1'' eine Funktion von y_2' (und eventuell auch von y_2) wird.

Dadurch wird erreicht, dass wir eine DGL in y_1 erhalten, die <u>kein</u> y_2 enthält.

HC In der DGL von y_1 wird y_1 berechnet.

HD Es wird y_2 berechnet (gegebenenfalls in Abhängigkeit von y_1).

HE Die Lösung ist in der Form

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} z_{1,1}(x) \\ z_{1,2}(x) \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} z_{2,1}(x) \\ z_{2,2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{z_1(x)} & \overrightarrow{z_2(x)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \Phi \cdot \vec{C}$$

darzustellen (die Funktionen $\overrightarrow{z_1(x)}$ und $\overrightarrow{z_2(x)}$ sind anzugeben).

Lösungs-Verfahren mechanisch

HM1 Es werden mögliche Eigenwerte λ der Matrix $A(x)$ bestimmt.

HM2 Zu jedem Eigenwert λ_i werden die zugehörigen Eigenvektoren $\overrightarrow{z_i}$ bestimmt.

HM3 Die allgemeine Lösung hat dann folgende Basislösungen (vergl. REP S.448):

a) falls λ_i einfache <u>reelle</u> Nullstelle ist: $e^{\lambda_i \cdot x} \cdot \overrightarrow{z_i}$
b) falls $\lambda_i = a_i + b_i \cdot i$ einfache <u>komplexe</u> Nullstelle ist: $\overline{e^{a_i \cdot x} \cdot (\cos(b_i \cdot x) + i \cdot \sin(b_i \cdot x)) \cdot \overrightarrow{z_i}}$

Aufgabe 22.1:

Lösen Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Lösung (klassisch) von Aufgabe 22.1:

Dieses DGL-System ist ein homogenes DGL-System.

(HA) Wir lösen das DGL-System auf:

$$y_1' = -y_1 \tag{2}$$

$$y_2' = -2 \cdot y_2 \tag{3}$$

(HB) entfällt

(HC) Aus (2) ergibt sich nach dem Verfahren „Trennung der Veränderlichen“ für $f(x) = 1$ und $g(y_1) = -y_1$:

$$\int \frac{d\,y_1}{y_1} = -\int dx \qquad \text{oder} \qquad \ln(|y_1|) = -x + c$$

und damit

$$y_1 = e^{-x} \cdot K_1 \qquad \text{für} \qquad K_1 \in \mathbb{R} \tag{4}$$

(HD) Da y_2 nicht von y_1 abhängig ist, gilt:
Aus (3) ergibt sich nach dem Verfahren „Trennung der Veränderlichen“ für $f(x) = -2$ und $g(y_2) = y_2$:

$$\int \frac{d\,y_2}{y_2} = -2 \cdot \int dx \qquad \text{oder} \qquad \ln(|y_2|) = -2 \cdot x + c$$

und damit

$$y_2 = e^{-2 \cdot x} \cdot K_2 \qquad \text{für} \qquad K_2 \in \mathbb{R} \tag{5}$$

(HE) Insgesamt kann man diese beiden Lösungen (4) und (5) zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = K_1 \cdot e^{-x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K_2 \cdot e^{-2 \cdot x} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\overrightarrow{z_1(x)} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{z_2(x)} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2 \cdot x} \end{pmatrix}$
oder

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K_1 \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K_2 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung (mechanisch) von Aufgabe 22.1:

(HM1) Wir bestimmen die Eigenwerte der Matrix (1), also von $A(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-1-\lambda)\cdot(-2-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = -2 \tag{6}$$

(HM2) Nun suchen wir die zu $\lambda_1 = -1$ (bzw. zu $\lambda_2 = -2$) gehörigen Eigenvektoren, d.h. wir suchen Vektoren $\overrightarrow{z_1}$ (bzw. $\overrightarrow{z_2}$), für die das lineare Gleichungssystem

$$(A(x) - \lambda_1 \cdot E)\cdot \overrightarrow{z_1} = 0 \qquad (\text{bzw. } (A(x) - \lambda_2 \cdot E)\cdot \overrightarrow{z_2} = 0)$$

gilt:

<u>zu $\lambda_1 = -1$:</u> Es gilt für $\overrightarrow{z_1} = \begin{pmatrix} z_{1,1} \\ z_{1,2} \end{pmatrix}$:

$$(A(x) - \lambda_1 \cdot E)\cdot \overrightarrow{z_1} = \begin{pmatrix} -1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & -2-\lambda_1 \end{pmatrix}\cdot \overrightarrow{z_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot \overrightarrow{z_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z_{1,2} \end{pmatrix},$$

und daher folgt aus $(A(x) - \lambda_1 \cdot E)\cdot \overrightarrow{z_1} = 0$

$$\overrightarrow{z_1} = \mathbb{R}\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

