Stand: 18. August 2008
http://www.iazd.uni-hannover.de/~windelberg/teach/ing

24 Fourier-Reihen

periodische Funktion
Periode
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat die (positive) Periode P ($P > 0$), wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x+P) = f(x)$$

f wird dann als eine „periodische Funktion“ bezeichnet.

trigonometrische Reihe
Eine Funktion f mit

$$\boldsymbol{f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cdot \cos(i \cdot x) + b_i \cdot \sin(i \cdot x))} \qquad (\boldsymbol{TR})$$

heißt „trigonometrische Reihe“.

Beispiele periodischer Funktionen Aufgabe 24.1a)

$$f_1(x) = \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{P} \cdot x\right) \quad n \in \mathbb{N} \qquad 24.1a)$$

Lösung von Aufgabe 24.1a):

$$\begin{aligned} f_1(x+P) &= \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{P} \cdot (x+P)\right) = \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{P} \cdot x + \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{P} \cdot P)\right) \\ &= \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{P} \cdot x + 2 \cdot \pi \cdot n\right) = f_1(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 24.1b)

$$f_2(x) = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{P} \cdot x\right) \quad n \in \mathbb{N} \qquad 24.1b)$$

Lösung von Aufgabe 24.1b): entsprechend wie für $f_1(x)$.

Beispiele trigonometrischer Funktionen

Aufgabe 24.1c)

$$f_3(x) = \cos(x) \tag{24.1c)}$$

Lösung von 24.1c)
Es sind Koeffizienten a_i und b_i zu bestimmen, so dass $f(x)$ die Form (TR) annimmt.
Setze
$a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_i = 0$ für $i > 1$ sowie
$b_i = 0$ für $i > 0$.

Aufgabe 24.1d)

$$f_4(x) = 12 \cdot \cos\left(2 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) \tag{24.1d)}$$

Lösung von 24.1d)
Es sind Koeffizienten a_i und b_i zu bestimmen, so dass $f(x)$ die Form (TR) annimmt.
Das Additionstheorem des cos lautet:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

also folgt mit $\alpha = \pi \cdot x$ und $\beta = -\frac{\pi}{2}$

$$f(x) = 12 \cdot \left(\cos(2 \cdot x) \cdot \cos(-\frac{\pi}{2}) - \sin(2 \cdot x) \cdot \sin(-\frac{\pi}{2})\right)$$

Wegen $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ ergibt sich

$$f(x) = 12 \cdot \sin(2 \cdot x)$$

Setze
$a_i = 0$ für $i \geq 0$ sowie
$b_1 = 0$, $b_2 = 12$ und $b_i = 0$ für $i > 2$.

Aufgabe 24.1e)

$$f_5(x) = 15 \cdot \sin\left(3 \cdot x + \frac{\pi}{6}\right) \tag{24.1e)}$$

Lösung von 24.1e):
Es sind Koeffizienten a_i und b_i zu bestimmen, so dass $f(x)$ die Form (TR) annimmt.
Das Additionstheorem des Sinus lautet:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

also folgt mit $\alpha = 3 \cdot x$ und $\beta = \frac{\pi}{6}$

$$f(x) = 15 \cdot \left(\sin(3 \cdot x) \cdot \cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{6}) \cdot \cos(3 \cdot x)\right)$$

Wegen $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ und $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ergibt sich

$$f(x) = \frac{15}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(3 \cdot x) + \frac{15}{2} \cdot \cos(3 \cdot x)$$

Setze
$a_i = 0$ für $0 \leq i < 3$, $a_3 = \frac{15}{2} \cdot \sqrt{3}$ und $a_i = 0$ für $i > 3$ sowie
$b_i = 0$ für $1 \leq i < 3$, $b_3 = \frac{15}{2}$ und $b_i = 0$ für $i > 3$.

periodische Funktion

Eulersche (oder Euler-Fouriersche) Formeln

Es wurden in den Beispielen einige Funktionen als trigonometrische Reihe dargestellt. Mathematisch stellt sich daraus die Frage, welche Funktionen durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden können: Gibt es - wie bei der Taylorschen Reihe - einen Algorithmus, mit dem

für jede Funktion $\boldsymbol{f(x)}$ und **für jede Periode** $\boldsymbol{P}$

die Koeffizienten von (TR) bestimmt werden können?

