Stand: 18. August 2008
http://www.iazd.uni-hannover.de/∼windelberg/teach/ing

23 Taylorpolynom

Wenn eine Funktion $f(x)$ überhaupt in eine Potenzreihe
$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + a_3 \cdot (x - x_0)^3 + \cdots + a_n \cdot (x - x_0)^n + \cdots$$
um einen Punkt x_0 entwickelbar ist, dann schreibt man besser
$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 \cdot h + a_2 \cdot h^2 + a_3 \cdot h^3 + \cdots + a_n \cdot h^n + \cdots \quad \text{für kleines } h$$
Nach dem Satz von Taylor gilt dann:
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n + R_n$$
wobei für eine positive natürliche Zahl $k > 0$ die Fakultät $k!$ definiert ist als $k! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k$ mit $0! = 1$.

Nach Lagrange ist hierin die *Restform* R_n gegeben durch

Es gibt ein xi mit $0 \le \xi \le 1$, für das gilt $R_n(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\xi \cdot h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}$

Wir bezeichnen als *n-tes Taylorpolynom* T_n die Potenzreihe
$$T_n(x_0 + h) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n$$

Aufgabe 23.1: Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$
Bestimmen Sie für die folgende Funktion $f(x)$ die Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ bis zur Ordnung $n = n_0$. Bestimmen Sie das Restglied R_{n_0}. Skizzieren Sie $f(x)$, T_0, T_1, ..., T_{n_0} innerhalb der angegebenen Grenzen.

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ für } n_0 = 3 \text{ und } -1 \le x \le 1$$

Lösung 23.1:
Es ist

$$f(0) = \frac{1}{1+0} = 1, \quad f'(0) = \frac{-1}{(1+0)^2} = -1, \quad f''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2,$$
$$f'''(0) = \frac{-6}{(1+0)^4} = -6 \quad \text{und} \quad f^{(4)}(\spadesuit) = \frac{24}{(1+\spadesuit)^5}$$

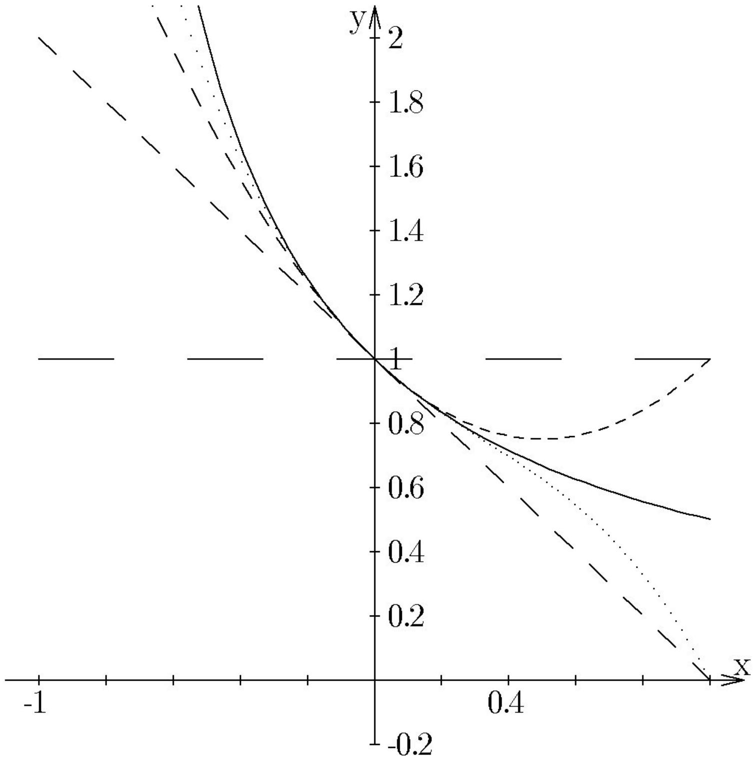
und folglich

$$\begin{aligned} T_3(h) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(0)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot h^3 \\ &= 1 - h + \frac{2}{2} \cdot h^2 - \frac{6}{6} \cdot h^3 \end{aligned}$$

sowie

$$R_3(\xi) = \frac{f^{(4)}(\xi \cdot h)}{4!} \cdot h^4 = \frac{24}{4!} \cdot \frac{1}{(1+\xi \cdot h)^5} \cdot h^4 = \frac{h^4}{(1+\xi \cdot h)^5} \text{ für } 0 \le \xi \le 1$$

Um den Fehler (d.h. die Abweichung der Funktion f von ihrem 3.Taylorpolynom T_3) abzuschätzen, ist das absolute Maximum der Funktion $R_3(\xi)$ im Intervall $[0, 1]$ zu bestimmen.
Folglich beträgt der maximale Fehler $F_{max} = h^4$ (falls $\xi = 0$)



Aufgabe 23.1: Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$ *für* $f(x) = \frac{1}{1+x}$

Aufgabe 23.2: Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$
Bestimmen Sie für die folgende Funktion $f(x)$ die Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ bis zur Ordnung $n = n_0$. Bestimmen Sie das Restglied R_{n_0}. Skizzieren Sie $f(x)$, T_0, T_1, …, T_{n_0} innerhalb der angegebenen Grenzen.

$$f(x) = \sqrt{1+x} \text{ für } n_0 = 3 \text{ und } -1 \le x \le 1$$

Lösung 23.2:
Es ist

$$f(0) = \sqrt{1+0} = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{2} \cdot (1+0)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4} \cdot (1+0)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4},$$
$$f'''(0) = \frac{3}{8} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8} \quad \text{und} \quad f^{(4)}(\spadesuit) = -\frac{15}{16} \cdot (1+\spadesuit)^{-\frac{7}{2}}$$

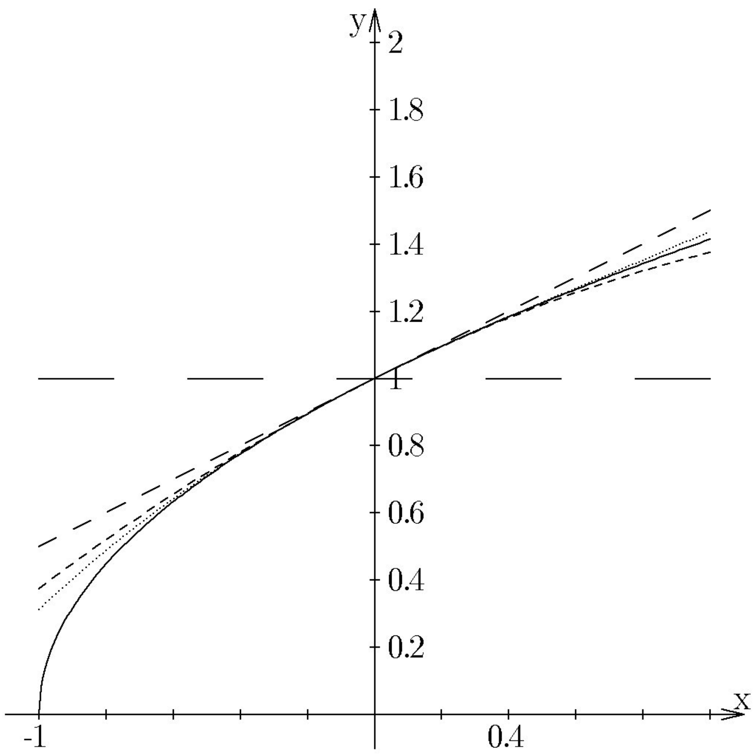
und folglich

$$\begin{aligned} T_3(h) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(0)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot h^3 \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot h - \frac{\frac{1}{4}}{2} \cdot h^2 + \frac{\frac{3}{8}}{6} \cdot h^3 = 1 + \frac{1}{2} \cdot h - \frac{1}{8} \cdot h^2 + \frac{3}{48} \cdot h^3 \end{aligned}$$

sowie

$$R_3(\xi) = \frac{f^{(4)}(\xi \cdot h)}{4!} \cdot h^4 = -\frac{15}{16 \cdot 4!} \cdot (1+\xi \cdot h)^{-\frac{7}{2}} \cdot h^4 = -\frac{15}{384} \cdot \frac{h^4}{\sqrt{(1+\xi \cdot h)^7}} \text{ für } 0 \le \xi \le 1$$