<u>zu $\lambda_2 = -2$:</u> Es gilt für $\overrightarrow{z_2} = \begin{pmatrix} z_{2,1} \\ z_{2,2} \end{pmatrix}$:

$$(A(x) - \lambda_2 \cdot E)\cdot \overrightarrow{z_2} = \begin{pmatrix} -1-\lambda_2 & 0 \\ 0 & -2-\lambda_2 \end{pmatrix}\cdot \overrightarrow{z_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot \overrightarrow{z_2} = \begin{pmatrix} z_{1,1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

und daher folgt aus $(A(x) - \lambda_2 \cdot E)\cdot \overrightarrow{z_2} = 0$

$$\overrightarrow{z_2} = \mathbb{R}\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

(HM3) Dann kann die Gesamtlösung bestimmt werden:

Die Basislösung zu dem einfachen reellen Eigenwert $\lambda_1 = -1$ lautet nach (7)

$$e^{-x}\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Basislösung zu dem einfachen reellen Eigenwert $\lambda_2 = -2$ lautet nach (8)

$$e^{-2\cdot x}\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = K_1 \cdot e^{-x}\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K_2 \cdot e^{-2\cdot x}\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 22.2:
Lösen Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad a > 0 \text{ und } b > 0 \tag{9}$$

Bestimmen Sie die Lösungskurven dieses Systems für $a = b = 2$ und geben Sie in diesem Fall die spezielle Lösung an

a) durch den Punkt $(y_1(0), y_2(0)) = (5, 3)$
b) durch den Punkt $(y_1(0), y_2(0)) = (3, 5)$

Lösung (klassisch) von Aufgabe 22.2:
Dieses DGL-System ist ein homogenes DGL-System.

(HA) Wir lösen das DGL-System auf:

$$y_1' = a \cdot y_2 \tag{10}$$

$$y_2' = b \cdot y_1 \tag{11}$$

(HB) Da y_1' die Variable y_2 enthält, rechnen wir

a) (Auflösung der Gleichung (10) nach y_2:)

$$y_2 = \frac{1}{a} \cdot y_1' \tag{12}$$

b) (Aus (10) wird y_1'' berechnet:)

$$y_1'' = a \cdot y_2'$$

und es wird y_2' aus (11) eingesetzt:

$$y_1'' = a \cdot b \cdot y_1 \qquad \text{oder} \qquad y_1'' - a \cdot b \cdot y_1 = 0 \tag{13}$$

(HC) (13) ist eine „lineare DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten“, also mit

$$\text{Ansatz:} \qquad y_1 = e^{\lambda \cdot x} \tag{14}$$

Dann ergibt sich durch Einsetzen in (13) die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - a \cdot b = 0 \qquad \text{oder} \qquad \lambda = \pm\sqrt{a \cdot b}$$

und damit

$$y_1 = K_1 \cdot e^{\sqrt{a \cdot b} \cdot x} + K_2 \cdot e^{-\sqrt{a \cdot b} \cdot x} \tag{15}$$

(HD) Da y_2 von y_1 abhängig ist, gilt:
Aus (15) ergibt sich

$$y_1' = K_1 \cdot \sqrt{a \cdot b} \cdot e^{\sqrt{a \cdot b} \cdot x} - K_2 \cdot \sqrt{a \cdot b} \cdot e^{-\sqrt{a \cdot b} \cdot x}$$

und damit nach(12):

$$y_2 = K_1 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot e^{\sqrt{a \cdot b} \cdot x} - K_2 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot e^{-\sqrt{a \cdot b} \cdot x} \tag{16}$$

(HE) Insgesamt kann man diese beiden Lösungen (15) und (16) zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = K_1 \cdot e^{\sqrt{a \cdot b} \cdot x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{b}{a}} \end{pmatrix} + K_2 \cdot e^{-\sqrt{a \cdot b} \cdot x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{b}{a}} \end{pmatrix}$$

mit $\overrightarrow{z_1(x)} = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{a \cdot b} \cdot x} \\ \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot e^{\sqrt{a \cdot b} \cdot x} \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{z_2(x)} = \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{a \cdot b} \cdot x} \\ -\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot e^{-\sqrt{a \cdot b} \cdot x} \end{pmatrix}$

oder

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = K_1 \cdot e^{\sqrt{a \cdot b} \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{b}{a}} \end{pmatrix} + K_2 \cdot e^{-\sqrt{a \cdot b} \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{b}{a}} \end{pmatrix} \tag{17}$$