Eulersche oder Euler-Fouriersche Formeln

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{P} \cdot \int_0^P f(x)\,dx \\ a_i &= \frac{2}{P} \cdot \int_0^P f(x) \cdot \cos\left(\frac{2\cdot\pi}{P} \cdot i \cdot x\right) dx \quad \text{für} \quad i \in \mathbb{N} \\ b_i &= \frac{2}{P} \cdot \int_0^P f(x) \cdot \sin\left(\frac{2\cdot\pi}{P} \cdot i \cdot x\right) dx \quad \text{für} \quad i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Es sei eine Funktion $f(x)$ gegeben.

Wie bei einer Taylorreihe ist nicht gesichert, ob die nach obiger Vorschrift durch $f(x)$ erzeugte Fourierreihe konvergiert.

Selbst in dem Falle einer Konvergenz der durch $f(x)$ erzeugten Fourierreihe ist nicht gesichert, ob ihre Summenfunktion (TR) gleich $f(x)$ ist.

Zusätzlich ist zu beachten, dass $f(x)$ außer ihrer Fourierreihe noch andere Darstellungen als trigonometrische Reihe haben kann.

Dirichletsche Bedingung

Ist die periodische Funktion $f(x)$ mit der Periode P für $0 \le x < P$ definiert und beschränkt und lässt sich das (offene) Intervall $]0, P[$ in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in deren jedem die Funktion stetig und monoton ist,

so konvergiert die durch $f(x)$ erzeugte Fourierreihe

- für jede Stetigkeitsstelle x_0 gegen $f(x_0)$
- für jede Sprungstelle x_S gegen den Mittelwert

$$f(x_S) := \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x\uparrow\ x_S} f(x) + \lim_{x\downarrow x_S} f(x) \right)$$

aus links- und rechtsseitigem Grenzwert.

Bemerkung: An einer Sprung- oder Flickstelle x_S mit voneinander verschiedenen links- und rechtsseitigem Grenzwert wird obiger Funktionswert $f(x_S)$ gesetzt.

Aufgabe 24.2 (Rechteckkurve) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 && \text{für} \quad 0 < x < \pi \\ f(x) &= -1 && \text{für} \quad \pi < x < 2\cdot\pi \\ f(x + 2\cdot k\cdot\pi) &= f(x) && \text{für} \quad k = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die durch $f(x)$ und die Periode $P = 2\cdot\pi$ erzeugte Fourierreihe unter Verwendung der Dirichletschen Bedingung und der Eulerschen Formeln.

Lösung von Aufgabe 24.2:
Für die „Flickstellen“ (an denen die Funktion nicht definiert ist) wird nach der Dirichletschen Bedingung gesetzt:

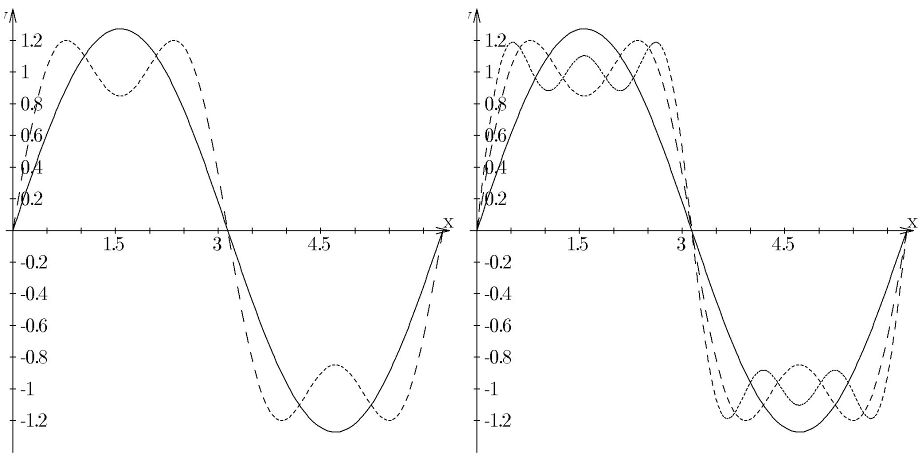
$$f(0) = f(k \cdot \pi) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \uparrow \pi} f(x) + \lim_{x \downarrow \pi} f(x) \right) = \frac{1}{2} \cdot (1 + (-1)) = 0$$