Um den Fehler (d.h. die Abweichung der Funktion f von ihrem 3.Taylorpolynom T_3) abzuschätzen, ist das absolute Maximum der Funktion $R_3(\xi)$ im Intervall $[0,1]$ zu bestimmen.
Folglich beträgt der maximale Fehler $F_{max} = \frac{15}{384} \cdot h^4$ (bei $\xi = 0$)



Aufgabe 23.2: Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$ für $f(x) = \sqrt{1+x}$

Aufgabe 23.3: Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$
Bestimmen Sie für die folgende Funktion $f(x)$ die Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ bis zur Ordnung $n = n_0$. Bestimmen Sie das Restglied R_{n_0}. Skizzieren Sie $f(x)$, T_0, T_1, $\ldots$, T_{n_0} innerhalb der angegebenen Grenzen.

$$f(x) = \sin(x) \text{ für } n_0 = 6 \text{ und } -\pi \leq x \leq \pi$$

Lösung 23.3:
Es ist

$$f(0) = \sin(0) = 0, \quad f'(0) = \cos(0) = 1, \quad f''(0) = -\sin(0) = 0,$$
$$f'''(0) = -\cos(0) = -1, \ldots \quad \text{und} \quad f^{(7)}(\spadesuit) = -\cos(\spadesuit)$$

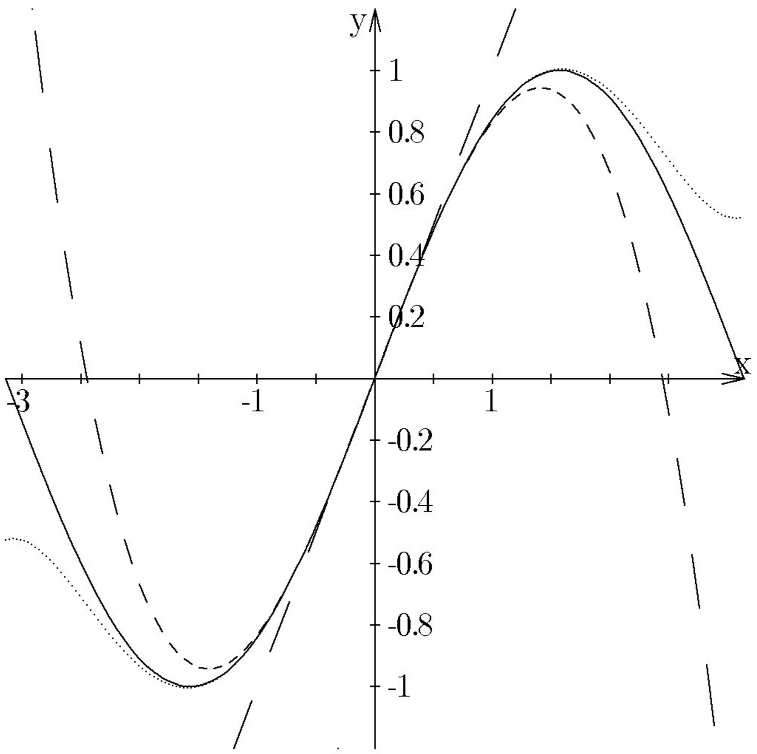
und folglich

$$T_6(h) = 0 + \frac{1}{1!}\cdot h - 0 - \frac{1}{3!}\cdot h^3 + 0 + \frac{1}{5!}\cdot h^5 + 0 = h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120}$$

Das Restglied R_6 hat dann die Form

$$R_6(\xi) = \frac{f^{(7)}(\xi\cdot h)}{7!}\cdot h^7 = \frac{-\cos(\xi\cdot h)}{5040}\cdot h^7 \text{ für } 0 \leq \xi \leq 1$$

Um den Fehler (d.h. die Abweichung der Funktion f von ihrem 6.Taylorpolynom T_6) abzuschätzen, ist das absolute Maximum der Funktion $R_6(\xi)$ im Intervall $[0, 1]$ zu bestimmen.



Aufgabe 23.3: Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$ für $f(x) = \sin(x)$

Aufgabe 23.4: Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$
Bestimmen Sie für die folgende Funktion $f(x)$ die Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ bis zur Ordnung $n = n_0$. Bestimmen Sie das Restglied R_{n_0}. Skizzieren Sie $f(x)$, T_0, T_1, …, T_{n_0} innerhalb der angegebenen Grenzen.

$$f(x) = \cosh(x) \text{ für } n_0 = 5 \text{ und } -1 \leq x \leq 1$$

Lösung 23.4:
Es ist $\cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$ und $\sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})$. Folglich ist

$$f(0) = \cosh(0) = 1, \quad f'(0) = \sinh(0) = 0, \quad f''(0) = \cosh(0) = 1,$$
$$f'''(0) = \sinh(0) = 0, \quad \ldots, \quad \text{und} \quad f^{(6)}(\spadesuit) = \cosh(\spadesuit)$$

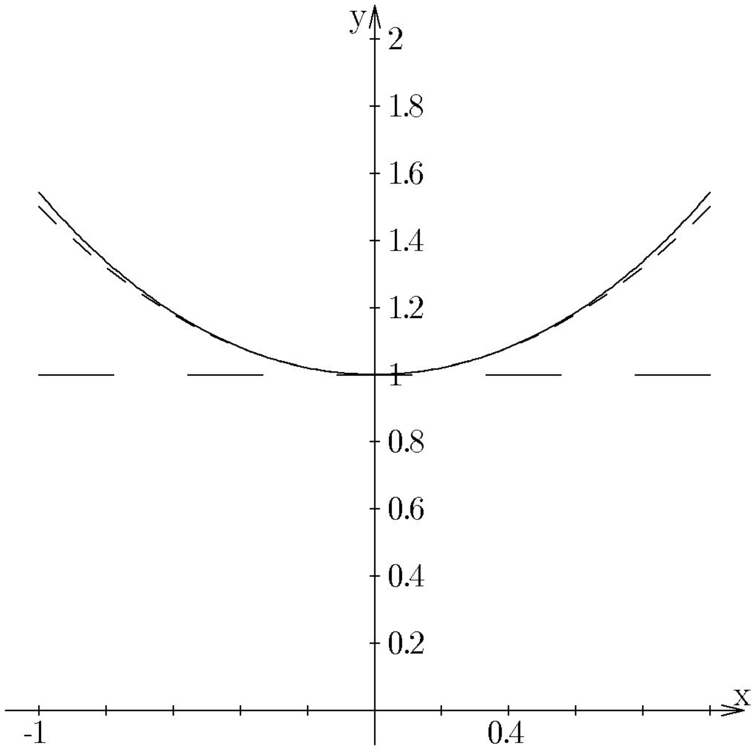
und folglich

$$\begin{aligned} T_5(h) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(0)}{2!} \cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} \cdot h^5 \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot h^2 + \frac{1}{24} \cdot h^4 \end{aligned}$$

sowie

$$R_5(\xi) = \frac{f^{(6)}(\xi \cdot h)}{6!} \cdot h^6 = \frac{\cosh(\xi \cdot h)}{720} \cdot h^6 \text{ für } 0 \leq \xi \leq 1$$