<u>Lösungskurven für $a = b = 2$:</u> Aus (17) ergibt sich in diesem Fall

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = K_1 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + K_2 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

durch

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = K_1 \cdot e^{2 \cdot 0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + K_2 \cdot e^{-2 \cdot 0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 \\ K_1 - K_2 \end{pmatrix}$$

also $K_1 + K_2 = 5$ und $K_1 - K_2 = 3$, d.h. $K_1 = 4$ und $K_2 = 1$.

durch

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = K_1 \cdot e^{2 \cdot 0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + K_2 \cdot e^{-2 \cdot 0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 \\ K_1 - K_2 \end{pmatrix}$$

also $K_1 + K_2 = 3$ und $K_1 - K_2 = 5$, d.h. $K_1 = 4$ und $K_2 = -1$.

Lösung (mechanisch) von Aufgabe 22.2:

(HM1) Wir bestimmen die Eigenwerte der Matrix aus (9), also von $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a \\ b & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - a \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \sqrt{a \cdot b} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\sqrt{a \cdot b} \tag{19}$$

(HM2) Nun suchen wir die zu $\lambda_1 = \sqrt{a \cdot b}$ (bzw. zu $\lambda_2 = -\sqrt{a \cdot b}$) gehörigen Eigenvektoren, d.h. wir suchen Vektoren $\overrightarrow{z_1}$ (bzw. $\overrightarrow{z_2}$), für die das lineare Gleichungssystem

$$(A(x) - \lambda_1 \cdot E) \cdot \overrightarrow{z_1} = 0 \qquad (\text{ bzw. } (A(x) - \lambda_2 \cdot E) \cdot \overrightarrow{z_2} = 0)$$

gilt:

<u>zu $\lambda_1 = \sqrt{a \cdot b}$:</u> Es gilt für $\overrightarrow{z_1} = \begin{pmatrix} z_{1,1} \\ z_{1,2} \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}(A(x) - \lambda_1 \cdot E) \cdot \overrightarrow{z_1} &= \begin{pmatrix} -\lambda_1 & a \\ b & -\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{z_1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{a \cdot b} & a \\ b & -\sqrt{a \cdot b} \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{z_1} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{a \cdot b} \cdot z_{1,1} + a \cdot z_{1,2} \\ b \cdot z_{1,1} - \sqrt{a \cdot b} \cdot z_{1,2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und daher folgt aus $(A(x) - \lambda_1 \cdot E) \cdot \overrightarrow{z_1} = 0$

$z_{1,1}$	$z_{1,2}$	r.S.	Regie	
$-\sqrt{a \cdot b}$	a	0	b	
$\boxed{b}$	$-\sqrt{a \cdot b}$	0	$\sqrt{a \cdot b}$	$b \cdot z_{1,1} = \sqrt{a \cdot b} \cdot z_{1,2}$
0	$a \cdot b - a \cdot b$	0		

also

$$0 \cdot z_{1,2} = 0,$$

d.h. wir können $z_{1,2}$ als Parameter wählen.

Wir wählen $z_{1,2} = 1$. Dann ist $z_{1,1} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ und damit

$$\overrightarrow{z_1} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{a}{b}} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

<u>zu $\lambda_2 = -\sqrt{a \cdot b}$:</u> Es gilt für $\overrightarrow{z_2} = \begin{pmatrix} z_{2,1} \\ z_{2,2} \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}(A(x) - \lambda_2 \cdot E) \cdot \overrightarrow{z_2} &= \begin{pmatrix} -\lambda_2 & a \\ b & -\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{z_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{a \cdot b} & a \\ b & \sqrt{a \cdot b} \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{z_2} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{a \cdot b} \cdot z_{2,1} + a \cdot z_{2,2} \\ b \cdot z_{2,1} + \sqrt{a \cdot b} \cdot z_{2,2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und daher folgt aus $(A(x) - \lambda_2 \cdot E) \cdot \overrightarrow{z_2} = 0$

$z_{2,1}$	$z_{2,2}$	r.S.	Regie	
$\sqrt{a \cdot b}$	a	0	b	
$\boxed{b}$	$\sqrt{a \cdot b}$	0	$-\sqrt{a \cdot b}$	$b \cdot z_{2,1} = -\sqrt{a \cdot b} \cdot z_{2,2}$
0	$a \cdot b - a \cdot b$	0		

also

$$0 \cdot z_{2,2} = 0,$$

d.h. wir können $z_{2,2}$ als Parameter wählen.