Nach den Eulerschen Formeln ergibt sich dann mit $P = 2 \cdot \pi$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} 1\,dx + \int_{\pi}^{2\cdot\pi} (-1)\,dx \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left([x]_{x=0}^{x=\pi} + [-x]_{x=\pi}^{x=2\cdot\pi} \right) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot ((\pi - 0) - (2 \cdot \pi - \pi)) = 0 \\
a_i &= \frac{2}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} 1 \cdot \cos(i \cdot x)\,dx + \int_{\pi}^{2\cdot\pi} (-1) \cdot \cos(i \cdot x)\,dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\left[\frac{1}{i} \cdot \sin(i \cdot x) \right]_{x=0}^{x=\pi} - \left[\frac{1}{i} \cdot \sin(i \cdot x) \right]_{x=\pi}^{x=2\cdot\pi} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{i} \cdot (\{\sin(i \cdot \pi) - \sin(0)\} - \{\sin(i \cdot 2 \cdot \pi) - \sin(\pi)\}) = 0 \quad \text{für} \quad i \in \mathbb{N} \\
b_i &= \frac{2}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(i \cdot x)\,dx + \int_{\pi}^{2\cdot\pi} (-1) \cdot \sin(i \cdot x)\,dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\left[-\frac{1}{i} \cdot \cos(i \cdot x) \right]_{x=0}^{x=\pi} - \left[-\frac{1}{i} \cdot \cos(i \cdot x) \right]_{x=\pi}^{x=2\cdot\pi} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{i} \cdot (\{-\cos(i \cdot \pi) + \cos(0)\} - \{-\cos(i \cdot 2 \cdot \pi) + \cos(i \cdot \pi)\}) \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{i} \cdot \begin{cases} \{-1 + 1\} - \{-1 + 1\} & = 0 \quad \text{für} \quad i \in 2 \cdot \mathbb{N} \\ \{-(-1) + 1\} - \{-1 + (-1)\} & = \frac{4}{i \cdot \pi} \quad \text{für} \quad i \in (2 \cdot \mathbb{N} + 1) \end{cases}
\end{aligned}$$

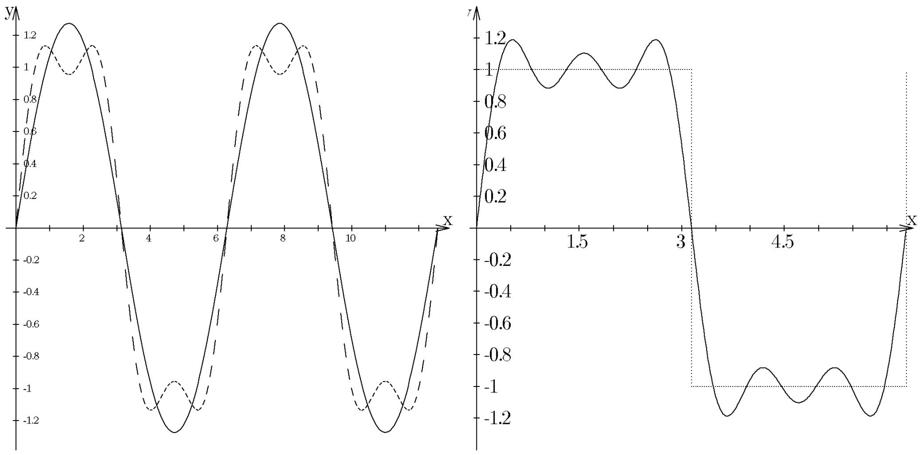
also

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2 \cdot n - 1) \cdot \pi} \cdot \sin((2 \cdot n - 1) \cdot x) \\
&= \frac{4}{\pi} \cdot \sin(x) + \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot x) + \frac{4}{5 \cdot \pi} \cdot \sin(5 \cdot x) + \ldots
\end{aligned}$$