Um den Fehler (d.h. die Abweichung der Funktion f von ihrem 5.Taylorpolynom T_5) abzuschätzen, ist das absolute Maximum der Funktion $R_5(\xi)$ im Intervall $[0, 1]$ zu bestimmen.
Folglich beträgt der maximale Fehler $F_{max} = \frac{\cosh(2)}{720} \approx 0.0002$ (falls $\xi = 1$ und $h = 1$)



Aufgabe 23.4: Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$ für $f(x) = \cosh(x)$

Aufgabe 23.5:
Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x+12}{x-2} \quad \text{an der Stelle } x_0 = 6$$

in ihre Potenzreihe

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

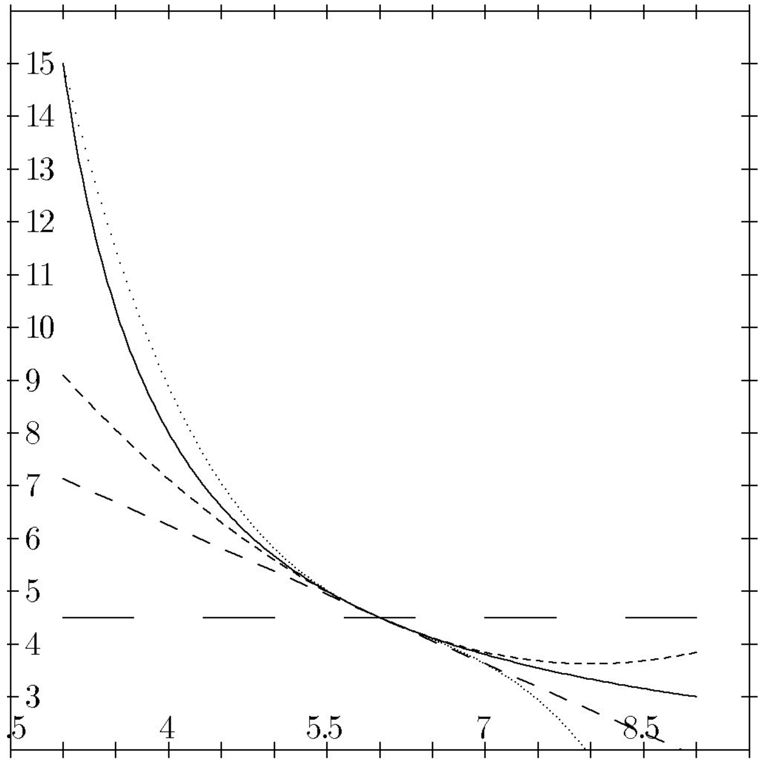
(bestimmen Sie dazu mit Hilfe der bekannten Rechenregeln über geometrische Reihen die Koeffizienten a_n).
Skizzieren Sie die Kurve im Bereich $[x_0 - 3, x_0 + 3]$ und zeichnen Sie die 0.-te, 1.-te, 2.-te und 3.-te Näherung der Potenzreihenentwicklung ein.

Lösung 23.5:
Es ist

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \dfrac{x+12}{x-2} & \text{, also } f(6) = \dfrac{9}{2} \\
f'(x) = -\dfrac{14}{(x-2)^2} & \text{, also } f'(6) = -\dfrac{7}{8} \\
f''(x) = \dfrac{28}{(x-2)^3} & \text{, also } f''(6) = \dfrac{7}{16} \\
f'''(x) = -\dfrac{84}{(x-2)^4} & \text{, also } f'''(6) = -\dfrac{21}{64} \\
f^{(4)}(x) = \dfrac{336}{(x-2)^5} & \text{, also } f^{(4)}(6) = \dfrac{21}{64}
\end{array}$$

Folglich lautet der Potenzreihenanfang

$$\begin{aligned}\frac{x+12}{x-2} &= \frac{9}{2}-\frac{7}{8}\cdot(x-6)+\frac{\frac{7}{16}}{2}\cdot(x-6)^2+\frac{-\frac{21}{64}}{2\cdot 3}\cdot(x-6)^3\pm\ldots\\ & \frac{9}{2}-\frac{7}{8}\cdot(x-6)+\frac{7}{32}\cdot(x-6)^2-\frac{7}{32}\cdot(x-6)^3\pm\ldots\end{aligned}$$



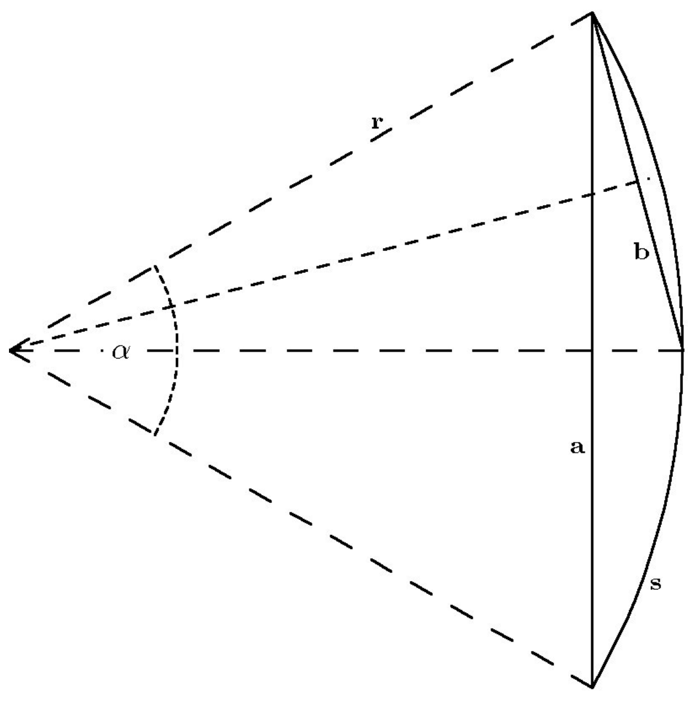
Aufgabe 23.5

Aufgabe 23.6: Die Bogenlänge s eines Kreisbogens des Radius r mit Zentriwinkel α beträgt $s = r\cdot\alpha$.

Aus einer Messung seien nur die in *Bild 23.6* angegebenen Abmessungen a und b bekannt. Zeigen Sie, dass durch die Abschätzung

$$s_B = \frac{1}{3}\cdot(8\cdot b - a) \quad \text{für } \alpha \le \pi$$

die Bogenlänge s „gut“ abgeschätzt wird. Verwenden Sie dazu die Reihenentwicklung der Funktion sin um den Nullpunkt (also das 5.Taylorpolynom und die zugehörige Restform R_5). Geben Sie dazu an, wie gross der maximale Fehler F_{max} für $r = 1\,m$ und $\alpha = 30^\circ$ ist.



Aufgabe 23.6: Abschätzung der Bogenlänge s:
$s \approx \frac{1}{3}\cdot(8\cdot b - a)$ für $\alpha \le \pi$

Lösung 23.6:
Die Kreisbogenlänge beträgt $s = r \cdot \alpha$.