Wir wählen $z_{2,2} = 1$. Dann ist $z_{2,1} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ und damit

$$\overrightarrow{z_2} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{a}{b}} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

(HM3) Dann kann die Gesamtlösung bestimmt werden:

Die Basislösung zu dem einfachen reellen Eigenwert $\lambda_1 = \sqrt{a \cdot b}$ lautet nach (20)

$$e^{\sqrt{a \cdot b} \cdot x} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{a}{b}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Basislösung zu dem einfachen reellen Eigenwert $\lambda_2 = -\sqrt{a \cdot b}$ lautet nach (21)

$$e^{-\sqrt{a \cdot b} \cdot x} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{a}{b}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus wird die Gesamtlösung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{\sqrt{a \cdot b} \cdot x} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{a}{b}} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{a \cdot b} \cdot x} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{a}{b}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Vergleich mit (17) zeigt, dass beide Verfahren zu der gleichen Lösung führen (es ist $K_i = C_i \cdot \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ für $i \in \{1, 2\}$).

Aufgabe 22.3:

Lösen Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Lösung (klassisch) von Aufgabe 22.3:

Dieses DGL-System ist ein homogenes DGL-System.

(HA) Wir lösen das DGL-System auf:

$$y_1' = 3 \cdot y_1 - 5 \cdot y_2 \tag{23}$$

$$y_2' = 2 \cdot y_1 + y_2 \tag{24}$$

(HB)

$$5 \cdot y_2 = -y_1' + 3 \cdot y_1 \tag{25}$$

$$y_1'' = 3 \cdot y_1' - 5 \cdot y_2' \tag{26}$$

(24) und (25) eingesetzt in (26):

$$y_1'' = 3 \cdot y_1' - 5 \cdot (2 \cdot y_1 + y_2) = 3 \cdot y_1' - 10 \cdot y_1 - (-y_1' + 3 \cdot y_1)$$

also

$$y_1'' = 4 \cdot y_1' - 13 \cdot y_1 \quad \text{oder} \quad y_1'' - 4 \cdot y_1' + 13 \cdot y_1 = 0 \tag{27}$$

(HC) (27) ist eine „lineare Gleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten", also

$$\text{Ansatz:} \quad y_1 = e^{\lambda \cdot x} \tag{28}$$

Dann ergibt sich durch Einsetzen in (27) die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 4 \cdot \lambda + 13 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = 2 \pm 3 \cdot i$$

und damit

$$y_1 = K_1 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot \cos(3 \cdot x) + K_2 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot \sin(3 \cdot x) = e^{2 \cdot x} \cdot [K_1 \cdot \cos(3 \cdot x) + K_2 \cdot \sin(3 \cdot x)] \tag{29}$$

(HD) Da y_2 in(25) von y_1 abhängig ist, wird zunächst y_1' nach (29) bestimmt:

$$\begin{aligned} y_1' &= e^{2 \cdot x} \cdot [2 \cdot (K_1 \cdot \cos(3 \cdot x) + K_2 \cdot \sin(3 \cdot x)) + (-3 \cdot K_1 \cdot \sin(3 \cdot x) + 3 \cdot K_2 \cdot \cos(3 \cdot x))] \\ &= e^{2 \cdot x} \cdot [\sin(3 \cdot x) \cdot (-3 \cdot K_1 + 2 \cdot K_2) + \cos(3 \cdot x) \cdot (2 \cdot K_1 + 3 \cdot K_2)] \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} y_2 &= -\frac{1}{5} \cdot y_1' + \frac{3}{5} \cdot y_1 \\ &= -\frac{1}{5} \cdot \underbrace{e^{2 \cdot x} \cdot [\sin(3 \cdot x) \cdot (-3 \cdot K_1 + 2 \cdot K_2) + \cos(3 \cdot x) \cdot (2 \cdot K_1 + 3 \cdot K_2)]}_{y_1'} \\ &\quad + \frac{3}{5} \cdot \underbrace{\left[K_1 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot \cos(3 \cdot x) + K_2 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot \sin(3 \cdot x)\right]}_{y_1} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} y_2 &= K_1 \cdot e^{2\cdot x} \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot \cos(3 \cdot x) + \frac{3}{5} \cdot \sin(3 \cdot x)\right] \\ &\quad + K_2 \cdot e^{2\cdot x} \cdot \left[-\frac{3}{5} \cdot \cos(3 \cdot x) + \frac{1}{5} \cdot \sin(3 \cdot x)\right] \end{aligned} \tag{30}$$