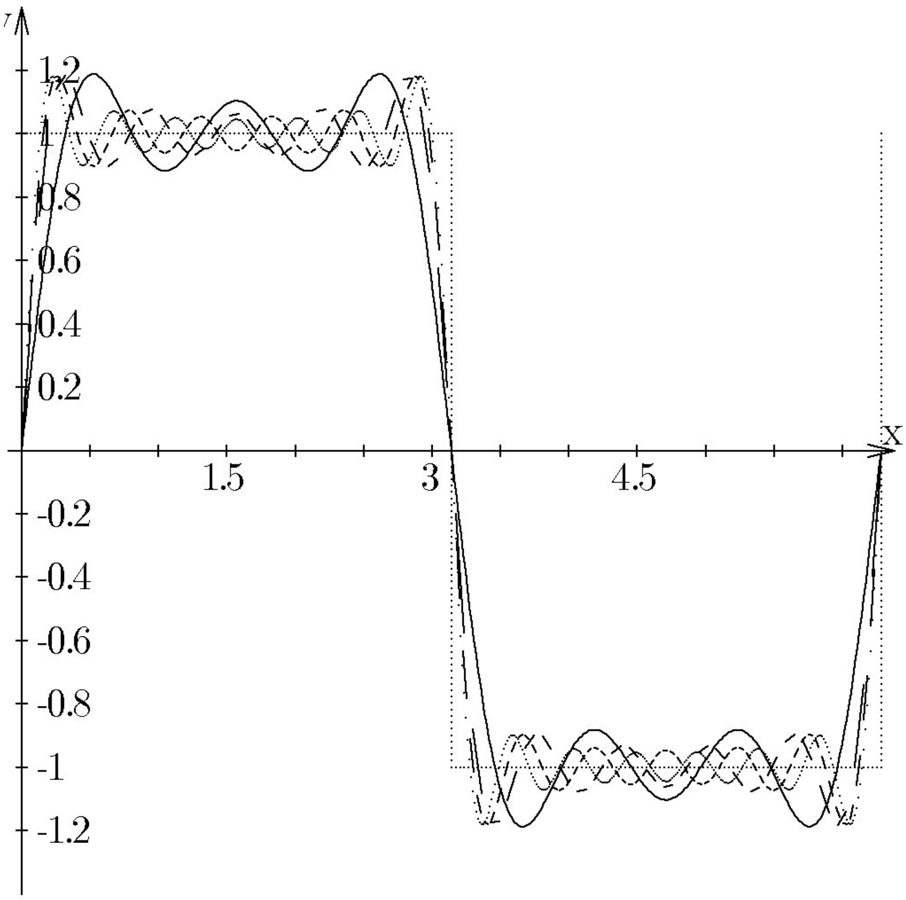
Aufgabe 24.2: Rechteckkurve

links) im Intervall $[0, 2 \cdot \pi]$: $f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin(x) + \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot x)$
rechts) im Intervall $[0, 2 \cdot \pi]$: $f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin(x) + \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot x) + \frac{4}{5 \cdot \pi} \cdot \sin(5 \cdot x)$



Aufgabe 24.2: Rechteckkurve

links) im Intervall $[0, 4 \cdot \pi]$: $f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin(x) + \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot x)$
rechts) im Intervall $[0, 2 \cdot \pi]$: $f(x) = \frac{4}{5 \cdot \pi} \cdot \sin(5 \cdot x)$ und Rechteck