Zur Vereinfachung setzen wir $s_B := \frac{1}{3} \cdot (8 \cdot b - a)$.
Es ist

$$a = 2 \cdot r \cdot \sin(\frac{\alpha}{2}) \quad \text{und} \quad b = 2 \cdot r \cdot \sin(\frac{\alpha}{4})$$

Die Funktion $\sin(\spadesuit)$ kann als Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ entwickelt werden: Das 5. Taylorpolynom T_5 mit der Restform R_5 lautet dann z.B.

$$\sin(\spadesuit) = \spadesuit - \frac{\spadesuit^3}{6} + \frac{\spadesuit^5}{120} - \frac{\cos(\xi \cdot \spadesuit)}{5040} \cdot \spadesuit^7 \text{ für } 0 \leq \xi \leq 1$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
s_B &= \frac{1}{3} \cdot (8 \cdot b - a) \\
&= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot r \cdot \left\{ 8 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\} \\
&= \frac{2 \cdot r}{3} \cdot \left\{ 8 \cdot \left[\frac{\alpha}{4} - \frac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^5}{120} - \frac{\cos(\xi \cdot \frac{\alpha}{4})}{5040} \cdot \left(\frac{\alpha}{4}\right)^7 \right] - \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^5}{120} - \frac{\cos(\xi \cdot \frac{\alpha}{2})}{5040} \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^7 \right] \right\} \\
&= \frac{2 \cdot r}{3} \cdot \left\{ \alpha \cdot \left(\frac{8}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha^3}{6} \cdot \left(-\frac{8}{4^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{\alpha^5}{120} \cdot \left(\frac{8}{4^5} - \frac{1}{2^5}\right) + \frac{\alpha^7}{5040} \cdot \left(-\frac{8}{4^7} \cdot \cos(\xi \cdot \frac{\alpha}{4}) + \frac{1}{2^7} \cdot \cos(\xi \cdot \frac{\alpha}{2})\right) \right\} \\
&= \frac{2 \cdot r}{3} \cdot \left\{ \frac{3 \cdot \alpha}{2} - \frac{3 \cdot \alpha^5}{2^7 \cdot 120} + \frac{\alpha^7}{2^7 \cdot 5040} \cdot \left(\cos(\xi \cdot \frac{\alpha}{2}) - \frac{1}{2^4} \cdot \cos(\xi \cdot \frac{\alpha}{4}) \right) \right\}
\end{aligned}$$

oder - wegen $s = r \cdot \alpha$ -

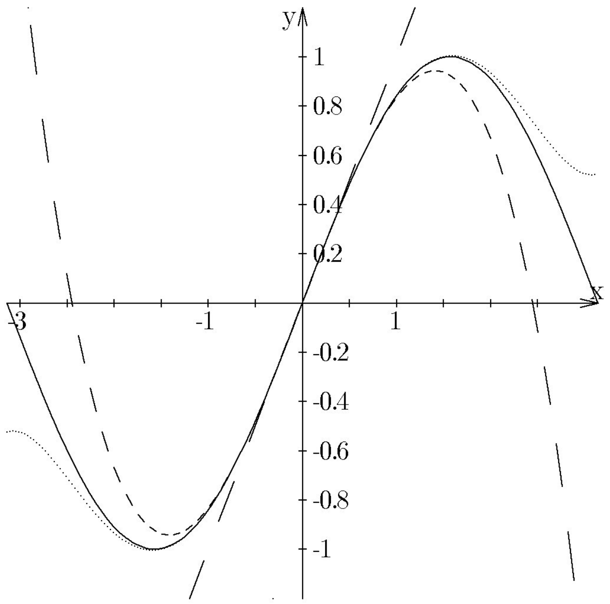
$$\begin{aligned}
s_B &= s + \frac{2 \cdot r}{3} \cdot \left\{ -\frac{3 \cdot \alpha^5}{2^7 \cdot 120} + \frac{\alpha^7}{2^7 \cdot 5040} \cdot \left(\cos(\xi \cdot \frac{\alpha}{2}) - \frac{1}{2^4} \cdot \cos(\xi \cdot \frac{\alpha}{4}) \right) \right\} \\
&= s - \frac{r \cdot \alpha^5}{120 \cdot 64} \cdot \left\{ 1 - \frac{\alpha^2}{126} \cdot \left(\cos(\xi \cdot \frac{\alpha}{2}) - \frac{1}{16} \cdot \cos(\xi \cdot \frac{\alpha}{4}) \right) \right\}
\end{aligned}$$

Wegen $\alpha \leq \pi$ und $0 \leq \xi \leq 1$ gelten für $\spadesuit = \xi \cdot \dfrac{\alpha}{2}$ folgende Eigenschaften:

1. $0 \leq \dfrac{\alpha^2}{126} \leq \dfrac{\pi^2}{126} \leq \dfrac{12.6}{126} = \dfrac{1}{10}$

2. $0 \leq \spadesuit \leq 1 \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

3. $0 \leq \cos(\spadesuit) - \dfrac{1}{16} \cdot \cos\left(\dfrac{1}{2} \cdot \spadesuit\right) \leq 1$ (siehe Bild 23.6a)



Aufgabe 23.6a): Abschätzung $0 \leq \cos(\spadesuit) - \frac{1}{16} \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \spadesuit\right) \leq 1$ für $0 \leq \spadesuit \leq \frac{\pi}{2}$

Damit ist der maximale Fehler $F_{max} = |s_B - s|$ bestimmbar:
Es ist nach 1., 2. und 3.

$$0.9 \leq 1 - \frac{\alpha^2}{126} \cdot \left(\cos(\xi \cdot \frac{\alpha}{2}) - \frac{1}{16} \cdot \cos(\xi \cdot \frac{\alpha}{4}) \right) \leq 1$$

und folglich

$$|s_B - s| \quad = \quad \frac{r \cdot \alpha^5}{120 \cdot 64} \cdot \left\{ 1 - \frac{\alpha^2}{126} \cdot \left(\cos(\xi \cdot \frac{\alpha}{2}) - \frac{1}{16} \cdot \cos(\xi \cdot \frac{\alpha}{4}) \right) \right\} \leq \frac{r \cdot \alpha^5}{120 \cdot 64} \cdot$$

Daher ist F_{max} für $r = 1\, m$ und $\alpha = 30\,^\circ = \frac{\pi}{6}$

$$F_{max} = |s_B - s| = \frac{r \cdot \alpha^5}{120 \cdot 64} = \frac{1}{7680} \cdot 1000\, mm \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^5 \approx 0.005\, mm$$

Aufgabe 23.7:
Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom $T_2(f,a,b)(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ an der Stelle $(a,b) = (1,1)$

Lösung von Aufgabe 23.7:
z.B. nach F+H, Seite 133 ist

1. das Taylorpolynom 0-ten Grades von f an der Stelle (a,b) definiert durch
   $T_0(f(a,b)(x,y) := f(a,b)$

2. das Taylorpolynom 1-ten Grades von f an der Stelle (a,b) definiert durch

$$\begin{aligned} T_1(f(a,b)(x,y) &:= T_0(f(a,b))(x,y) + (x-a) \cdot \frac{\partial}{\partial x} f\,|_{(a,b)} + (y-b) \cdot \frac{\partial}{\partial y} f\,|_{(a,b)} \\ &= f(a,b) + (x-a) \cdot \frac{\partial}{\partial x} f\,|_{(a,b)} + (y-b) \cdot \frac{\partial}{\partial y} f\,|_{(a,b)} \end{aligned}$$