(HE) Insgesamt kann man diese beiden Lösungen (29) und (30) zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= K_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{2\cdot x} \cdot \cos(3 \cdot x) \\ e^{2\cdot x} \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot \cos(3 \cdot x) + \frac{3}{5} \cdot \sin(3 \cdot x)\right] \end{pmatrix} \\ &\quad + K_2 \cdot \begin{pmatrix} e^{2\cdot x} \cdot \sin(3 \cdot x) \\ e^{2\cdot x} \cdot \left[-\frac{3}{5} \cdot \cos(3 \cdot x) + \frac{1}{5} \cdot \sin(3 \cdot x)\right] \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{31}$$

mit

$\overrightarrow{z_1(x)} = \begin{pmatrix} e^{2\cdot x} \cdot \cos(3 \cdot x) \\ e^{2\cdot x} \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot \cos(3 \cdot x) + \frac{3}{5} \cdot \sin(3 \cdot x)\right] \end{pmatrix}$

und

$\overrightarrow{z_2(x)} = \begin{pmatrix} e^{2\cdot x} \cdot \sin(3 \cdot x) \\ e^{2\cdot x} \cdot \left[-\frac{3}{5} \cdot \cos(3 \cdot x) + \frac{1}{5} \cdot \sin(3 \cdot x)\right] \end{pmatrix}$

oder

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= K_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{2\cdot t} \cdot \cos(3 \cdot t) \\ e^{2\cdot t} \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot \cos(3 \cdot t) + \frac{3}{5} \cdot \sin(3 \cdot t)\right] \end{pmatrix} \\ &\quad + K_2 \cdot \begin{pmatrix} e^{2\cdot t} \cdot \sin(3 \cdot t) \\ e^{2\cdot t} \cdot \left[-\frac{3}{5} \cdot \cos(3 \cdot t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(3 \cdot t)\right] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung (mechanisch) von Aufgabe 22.3:

(HM1) Wir bestimmen die Eigenwerte der Matrix aus (22), also von $A(x) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda^2 - 4 \cdot \lambda + 13 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 3 \cdot i \end{aligned} \tag{32}$$

(HM2) Nun suchen wir die zu $\lambda_1 = 2 + 3 \cdot i$ gehörigen Eigenvektoren, d.h. wir suchen Vektoren $\overrightarrow{z_1}$, für die das lineare Gleichungssystem

$$(A(x) - \lambda_1 \cdot E) \cdot \overrightarrow{z_1} = 0$$

gilt:

<u>zu $\lambda_1 = 2 + 3i$:</u> Es gilt für $\overrightarrow{z_1} = \begin{pmatrix} z_{1,1} \\ z_{1,2} \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}(A(x) - \lambda_1 \cdot E) \cdot \overrightarrow{z_1} &= \begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & -5 \\ 2 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{z_1} = \begin{pmatrix} 1-3\cdot i & -5 \\ 2 & -1-3\cdot i \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{z_1} \\ &= \begin{pmatrix} (1-3\cdot i)\cdot z_{1,1} - 5\cdot z_{1,2} \\ 2\cdot z_{1,1} - (1+3\cdot i)\cdot z_{1,2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und daher folgt aus $(A(x) - \lambda_1 \cdot E) \cdot \overrightarrow{z_1} = 0$

$z_{1,1}$	$z_{1,2}$	r.S.	Regie	
$1-3\cdot i$	-5	0	-2	
$\boxed{2}$	$-1-3\cdot i$	0	$1-3\cdot i$	$z_{1,1} = \frac{1}{2}\cdot(1+3\cdot i)\cdot z_{1,2}$
0	$10+(-1-3\cdot i)\cdot(1-3\cdot i)$	0		

also

$$(10 + (-1-3\cdot i)\cdot(1-3\cdot i))\cdot z_{1,2} = 0$$

oder

$$(10 - 1 + 9\cdot i^2)\cdot z_{1,2} = 0$$

oder

$$0 \cdot z_{1,2} = 0,$$

d.h. wir können $z_{1,2}$ als Parameter wählen.

Wir wählen $z_{1,2} = 1 - 3\cdot i$. Dann ist $z_{1,1} = 5$ und damit

$$\overrightarrow{z_1} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3\cdot i \end{pmatrix} \qquad (33)$$

(HM3) Dann kann die Gesamtlösung bestimmt werden:

Die Basislösung zu dem einfachen komplexen Eigenwert $\lambda_1 = 2 + 3\cdot i$ lautet nach (33)

$$e^{2\cdot x}\cdot(\cos(3\cdot x) + i\cdot\sin(3\cdot x))\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 1-3\cdot i \end{pmatrix}$$