Aufgabe 24.2: Rechteckkurve

Aufgabe 24.3 (Rechteckimpuls)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $0 < b < \frac{\pi}{2}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{für} \quad 0 < x < b \\ f(x) &= a && \text{für} \quad b < x < \pi - b \\ f(x) &= 0 && \text{für} \quad \pi - b < x < \pi + b \\ f(x) &= -a && \text{für} \quad \pi + b < x < 2 \cdot \pi - b \\ f(x) &= 0 && \text{für} \quad 2 \cdot \pi - b < x < 2 \cdot \pi \\ f(x + 2 \cdot k \cdot \pi) &= f(x) && \text{für} \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die durch $f(x)$ und die Periode $P = 2 \cdot \pi$ erzeugte Fourierreihe unter Verwendung der Dirichletschen Bedingung und der Eulerschen Formeln. Zeichnen Sie für $a = 1$ und $b = \frac{\pi}{6}$ die Funktion $f(x)$ sowie die ersten Kurven der erzeugten Fourierreihe (bis $i = 5$).

Lösung: Aufgabe 24.3

Es ist

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_0^b 0\, dx + \int_b^{\pi - b} a\, dx + \int_{\pi - b}^{\pi + b} 0\, dx + \int_{\pi + b}^{2 \cdot \pi - b} (-a)\, dx + \int_{2 \cdot \pi - b}^{2 \cdot \pi} 0\, dx \right) \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_b^{\pi - b} a\, dx + \int_{\pi + b}^{2 \cdot \pi - b} (-a)\, dx \right) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot (a \cdot (\pi - b - b) - a \cdot (2 \cdot \pi - b - (\pi + b))) \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot a \cdot (\pi - 2 \cdot b - 2 \cdot \pi + b + \pi + b) = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_b^{\pi - b} a \cdot \cos(i \cdot x)\; dx - \int_{\pi + b}^{2 \cdot \pi - b} a \cdot \cos(i \cdot x)\; dx \right) \\ &= \frac{a}{i \cdot \pi} \cdot \left([\sin(i \cdot x)]_b^{\pi - b} - [\sin(i \cdot x)]_{\pi + b}^{2 \cdot \pi - b} \right) \\ &= \frac{a}{i \cdot \pi} \cdot (\sin(i \cdot (\pi - b)) - \sin(i \cdot b) - \sin(i \cdot (2 \cdot \pi - b)) + \sin(i \cdot (\pi + b))). \end{aligned}$$

Da
$\sin(i \cdot b) = -\sin(i \cdot (2 \cdot \pi - b))$ und $\sin(i \cdot (\pi - b)) = -\sin(i \cdot (\pi + b))$ gilt,
ist $a_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Ferner ist

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_b^{\pi - b} a \cdot \sin(i \cdot x)\; dx - \int_{\pi + b}^{2 \cdot \pi - b} a \cdot \sin(i \cdot x)\; dx \right) \\ &= \frac{a}{i \cdot \pi} \cdot \left([-\cos(i \cdot x)]_b^{\pi - b} - [-\cos(i \cdot x)]_{\pi + b}^{2 \cdot \pi - b} \right) \\ &= \frac{a}{i \cdot \pi} \cdot (\cos(i \cdot b) - \cos(i \cdot (\pi - b)) + \cos(i \cdot (2 \cdot \pi - b)) - \cos(i \cdot (\pi + b))). \end{aligned}$$