   (damit ist das Taylorpolynom 1-ten Grades von f an der Stelle (a,b) gleich der Tangentialebene an f in (a,b))

3. das Taylorpolynom 2-ten Grades von f an der Stelle (a,b) definiert durch
   $T_2(f(a,b)(x,y) := T_1(f(a,b))(x,y)$
   $+\frac{1}{2} \cdot \left[(x-a)^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f\,|_{(a,b)} + 2 \cdot (x-a) \cdot (y-b) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} f\,|_{(a,b)} + (y-b)^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} f\,|_{(a,b)} \right]$
   $= T_1(f(a,b))(x,y)$
   $+\frac{1}{2} \cdot \left[(x-a)^2 \cdot f_{xx}\,|_{(a,b)} + 2 \cdot (x-a) \cdot (y-b) \cdot f_{xy}\,|_{(a,b)} + (y-b)^2 \cdot f_{yy}\,|_{(a,b)} \right]$

Hier ist $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$; also $f(a,b) = f(1,1) = \dfrac{1}{2}$
und $f_x(x,y) = -\dfrac{2 \cdot x \cdot y}{(1+x^2)^2}$, also $f_x(1,1) = -\dfrac{1}{2}$
und $f_y(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2}$, also $f_y(1,1) = \dfrac{1}{2}$
sowie $f_{xx}(x,y) = -\dfrac{2 \cdot y - 6 \cdot x^2 \cdot y}{(1+x^2)^3}$, also $f_{xx}(1,1) = \dfrac{1}{2}$
und $f_{xy}(x,y) = -\dfrac{2 \cdot x}{(1+x^2)^2}$, also $f_{xy}(1,1) = -\dfrac{1}{2}$
und $f_{yy}(x,y) = 0$, also $f_{yy}(1,1) = 0$
und damit $T_2(f(1,1)(x,y) = \dfrac{1}{2} + (x-1) \cdot (-\dfrac{1}{2}) + (y-1) \cdot \dfrac{1}{2}$
$+\dfrac{1}{2} \cdot \left[(x-1)^2 \cdot frac12 + 2 \cdot (x-1) \cdot (y-1) \cdot (-\dfrac{1}{2}) + (y-1)^2 \cdot 0 \right]$,
d.h. $T_2(f(1,1)(x,y) = \dfrac{1}{2} - (x-1) \cdot \dfrac{1}{2} + (y-1) \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \cdot (x-1)^2 - \dfrac{1}{2} \cdot (x-1) \cdot (y-1)$.

Aufgabe 23.8:
Geben Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor eine obere Schranke an für den Fehler, den man in Kauf nehmen muss, wenn man die Funktion

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{auf dem Intervall} \quad \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

durch ihre Taylorreihe T_n um den Punkt $x = 0$ entwickelt.
Bestimmen Sie mit Hilfe von T_5 einen Näherungswert für $\ln(2)$.

Lösung von Aufgabe 23.8:
Es ist

$$T_n(f,a)(x) := f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(f,a)(x)$$

mit

$$R_n(f,a)(x) = f(x) - T_n(f,a)(x)$$

Hier ist
$a = 0$ und $f(0) = \ln(1) = 0$
und $f'(x) = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{(1-x)\cdot 1 + (1+x)\cdot 1}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1+x)\cdot(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}$
nach Kettenregel und nach Quotientenregel.
Folglich ist
$f'(0) = 2$
und damit

$$\boxed{T_1(f,0)(x) := f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x-0) = 0 + 2 \cdot x = 2 \cdot x}$$

Entsprechend ist
$f''(x) = \frac{4 \cdot x}{(1-x^2)^2}$ und damit $f''(0) = 0$.
Entsprechend ist
$f'''(x) = \frac{4 \cdot (1 + 3 \cdot x^2)}{(1-x^2)^3}$ und damit $f'''(0) = 4$.
Entsprechend ist
$f''''(x) = f^{(4)}(x) = \frac{48 \cdot x \cdot (1+x^2)}{(1-x^2)^4}$ und damit $f^{(4)}(0) = 0$.
Entsprechend ist
$f'''''(x) = f^{(5)}(x) = \frac{48 \cdot (1 + 10 \cdot x^2 + 5 \cdot x^4)}{(1-x^2)^5}$ und damit $f^{(5)}(0) = 48$.

$$f^{(6)}(x) = \frac{480 \cdot x \cdot (3 + 10 \cdot x^2 + 3 \cdot x^4)}{(1-x^2)^6}$$

Also ist

$$\boxed{\begin{aligned} T_5(f,0)(x) &= T_1(f,0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}\cdot x^4 + \frac{f'''''(0)}{5!}\cdot x^5 \\ &= 2\cdot x + 0 + \frac{4}{3!}\cdot x^3 + 0 + \frac{48}{5!}\cdot x^5 = 2\cdot x + \frac{2}{3}\cdot x^3 + \frac{2}{5}\cdot x^5 \end{aligned}}$$

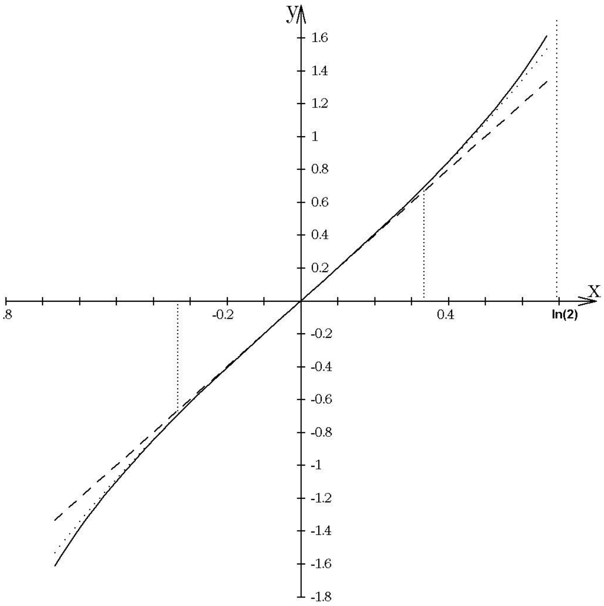


Bild 23.8.1:
Funktion $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$
sowie die ersten Taylorpolynome für den Entwicklungspunkt $x = 0$

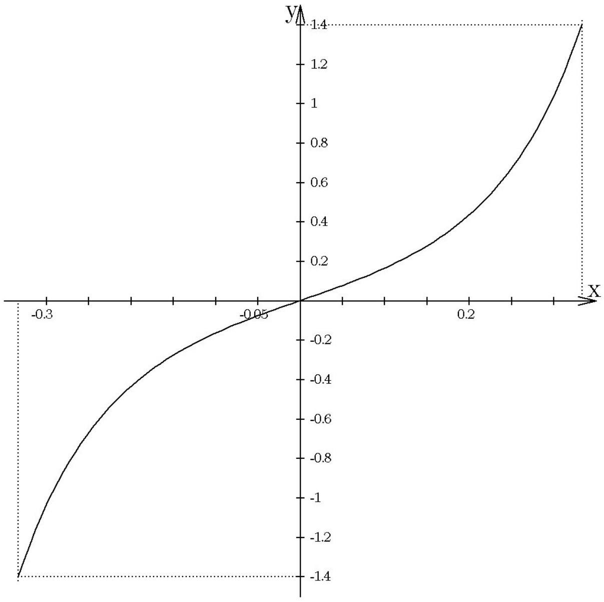


Bild 23.8.2:
Funktion $f(x) = \dfrac{\xi\cdot(3+10\cdot\xi^2+3\cdot\xi^4)}{(1-\xi^2)^6}$
im Intervall $\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$

