Mathematik für Ingenieure
Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik
Dr. Dirk Windelberg **Universität Hannover**

Stand: 18. August 2008
http://www.iazd.uni-hannover.de/∼windelberg/teach/ing

26 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Definition (REP Seite 244)
Ein **lineares Gleichungssystem** ist ein System von m linearen Gleichungen mit n Variablen x_1, x_2,...;x_n:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1}\cdot x_1 & + & a_{1,2}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}\cdot x_n & = & b_1 \\
a_{2,1}\cdot x_1 & + & a_{2,2}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}\cdot x_n & = & b_2 \\
. & & . & + & & + & . & & . \\
. & & . & + & & + & . & & . \\
. & & . & + & & + & . & & . \\
a_{m,1}\cdot x_1 & + & a_{m,2}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}\cdot x_n & = & b_m
\end{array}$$

Die $a_{i,k}$ heißen die **Koeffizienten** des LGS.

In der **Matrixschreibweise**:
Es seien

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m,1} & a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

Dann schreibt man obiges LGS kurz in der Form:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Wir verwenden hier das **Gaußsche Eliminationsverfahren (REP Seite 245)** zur Lösung von Linearen Gleichungssystemen.

Aufgabe 26.1: Lösen Sie jedes der folgenden linearen Gleichungssysteme

Aufgabe 26.1a)

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 26.1b)

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & = & 1 \end{array}$$

Lösung von Aufgabe 26.1a):

	x_1	x_2	r.S.	$\sum$	Regie
(1)	$\boxed{1}$	1	0	2	1
(2)	1	-1	1	1	1
(3)	2	0	1	3	

Es gibt **genau eine Lösung**,
denn auf der linken Seite der letzten Gleichung (3) steht eine Zahl $\neq 0$,
und auf der rechten Seite steht eine beliebige Zahl.

Die letzte Gleichung (3) lautet: $2 \cdot x_1 = 1$, also $x_1 = 0.5$.
Werden nun jeweils die Gleichungen betrachtet, in denen $\boxed{}$ steht, dann erhält man:
aus Gleichung (1): $x_1 + x_2 = 0$, also $x_2 = -0.5$
Die einzige Lösung dieses LGS lautet daher

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

Lösung von Aufgabe 26.1b):

	x_1	x_2	r.S.	$\sum$	Regie
(1)	$\boxed{1}$	1	0	2	-1
(2)	1	1	1	3	1
(3)	0	0	1	1	

Es gibt **keine Lösung**,
denn auf der linken Seite der letzten Gleichung (3) steht 0
und auf der rechten Seite steht eine Zahl $\neq 0$.

Lösen Sie jedes der folgenden linearen Gleichungssysteme

Aufgabe 26.1c)

$$x_1 + x_2 = 0$$

Aufgabe 26.1d)

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 & = & 1 \end{array}$$

Lösung von Aufgabe 26.1c): Für die Aufgabe $x_1 + x_2 = 0$ gibt es **eine einfach (oder mehrfach) unendliche Lösungsschar**,
denn es gibt weniger Gleichungen als Variable.

Wir wählen dann eine der Variablen, hier z.B. x_1. (Oft wird der Parameter durch λ beschrieben, also hier $\boxed{\lambda := x_1}$.)
Dann ist $\lambda + x_2 = 0$, also $\boxed{x_2 = -\lambda}$.
Die Lösung dieses LGS kann daher beschrieben werden in der Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

An dieser Schreibweise ist erkennbar, dass die Lösung als Gerade dargestellt werden kann: Jeder Punkt dieser Geraden ist eine Lösung des LGS.

Lösung von Aufgabe 26.1d):

	x_1	x_2	r.S.	$\sum$	Regie
(1)	$\boxed{1}$	1	1	3	-1
(2)	1	1	1	3	1
(3)	0	0	0	0	

Da wir nur zwei Variablen (x_1 und x_2) haben, gibt es **eine einfach unendliche Lösungsschar**, (sonst kann es auch eine **mehrfach** unendliche Lösungsschar geben),
denn auf der linken Seite der letzten Gleichung (3) steht 0,
und auf der rechten Seite steht ebenfalls 0.

Wir wählen dann die Variable, in deren Spalte kein $\boxed{}$ auftritt, als **Parameter**, hier also x_2. (Oft wird der Parameter durch λ beschrieben.)
Nach Gleichung (1) ist $x_1 + x_2 = 1$, also $x_1 = 1 - x_2 = 1 - \lambda$.
Die Lösung dieses LGS kann daher beschrieben werden in der Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

An dieser Schreibweise ist erkennbar, dass die Lösung als Gerade dargestellt werden kann: Jeder Punkt dieser Geraden ist eine Lösung des LGS.

Aufgabe 26.1e)

Gegeben seien im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren
$\vec{a}_1 = (-2, 4, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (3, 5, 4, -1, 11)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, -1, 3, 5)$, $\vec{a}_4 = (0, 3, 2, 1, 6)$, $\vec{a}_5 = (0, 1, 0, -1, 2)$.
Beschreiben Sie den Vektor $\vec{x} = (1, 0, 1, 0, 1)$ als Linearkombination dieser 5 Vektoren:

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + \lambda_5 \cdot \vec{a}_5$$

d.h. bestimmen Sie die 5 Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$.