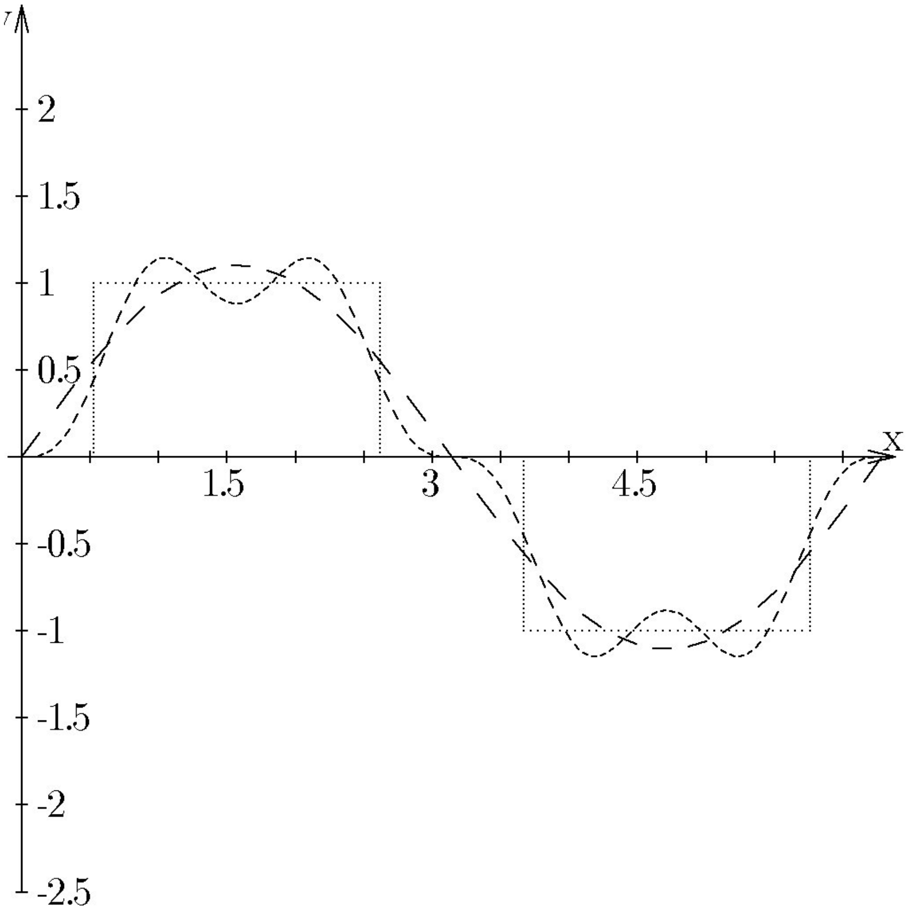
Es werden nun zwei Fälle untersucht:

<u>1. $i \in 2 \cdot \mathbb{N} + 1$, d.h. i ist ungerade</u>

Dann ist $\cos(i \cdot b) = \cos(i \cdot (2 \cdot \pi - b)) = -\cos(i \cdot (\pi - b)) = -\cos(i \cdot (\pi + b))$,
und daher gilt
$\cos(i \cdot b) - \cos(i \cdot (\pi - b)) + \cos(i \cdot (2 \cdot \pi - b)) - \cos(i \cdot (\pi + b)) = 4 \cdot \cos(i \cdot b)$
für alle $i \in \mathbb{N}$.
also ist $b_i = \dfrac{4 \cdot a}{i \cdot \pi} \cdot \cos(i \cdot b)$ für alle $i \in 2 \cdot \mathbb{N} + 1$.

2. $i \in 2 \cdot \mathbb{N}$, d.h. i ist gerade Dann ist $\cos(i \cdot b) = \cos(i \cdot (2 \cdot \pi - b)) = \cos(i \cdot (\pi - b)) = \cos(i \cdot (\pi + b))$,
und daher gilt
$\cos(i \cdot b) - \cos(i \cdot (\pi - b)) + \cos(i \cdot (2 \cdot \pi - b)) - \cos(i \cdot (\pi + b)) = 0$
für alle $i \in 2 \cdot \mathbb{N}$.

$$f(x) = \left(\frac{4 \cdot a}{\pi}\right) \cdot \left[\sin(x) \cdot \cos(b) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot x) \cdot \cos(3 \cdot b) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5 \cdot x) \cdot \cos(5 \cdot b) + \ldots\right]$$



Aufgabe 24.3: Rechteckimpuls 1. Art
für $a = 1$ und $b = \frac{\pi}{6}$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \left[\sin(x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot x) \cdot 0 - \frac{1}{5} \cdot \sin(5 \cdot x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \ldots\right]$$