Das können wir auch anders schreiben:

$$e^{2\cdot x}\cdot(\cos(3\cdot x) + i\cdot\sin(3\cdot x))\cdot\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - i\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$$

und dann können wir auch noch das Produkt ausrechnen:

$$e^{2\cdot x}\cdot\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\cos(3\cdot x) + i\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\sin(3\cdot x) - i\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\cos(3\cdot x) - i^2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\sin(3\cdot x)\right]$$

also bleibt als Basislösung übrig:

$$e^{2\cdot x}\cdot\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\cos(3\cdot x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\sin(3\cdot x) + i\cdot\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\sin(3\cdot x) - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\cos(3\cdot x)\right]\right] \qquad (34)$$

Daraus wird die Gesamtlösung, die sich aus Real- und Imaginärteil zusammensetzt:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= C_1\cdot e^{2\cdot x}\cdot\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\cos(3\cdot x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\sin(3\cdot x)\right] \\ &\quad + C_2\cdot e^{2\cdot x}\cdot\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\sin(3\cdot x) - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\cos(3\cdot x)\right]\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (31) zeigt, dass beide Verfahren zu der gleichen Lösung führen.

Inhomogenes Differentialgleichungssystem mit $n = 2$ Variablen

Vorgehensweise:

(AA) Das homogene DGL-System ist zu lösen und die Lösung in der Form
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{z_1(x)} & \overrightarrow{z_2(x)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \Phi \cdot \vec{C}$$
darzustellen.

(AB) Variation der Konstanten für die Lösung des homogenen DGL-Systems:
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \Phi \cdot \overrightarrow{C(x)}$$

Aufgabe 22.4:

Lösen Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Lösung von Aufgabe 22.4:

(AA) Das homogene DGL-System lautet:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad x > 0 \tag{36}$$

(HA) Nach Ausmultiplizieren der Gleichung (36) erhalten wir 2 Gleichungen:

$$y_1' = \frac{1}{x} \cdot y_1 - y_2 \tag{37}$$

$$y_2' = \frac{1}{x^2} \cdot y_1 + \frac{2}{x} \cdot y_2 \tag{38}$$

(HB) Da y_1' in (37) die Variable y_2 enthält, wird (37) nach y_2 aufgelöst:

$$y_2 = \frac{1}{x} \cdot y_1 - y_1' \tag{39}$$

und es soll nach (HB) y_1'' aus (37) durch Differenzieren nach x gebildet werden:

$$y_1'' = -\frac{1}{x^2} \cdot y_1 + \frac{1}{x} \cdot y_1' - y_2' \tag{40}$$

Daraus ergibt sich dann als DGL in y_1 - ohne die Variable y_2:

$$y_1'' = -\frac{1}{x^2} \cdot y_1 + \frac{1}{x} \cdot y_1' - \underbrace{\left(\frac{1}{x^2} \cdot y_1 + \frac{2}{x} \cdot y_2\right)}_{y_2'} = -\frac{2}{x^2} \cdot y_1 + \frac{1}{x} \cdot y_1' - \frac{2}{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \cdot y_1 - y_1'}_{(y_2)} \tag{41}$$

also ergibt sich eine DGL in nur einer Variablen y_1:

$$y_1'' = -\frac{4}{x^2} \cdot y_1 + \frac{3}{x} \cdot y_1' \tag{42}$$

Durch Multiplikation mit x^2 wird daraus:

$$x^2 \cdot y_1'' - 3 \cdot x \cdot y_1' + 4 \cdot y_1 = 0 \tag{43}$$

(HC) Nun bemühen wir uns, diese Differentialgleichung zu lösen:
Die Differentialgleichung ist höherer (zweiter) Ordnung, und die Koeffizienten sind nicht konstant; sie genügen jedoch der Vorschrift

$$\boxed{x^n \cdot y_1^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot x \cdot y_1' + a_0 \cdot y_1 = 0 \quad \text{mit} \quad x > 0}$$

d.h. (43) ist eine Eulersche DGL, bei der man mit dem Ansatz $y_1 = e^t$ oder $y_1 = x^\lambda$ weiterrechnen kann.
(Es gibt Menschen, die halten es für naheliegend, den Ansatz $y_1 = x^\lambda$ zu wählen und für λ ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{N}$ (nach Voraussetzung ist $x > 0$) zu suchen.)
Wir wählen also

$$\text{Ansatz:} \quad y_1 = x^\lambda \tag{44}$$

Dann ist $y_1' = \lambda \cdot x^{\lambda-1}$ und $y_1'' = \lambda \cdot (\lambda -) \cdot x^{\lambda-2}$, also ergibt sich durch Einsetzen in (43)

$$\lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot x^\lambda - 3 \cdot \lambda \cdot x^\lambda + 4 \cdot x^\lambda = 0$$

und Division mit x^λ ergibt

$$\lambda \cdot (\lambda - 1) - 3 \cdot \lambda + 4 = 0 \quad \text{oder} \quad (\lambda - 2)^2 = 0 \tag{45}$$