Lösung von Aufgabe 26.1e):

Nr.	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	r.S.	$\sum$	Regie			
1	-2	3	1	0	0	1	1	1			
2	4	5	2	3	$\boxed{1}$	0	15	0	0	1	-2
3	1	4	-1	2	0	1	7		1		
4	0	-1	3	1	-1	0	2			1	
5	0	11	5	6	2	1	25				1
6	-2	3	1	0	0	1	3	1			
7	1	4	-1	2	0	1	7		1		
8	4	4	5	4	0	0	17			1	
9	-8	1	$\boxed{1}$	0	0	1	-5	-1	1	-5	
10	6	2	0	0		0	8	1			
11	-7	5	0	2		2	2		1		
12	44	$\boxed{-1}$	0	4		-5	42	2	5		
13	94	0		8		-10	92	22			
14	213	0		$\boxed{22}$		-23	212	-8			
15	2068			0		-220	2024				
	-1704					+184	-1696				
	364					-36	328				

Aus Nr.2 ergibt sich: 16 $\boxed{\lambda_5 = -4 \cdot \lambda_1 - 5 \cdot \lambda_2 - 2 \cdot \lambda_3 - 3 \cdot \lambda_4}$

Aus Nr.9 ergibt sich: 17 $\boxed{\lambda_3 = 1 + 8 \cdot \lambda_1 - \lambda_2}$

Aus Nr.12 ergibt sich: 18 $\boxed{\lambda_2 = 5 + 44 \cdot \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_4}$

Aus Nr.14 ergibt sich: 19 $\boxed{22 \cdot \lambda_4 = -23 - 213 \cdot \lambda_1}$

Aus Nr.15 ergibt sich: 20 $\boxed{\lambda_1 = -\frac{36}{364} = -\frac{9}{91} \approx -0.099}$

aus Nr. 20 folgt dann nach Nr. 19: 21 $\boxed{\lambda_4 \approx \frac{-23 + 213 \cdot \frac{9}{91}}{22} = -\frac{8}{91} \approx -0.088}$

aus Nr. 20 bis 21 folgt dann nach Nr. 18: 22 $\boxed{\lambda_2 = 5 - 44 \cdot \frac{9}{91} - 4 \cdot \frac{8}{91} = \frac{27}{91} \approx 0.297}$

aus Nr. 20 bis 22 folgt dann nach Nr. 17: 23 $\boxed{\lambda_3 = \frac{91 - 8 \cdot 9 - 27}{91} = -\frac{8}{91} \approx -0.088}$

aus Nr. 20 bis 23 folgt dann nach Nr. 16: $\boxed{\lambda_5 = \frac{4 \cdot 9 - 5 \cdot 27 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 8}{91} = -\frac{59}{91} \approx -0.6484}$

Nun ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{9}{91} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{27}{91} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{8}{91} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{8}{91} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{59}{91} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

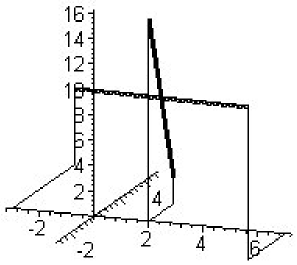
Aufgabe 26.2

Zeigen Sie, dass die Verbindungsgerade g_1 der Punkte $A = (7, -3, 12)$ und $B = (-3, 5, 6)$ einen Schnittpunkt S mit der Geraden

$$g_2 = \{(2, 2, 2) + \lambda \cdot (0, -1, 7)\,, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

besitzt.
Zeichnen Sie diese beiden Geraden in einem 3-D-Koordinatensystem.
Welchen Winkel α (bzw. $\pi - \alpha$) schliessen die beiden Geraden ein?

Lösung von Aufgabe 26.2:



Aufgabe 26.2: Verbindungsgeraden von $A = (7, -3, 12)$ und $B = (-3, 5, 6)$ sowie von $C = (2, 2, 2)$ und $D = (2, 0, 16)$

Zunächst die Gleichung der Geraden g_1:

$$g_1 = \{\, (7, -3, 12) + \mu \cdot ((-3, 5, 6) - (7, -3, 12))\,, \quad \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(7, -3, 12) + \mu \cdot (-10, 8, -6)\,, \mu \in \mathbb{R}\}$$

g_1 und g_2 besitzen genau dann einen Schnittpunkt, oder wenn es genau ein Zahlenpaar λ_0, μ_0 gibt mit