Das n-te Restglied für das Taylorpolynom $T_n(f,a)(x)$ im Intervall $[a-b, a+b]$ ist nach F+H, Seite 75, definiert durch:

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-a)^{n+1} \qquad \text{mit } |b-a| \geq |\xi - a|$$

Hier ist $n = 5$, $a = 0$ und $b = \frac{1}{3}$, also
$R_5(x,y) = \dfrac{1}{6!}\cdot f^{(6)}(\xi)\cdot x^6 \quad$ mit $|\dfrac{1}{3}| \geq |\xi|$
oder $R_5(x,y) = \dfrac{1}{720}\cdot\dfrac{480\cdot\xi\cdot(3+10\cdot\xi^2+3\cdot\xi^4)}{(1-\xi^2)^6}\cdot x^6 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\xi\cdot(3+10\cdot\xi^2+3\cdot\xi^4)}{(1-\xi^2)^6}\cdot x^6 \quad$ mit $|\dfrac{1}{3}| \geq |\xi|$
Dieses Restglied hat (nach Bild 23.8.2) seinen größten Wert an der Stelle $\xi = \dfrac{1}{3}$; es ist also $R_5(x,y) \leq 1.4\cdot x^6 \leq 1.4\cdot\dfrac{1}{3^6}$ für $|x| \leq \frac{1}{3}$ oder

$$\boxed{R_5(x,y) \leq \frac{1.4}{3^6} \approx 0.0019}$$

Nun ist für den x-Wert $\ln(2)$ der Funktionswert $T_5(f,0)(\ln(2))$ des Taylorpolynoms mit $f(\ln(2))$ zu vergleichen:
Es ist
$T_5(f,0)(\ln(2)) = 2\cdot\ln(2) + \dfrac{2}{3}\cdot\ln(2)^3 + \dfrac{2}{5}\cdot\ln(2)^5 = 1.672$
und $f(\ln(2)) = 1.708$, also beträgt die Differenz $\boxed{\Delta = 0.036}$

Potenzreihenentwicklungen einiger „bekannter“ Funktionen

Als bekannt werden folgende Potenzreihen vorausgesetzt (siehe F+H, F3):

$$
\begin{array}{lcll}
(1+\heartsuit)^a & = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} \cdot \heartsuit^n & = 1 + a\cdot\heartsuit + \binom{a}{2}\cdot\heartsuit^2 + \binom{a}{3}\cdot\heartsuit^3 + \ldots & \text{für } \heartsuit \in \mathbb{R} \\
e^{\heartsuit} & = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot\heartsuit^n & = 1 + \heartsuit + \frac{1}{2!}\cdot\heartsuit^2 + \frac{1}{3!}\cdot\heartsuit^3 + \ldots & \text{für } \heartsuit \in \mathbb{R} \\
\sin(\heartsuit) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\cdot n+1)!}\cdot\heartsuit^{2\cdot n+1} & = \heartsuit - \frac{1}{3!}\cdot\heartsuit^3 + \frac{1}{5!}\cdot\heartsuit^5 - + \ldots & \text{für } \heartsuit \in \mathbb{R} \\
\cos(\heartsuit) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\cdot n)!}\cdot\heartsuit^{2\cdot n} & = 1 - \frac{1}{2!}\cdot\heartsuit^2 + \frac{1}{4!}\cdot\heartsuit^4 - + \ldots & \text{für } \heartsuit \in \mathbb{R} \\
\sinh(\heartsuit) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\cdot n+1)!}\cdot\heartsuit^{2\cdot n+1} & = \heartsuit + \frac{1}{3!}\cdot\heartsuit^3 + \frac{1}{5!}\cdot\heartsuit^5 + \ldots & \text{für } \heartsuit \in \mathbb{R} \\
\cosh(\heartsuit) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\cdot n)!}\cdot\heartsuit^{2\cdot n} & = 1 + \frac{1}{2!}\cdot\heartsuit^2 + \frac{1}{4!}\cdot\heartsuit^4 + \ldots & \text{für } \heartsuit \in \mathbb{R} \\
\arctan(\heartsuit) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\cdot n+1}\cdot\heartsuit^{2\cdot n+1} & = \heartsuit - \frac{1}{3}\cdot\heartsuit^3 + \frac{1}{5}\cdot\heartsuit^5 - \frac{1}{7}\cdot\heartsuit^7 \pm \ldots & \text{für } |\heartsuit| < 1 \\
\ln(1+\heartsuit) & = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\heartsuit^n & = \heartsuit - \frac{1}{2}\cdot\heartsuit^2 + \frac{1}{3}\cdot\heartsuit^3 - \frac{1}{4}\cdot\heartsuit^4 + - \ldots & \text{für } -1 < \heartsuit \le 1 \\
\ln(1-\heartsuit) & = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\heartsuit^n & = -\left(\heartsuit + \frac{1}{2}\cdot\heartsuit^2 + \frac{1}{3}\cdot\heartsuit^3 + \frac{1}{4}\cdot\heartsuit^4 + \ldots\right) & \text{für } -1 \le \heartsuit < 1 \\
\sqrt{1+\heartsuit} & = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}\cdot\heartsuit^n & = 1 + \frac{1}{2}\cdot\heartsuit - \frac{1}{8}\cdot\heartsuit^2 + \frac{1}{16}\cdot\heartsuit^3 - \frac{5}{128}\cdot\heartsuit^4 + - \ldots & \text{für } |\heartsuit| \le 1 \\
\dfrac{1}{\sqrt{1+\heartsuit}} & = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}\cdot\heartsuit^n & = 1 - \frac{1}{2}\cdot\heartsuit + \frac{3}{8}\cdot\heartsuit^2 - \frac{5}{16}\cdot\heartsuit^3 + \frac{35}{128}\cdot\heartsuit^4 - + \ldots & \text{für } |\heartsuit| < 1
\end{array}
$$

Aufgabe 23.9: Es soll $f(x) = e^{-x^2} \cdot \cosh(x)$ in eine Potenzreihe der Ordnung 4 entwickelt werden, d.h. es sind a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 so zu bestimmen, dass gilt

$$f(x) = e^{-x^2} \cdot \cosh(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$$

Lösung von Aufgabe 23.9:
Es ist
$e^{-x^2} \overset{\heartsuit=-x^2}{=} e^{\heartsuit} = 1 - x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^4 - + \dots$
und
$\cosh(x) \overset{\heartsuit=x}{=} \cosh(\heartsuit) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + \dots$
und damit
$f(x) = e^{-x^2} \cdot \cosh(x) = \left[1 - x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^4 - + \dots\right] \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + \dots\right].$
Dieses Produkt wird ausgerechnet, indem jeweils gleiche Potenzen von x zusammengefasst werden - beginnend mit x^0:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^0 \cdot [1 \cdot 1] + x^2 \cdot \left[-1 + \frac{1}{2}\right] + x^4 \cdot \left[\frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\right] + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 \pm \dots \end{aligned}$$