Diese charakteristische Gleichung besitzt $\lambda = 2$ als doppelte reelle Nullstelle. Nach REP 16.63[1]) erhält man zu der Basislösung $y_1 = x^2$ die noch fehlenden Basislösungen dadurch, dass man die vorhandene Lösung entsprechend oft mit $\ln(x)$ multipliziert, also hier einmal. Folglich erhalten wir die Basislösungen

$$\boxed{x^2 \qquad \text{und} \qquad x^2 \cdot \ln(x)}$$

also

$$y_1 = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x^2 \cdot \ln(x) \tag{46}$$

(HD) Da in (39) die Variable y_2 in Abhängigkeit von y_1 dargestellt wird, ist zunächst y_1' auszurechnen:
Es ist

$$y_1' = 2 \cdot C_1 \cdot x + C_2 \cdot [x + 2 \cdot x \cdot \ln(x)] \tag{47}$$

Nach (39) ist dann mit (46) und (47)

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{x} \cdot y_1 - y_1' = \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\left(C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x^2 \cdot \ln(x)\right)}_{y_1} - \underbrace{2 \cdot C_1 \cdot x + C_2 \cdot [x + 2 \cdot x \cdot \ln(x)]}_{y_1'} \\ &= C_1 \cdot x + C_2 \cdot x \cdot \ln(x) - 2 \cdot C_1 \cdot x - C_2 \cdot x - 2 \cdot C_2 \cdot x \cdot \ln(x) \\ &= -C_1 \cdot x + C_2 \cdot (-x - x \cdot \ln(x)) \end{aligned} \tag{48}$$

(HE) Insgesamt erhalten wir die Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems aus (46) und (48):

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} x^2 \cdot \ln(x) \\ -x - x \cdot \ln(x) \end{pmatrix} \tag{49}$$

mit

$$\overrightarrow{z_1(x)} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{z_2(x)} = \begin{pmatrix} x^2 \cdot \ln(x) \\ -x - x \cdot \ln(x) \end{pmatrix}$$

---

[1]) Direkte Suche nach weiteren Basislösungen erfordert eine Art „Variation der Konstanten“: Wir wählen

$$\boxed{\text{Ansatz: } y_{1,1} := K(x) \cdot y_1 \left(= K(x) \cdot x^2\right) \qquad \text{für eine geeignete Funktion } K(x)}$$

Einsetzen in die Gleichung (42) (Vorsicht: nicht in (43)!) ergibt wegen

$$y_{1,1}' = K'(x) \cdot x^2 + 2 \cdot K(x) \cdot x \qquad \text{und} \qquad y_{1,1}'' = K''(x) \cdot x^2 + 2 \cdot K'(x) \cdot x + 2 \cdot K(x) + 2 \cdot K'(x) \cdot x$$

die Gleichung

$$\left(K''(x) \cdot x^2 + 4 \cdot K'(x) \cdot x + 2 \cdot K(x)\right) = -\frac{4}{x^2} \cdot K(x) \cdot x^2 + \frac{3}{x} \cdot \left(K'(x) \cdot x^2 + 2 \cdot K(x) \cdot x\right)$$

oder

$$K''(x) \cdot x^2 + (4 \cdot x - 3 \cdot x) \cdot K'(x) = 0$$

Daraus ergibt sich eine neue Differentialgleichung:

$$\boxed{K''(x) + \frac{1}{x} \cdot K'(x) = 0}$$

Nach Substitution $z := K'(x)$ wird aus dieser DGL $z' + \frac{1}{x} \cdot z = 0$, die mit „Trennung der Veränderlichen“ gelöst werden kann: $z' = -\frac{1}{x} \cdot z = f(x) \cdot g(z)$.

Für $g(z) \neq 0$ gilt also $\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x}$, also $\ln(|z|) = -\ln(|x|) + c = \ln(|x^{-1}|) + c$ und damit $z = K'(x) = C \cdot \frac{1}{x}$.

Folglich ist $K(x) = \int K'(x) = C \cdot \ln(x) + C_0$. Insgesamt führt obiger Ansatz also zu

$$y_{1,1} := (C \cdot \ln(x) + C_0) \cdot x^2.$$

Nun setzen wir

$$\begin{aligned}\Phi := & \left(\overrightarrow{z_1(x)} \quad \overrightarrow{z_2(x)} \right) = \left(\begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x^2 \cdot \ln(x) \\ -x - x \cdot \ln(x) \end{pmatrix} \right) \\ = & \begin{pmatrix} x^2 & x^2 \cdot \ln(x) \\ -x & -x - x \cdot \ln(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{50}$$

und

$$\vec{C} := \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\overrightarrow{y_{hom}} = & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} x^2 \cdot \ln(x) \\ -x - x \cdot \ln(x) \end{pmatrix} \\ = & \left(\overrightarrow{z_1(x)} \quad \overrightarrow{z_2(x)} \right) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \Phi \cdot \vec{C} \end{aligned} \tag{51}$$

(AB) Nach REP 16.6.2 gilt:

Kennt man die Lösungen $\overrightarrow{y_{hom}} = \Phi \cdot \vec{C} = C_1 \cdot \overrightarrow{z_1(x)} + C_2 \cdot \overrightarrow{z_2(x)}$ des homogenen Differentialgleichungssystems, so läßt sich eine spezielle Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems durch die Methode „Variation der Konstanten" berechnen, d.h. wir wählen

$$\text{Ansatz:} \quad \overrightarrow{y_s} = \Phi \cdot \overrightarrow{C(x)} \tag{52}$$

und setzen diese Funktion in das (inhomogene) DGL-System ein. Dann wird $\overrightarrow{y_s}$ berechnet. Die Gesamtlösung $\vec{y}$ hat dann die Form $\vec{y} = \overrightarrow{y_{hom}} + \overrightarrow{y_s}$.

Es ist nach (52)

$$\overrightarrow{y_s}' = \Phi' \cdot \overrightarrow{C(x)} + \Phi \cdot \overrightarrow{C'(x)} \tag{53}$$

Nun setzen wir (52) und (53) in das (inhomogene) DGL-System (35) ein:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \Phi' \cdot \overrightarrow{C(x)} + \Phi \cdot \overrightarrow{C'(x)} = & \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \cdot \Phi \cdot \overrightarrow{C(x)} + \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{54}$$

Es ist nach(50)

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 2 \cdot x & x + 2 \cdot x \cdot \ln(x) \\ -1 & -2 - \ln(x) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \cdot \Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 & x^2 \cdot \ln(x) \\ -x & -x - x \cdot \ln(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x & x + 2 \cdot x \cdot \ln(x) \\ -1 & -2 - \ln(x) \end{pmatrix},$$

d.h. in (55) kürzen sich alle Ausdrücke mit $C(x)$ heraus (das gilt grundsätzlich beim Verfahren „Variation der Konstanten"), wird aus (55) die Gleichung

$$\Phi \cdot \overrightarrow{C'(x)} = \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \overrightarrow{C'(x)} = \Phi^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

Also muss Φ^{-1} bestimmt werden:

Zeile					Regie	
1	1	0	x^2	$x^2 \cdot \ln(x)$	$: x^2$	
2	0	1	$-x$	$-x - x \cdot \ln(x)$		$: x$
3	$\frac{1}{x^2}$	0	1	$\ln(x)$	1	1
4	0	$\frac{1}{x}$	-1	$-1 - \ln(x)$	0	1
5	$\frac{1}{x^2}$	0	1	$\ln(x)$	1	0
6	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	0	-1	$\ln(x)$	-1
7	$\frac{1}{x^2} \cdot (1 + \ln(x))$	$\frac{1}{x} \cdot \ln(x)$	1	0		
8	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	0	1		

und damit wird aus (55)

$$\overrightarrow{C'(x)} = \Phi^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{x^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 - \ln(x) & -x \cdot \ln(x) \\ 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \tag{56}$$

und damit

$$\overrightarrow{C'(x)} = -\frac{1}{x^2} \cdot \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{57}$$

Nun erhalten wir $\overrightarrow{C(x)}$ durch Integration:
$C_1(x) = \int C_1'(x) \cdot dx = \int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C_3$
und
$C_2(x) = \int C_2'(x) \cdot dx = \int 0 \cdot dx = 0 + C_4$
d.h. aus dem Ansatz in (52) wird

$$\overrightarrow{y_s} = x \cdot \ln(x) \cdot \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \tag{58}$$

Die Gesamtlösung setzt sich dann zusammen aus der Lösung des homogenen DGL-Systems (51) und der speziellen Lösung (58), also

$$\vec{y} = \overrightarrow{y_{hom}} + \overrightarrow{y_s} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} x^2 \cdot \ln(x) \\ -x - x \cdot \ln(x) \end{pmatrix} + x \cdot \ln(x) \cdot \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$