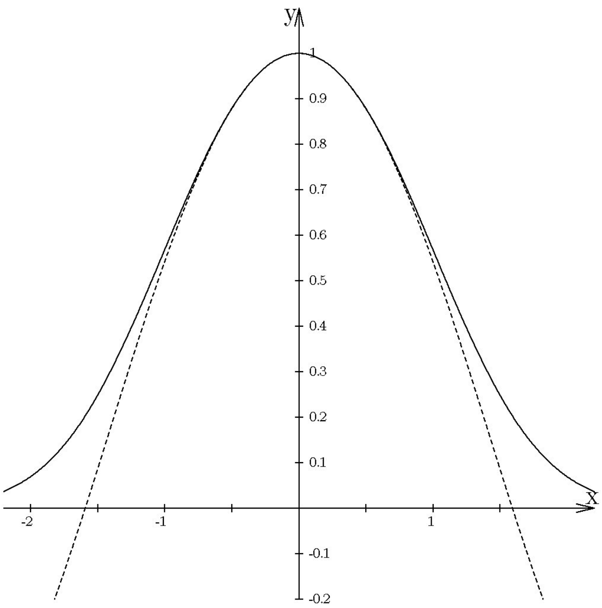


Bild 23.9:
$f(x) = e^{-x^2} \cdot \cosh(x)$ (ausgezogen)
und $f(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 \pm \dots$
(gestrichelt)
im Intervall $[-2, 2]$

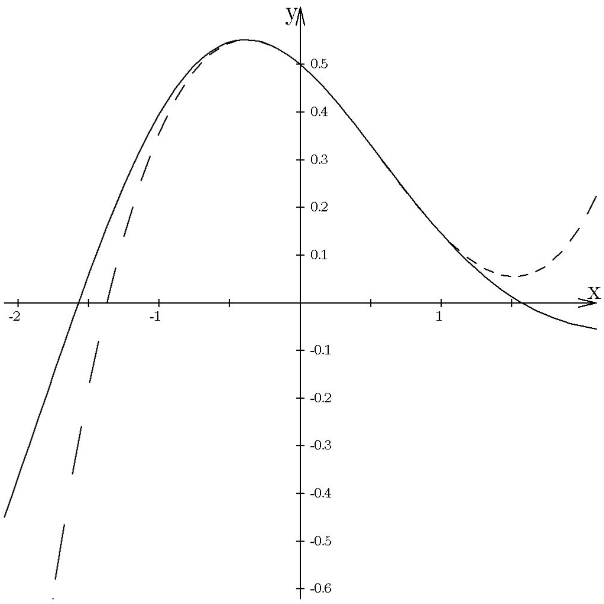


Bild 23.10:
$f(x) = \frac{\cos(x)}{1 + e^x}$ (ausgezogen)
und $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{7}{48} \cdot x^3 \pm \dots$
(gestrichelt)
im Intervall $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

Aufgabe 23.10: Es soll $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+e^x}$ in eine Potenzreihe der Ordnung 3 entwickelt werden, d.h. es sind a_0, a_1, a_2, a_3 so zu bestimmen, dass gilt

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{1+e^x} = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

Lösung von Aufgabe 23.10:
Trick:
Wir multiplizieren die Gleichung mit $(1+e^x)$, um Bruchrechnung zu vermeiden!

Dann ist die folgende Aufgabe zu lösen:

$$\cos(x) = \left[a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3\right] \cdot [1+e^x]$$

Für $\heartsuit = x$ ergibt sich dann aus den oben angegebenen Reihen für diese Gleichung:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - + \ldots \quad &= \quad \left[a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3\right] \\ &\quad \cdot \left[1 + 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \ldots\right] \end{aligned}$$

Auch dieses Produkt auf der rechten Seite der obigen Gleichung wird ausgerechnet, indem jeweils gleiche Potenzen von x zusammengefasst werden - beginnend mit x^0:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - + \ldots \quad &= \quad x^0 \cdot 2 \cdot a_0 + x \cdot [2 \cdot a_1 + a_0] + x^2 \cdot \left[2 \cdot a_2 + a_1 + \frac{1}{2} \cdot a_0\right] \\ &\quad + x^3 \cdot \left[2 \cdot a_3 + a_2 + \frac{1}{2} \cdot a_1 + \frac{1}{6} \cdot a_0\right] + \ldots \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{array}{c|lcl} x^0 & 1 = 2 \cdot a_0 & \Rightarrow & a_0 = \dfrac{1}{2} \\ x^1 & 0 = 2 \cdot a_1 + a_0 = 2 \cdot a_1 + \frac{1}{2} & \Rightarrow & a_1 = -\dfrac{1}{4} \\ x^2 & -\frac{1}{2} = 2 \cdot a_2 + a_1 + \frac{1}{2} \cdot a_0 & \Rightarrow & a_2 = -\dfrac{1}{4} \end{array}$$

Also lautet die gesuchte Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{7}{48} \cdot x^3 \pm \ldots$$

Aufgabe 23.11: Es soll $f(x) = (1+x)^x$ in eine Potenzreihe der Ordnung 5 entwickelt werden, d.h. es sind a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 so zu bestimmen, dass gilt

$$f(x) = (1+x)^x = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5 \pm \ldots$$

Lösung von Aufgabe 23.11:
Nach dem Rechnen mit Logarithmen ist bekannt:

$$\boxed{\heartsuit = e^{\ln(\heartsuit)}}$$

Also ist
$f(x) = (1+x)^x \overset{\heartsuit=(1+x)^x}{=} e^{\ln(1+x)^x} = e^{x \cdot \ln(1+x)}$

Nach der obigen Liste der bekannten Potenzreihen ist:
$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 + - \ldots \quad \text{für } -1 < x \le 1,$
also ist

$$\boxed{x \cdot \ln(1+x) = x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot x^4 - \frac{1}{4} \cdot x^5 + - \ldots \quad \text{für } -1 < x \le 1}$$

Wir haben also für die Reihe

$$f(x) = (1+x)^x = e^{x \cdot \ln(1+x)}$$

einen Potenzreihenansatz zu suchen:
Es ist $e^{\heartsuit} = 1 + \heartsuit + \frac{1}{2!} \cdot \heartsuit^2 + \frac{1}{3!} \cdot \heartsuit^3 + \ldots$
und damit für $\boxed{\heartsuit = x \cdot \ln(1+x)}$ wegen

$$\heartsuit^2 = (x \cdot \ln(1+x))^2 = \left[x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^3 + - \ldots\right] \cdot \left[x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^3 + - \ldots\right] = x^4 - x^5 \pm \ldots$$

und

$$\heartsuit^3 = (x \cdot \ln(1+x))^3 = \left[x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^3 + - \ldots\right]^3 = x^6 \pm \ldots$$

$$\begin{aligned} e^{x \cdot \ln(1+x)} &= 1 + \left[x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot x^4 - \frac{1}{4} \cdot x^5 + - \ldots\right] + \frac{1}{2} \cdot \left[x^4 - x^5 \pm \ldots\right] \\ &= 1 + x^2 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{5}{6} \cdot x^4 - \frac{3}{4} \cdot x^5 \pm \ldots \text{ für } -1 < x \le 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 23.12: Es soll $f(x) = \dfrac{e^{3\cdot x}}{\sqrt[3]{1+3\cdot x}}$ in eine Potenzreihe der Ordnung 3 entwickelt werden, d.h. es sind a_0, a_1, a_2, a_3 so zu bestimmen, dass gilt

$$f(x) = \frac{e^{3\cdot x}}{\sqrt[3]{1+3\cdot x}} = a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 + a_3\cdot x^3 \pm \dots$$

Lösung von Aufgabe 23.12:
Nach der Liste der als bekannt vorausgesetzten Potenzreihen gilt

1. <u>zu $e^{3\cdot x}$:</u>
$$e^{\heartsuit} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot\heartsuit^n = 1 + \heartsuit + \frac{1}{2!}\cdot\heartsuit^2 + \frac{1}{3!}\cdot\heartsuit^3 + \dots \text{ für } \heartsuit\in\mathbb{R}$$
also mit $\heartsuit = 3\cdot x$:
$$\boxed{e^{3\cdot x} = 1 + 3\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot(3\cdot x)^2 + \frac{1}{3!}\cdot(3\cdot x)^3 + \dots \text{ für } x\in\mathbb{R}}$$

2. <u>zu $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+3\cdot x}} = \left(\sqrt[3]{1+3\cdot x}\right)^{-\frac{1}{3}}$: die „allgemeine binomische Formel“</u>
$$(1+\heartsuit)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}\cdot\heartsuit^n = 1 + a\cdot\heartsuit + \binom{a}{2}\cdot\heartsuit^2 + \binom{a}{3}\cdot\heartsuit^3 + \dots \quad \text{für} \quad |\heartsuit| < 1, \quad \heartsuit\in\mathbb{R}$$
(z.B. aus F+H, Seite 9) mit den „allgemeinen Binomialkoeffizienten $\binom{r}{k}$“, die definiert sind durch
$$\binom{r}{k} := \frac{r\cdot(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} \quad \text{für} \quad r\in\mathbb{R} \quad \text{und} \quad k\in\mathbb{N}$$
$$\text{sowie} \quad \binom{r}{0} := 1, \quad \binom{r}{1} := r \quad \text{und} \quad \binom{r}{r} = 1$$
also mit $\heartsuit = 3\cdot x$ und $a := -\dfrac{1}{3}$
$$(1+3\cdot x)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x + \binom{-\frac{1}{3}}{2}\cdot 3\cdot x^2 + \binom{-\frac{1}{3}}{3}\cdot 3\cdot x^3 + \dots \quad \text{für} \quad x\in\mathbb{R}$$
$$\text{und} \quad \binom{r}{0} := 1, \quad \binom{r}{1} := r,$$
Also sind
$$\binom{-\frac{1}{3}}{0} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{-\frac{1}{3}}{1} = -\frac{1}{3}$$
sowie
$$\binom{-\frac{1}{3}}{2} = \frac{(-\frac{1}{3})\cdot(-\frac{1}{3}-1)}{2!} = \frac{1\cdot 4}{3\cdot 3\cdot 2} = \frac{2}{9}$$
und
$$\binom{-\frac{1}{3}}{3} = \frac{(-\frac{1}{3})\cdot(-\frac{1}{3}-1)\cdot(-\frac{1}{3}-2)}{3!} = \frac{-1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 6} = -\frac{14}{81}$$
Also ist
$$\boxed{(1+3\cdot x)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}\cdot(3\cdot x) + \frac{2}{9}\cdot(3\cdot x)^2 - \frac{14}{81}\cdot(3\cdot x)^3 \pm \dots \text{ für } |3\cdot x| < 1}$$

Damit ist

$$f(x) = \frac{e^{3\cdot x}}{\sqrt[3]{1+3\cdot x}} = \left[1 + 3\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot(3\cdot x)^2 + \frac{1}{3!}\cdot(3\cdot x)^3 + \ldots\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{3}\cdot(3\cdot x) + \frac{2}{9}\cdot(3\cdot x)^2 - \frac{14}{81}\cdot(3\cdot x)^3 \pm \ldots\right]$$

Auch dieses Produkt auf der rechten Seite der obigen Gleichung wird ausgerechnet, indem jeweils gleiche Potenzen von $3\cdot x$ zusammengefasst werden - beginnend mit $(3\cdot x)^0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \left(-\frac{1}{3}+1\right)\cdot(3\cdot x)^1 + \left(\frac{2}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot(3\cdot x)^2 + \left(-\frac{14}{81}+\frac{2}{9}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)\cdot(3\cdot x)^3 + \ldots \\ &= 1 + \frac{2}{3}\cdot(3\cdot x) + \frac{7}{18}\cdot(3\cdot x)^2 + \frac{4}{81}\cdot(3\cdot x)^3 + \ldots \\ &= 1 + 2\cdot x + \frac{7}{2}\cdot x^2 + \frac{4}{3}\cdot x^3 + \ldots \qquad \text{für} \quad |3\cdot x| <^1 \end{aligned}$$

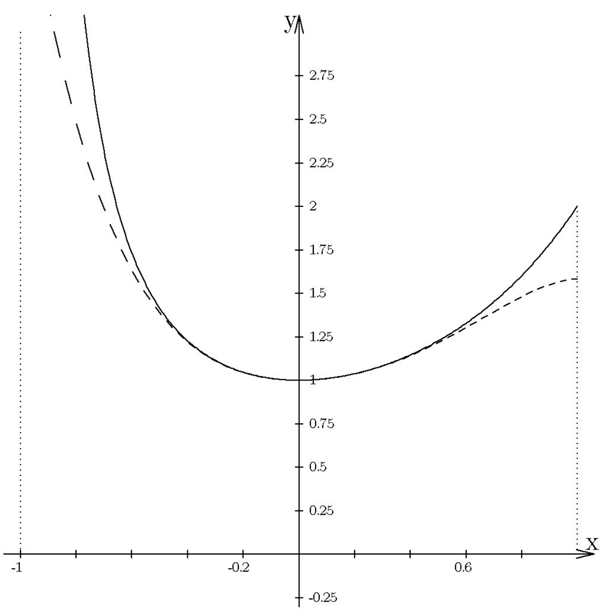


Bild 23.11:
$f(x) = (1+x)^x$ (ausgezogen)
und
$f(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{6}\cdot x^4 - \frac{3}{4}\cdot x^5 \pm \ldots$
(gestrichelt)
im Intervall $[-1, 1]$

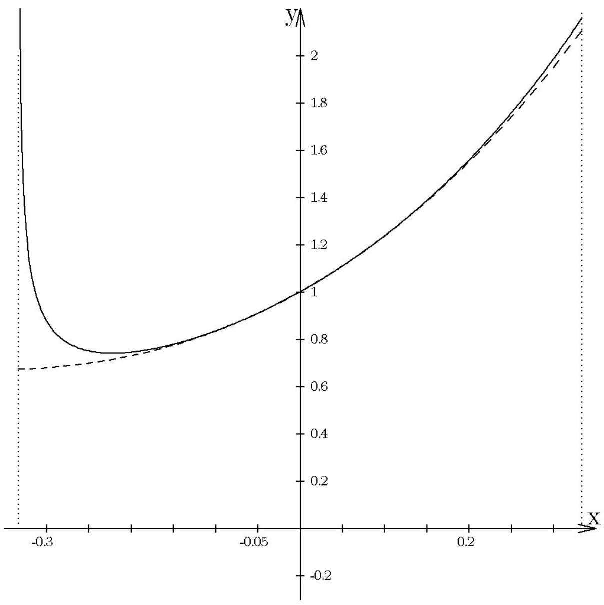


Bild 23.12:
$f(x) = \frac{e^{3\cdot x}}{\sqrt[3]{1+3\cdot x}}$ (ausgezogen)
und $f(x) = 1 + 2\cdot x + \frac{7}{2}\cdot x^2 + \frac{4}{3}x^3 \pm \ldots$
(gestrichelt)
im Intervall $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$