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu_0 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 7 & - & 10 \cdot \mu_0 & = & 2 & + & 0 \cdot \lambda_0 \\ -3 & + & 8 \cdot \mu_0 & = & 2 & - & 1 \cdot \lambda_0 \\ 12 & - & 6 \cdot \mu_0 & = & 2 & + & 7 \cdot \lambda_0 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 7 & - & 10 \cdot \mu_0 & = & 2 & + & 0 \cdot \lambda_0 \\ -3 & + & 8 \cdot \mu_0 & = & 2 & - & 1 \cdot \lambda_0 \\ 12 & - & 6 \cdot \mu_0 & = & 2 & + & 7 \cdot \lambda_0 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{rcrcr} -10 \cdot \mu_0 & - & 0 \cdot \lambda_0 & = & -5 \\ 8 \cdot \mu_0 & + & 1 \cdot \lambda_0 & = & 5 \\ -6 \cdot \mu_0 & - & 7 \cdot \lambda_0 & = & -10 \end{array}$$

Dieses lineare Gleichungssystem schreiben wir in der Form

Nr	μ_0	λ_0	rechte Seite	Summe	Regie	
(1)	-10	0	-5	-15	1	
(2)	8	$\boxed{1}$	5	13	0	7
(3)	-6	-7	-10	-23		1
(4)	-10	0	$\boxed{-5}$	-15	5	
(5)	50	0	25	-25	1	
(6)	0	0	0	0		

Aus (4) ergibt sich: $-10 \cdot \mu_0 = -5$, also $\mu_0 = \frac{1}{2}$
Aus (2) ergibt sich: $8 \cdot \frac{1}{2} + \lambda_0 = 5$, also $\lambda_0 = 1$
Damit kann der Schnittpunkt berechnet werden:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Nun müssen wir zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definieren, die die Richtungen der Geraden beschreiben:
Wir wählen einfach die Richtungsvektoren:
$\vec{a} = (-10, 8, 6)$ und $\vec{b} = (0, -1, 7)$
und setzen $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.
Dann ist nach Definition des Cosinus (siehe auch REP Seite 139):

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(-10, 8, -6) \circ (0, -1, 7)}{|(-10, 8, -6)| \cdot |(0, -1, 7)|} = \frac{-10 \cdot 0 - 8 - 6 \cdot 7}{\sqrt{200} \cdot \sqrt{50}} = \frac{-50}{100} = -\frac{1}{2}$$

also $\alpha = 120°$ oder $\alpha = 60°$

Aufgabe 26.3a: Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_2 & - & 7 \cdot x_3 & - & 5 \cdot x_4 & = & -2 \\ 2 \cdot x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3 \cdot x_4 & = & 4 \\ 5 \cdot x_1 & + & 2 \cdot x_2 & - & 4 \cdot x_3 & + & 3 \cdot x_4 & = & 6 \end{array}$$

Lösung von Aufgabe 26.3a):

	x_1	x_2	x_3	x_4	r.S.	$\sum$	Regie		
(1)	$\boxed{1}$	1	-1	-1	1	1	-2	-2	-5
(2)	2	5	-7	-5	-2	-7	1		
(3)	2	-1	1	3	4	9		1	
(4)	5	2	-4	3	6	12			1
(5)		$\boxed{3}$	-5	-3	-4	-9	1	1	
(6)		-3	3	5	2	7	1		
(7)		-3	1	8	1	7		1	
(8)			$\boxed{-2}$	2	-2	-2	-2		
(9)			-4	5	-3	-2	1		
(10)				1	1	2			

Es gibt **genau eine Lösung**,
denn auf der linken Seite der letzten Gleichung steht eine Zahl $\neq 0$
und auf der rechten Seite steht eine beliebige Zahl.

Die letzte Gleichung (10) lautet: $\boxed{x_4 = 1}$.
Werden nun jeweils die Gleichungen betrachtet, in denen $\boxed{}$ steht, dann erhält man:
aus Gleichung (8): $-2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = -2$, also $\boxed{x_3 = 2}$,
aus Gleichung (5): $3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 = -4$, also $\boxed{x_2 = 3}$,
aus Gleichung (1): $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1$, also $\boxed{x_1 = 1}$.
Die einzige Lösung dieses linearen Gleichungssystems lautet daher

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 26.3b: Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2\cdot x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ -2\cdot x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 2\cdot x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & 5\cdot x_2 & - & x_3 & + & 3\cdot x_4 & = & 5 \end{array}$$

Lösung der Aufgabe 26.3b):

	x_1	x_2	x_3	x_4	r.S.	$\sum$	Regie		
(1)	1	2	-1	0	2	4	1		
(2)	-2	0	$\boxed{1}$	1	0	0	1	0	1
(3)	1	1	0	2	-1	3		1	
(4)	1	5	-1	3	5	13			1
(5)	-1	2	0	1	2	4	1		
(6)	$\boxed{1}$	1	0	2	-1	3	1	1	
(7)	-1	5	0	4	5	13		1	
(8)	0	$\boxed{3}$	0	3	1	7	-2		
(9)	0	6	0	6	4	16	1		
(10)	0	0	0	0	2	2			

Es gibt **keine Lösung**,
denn auf der linken Seite der letzten Gleichung (10) steht 0
und auf der rechten Seite steht eine Zahl $\neq 0$.

Aufgabe 26.3c: Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3\cdot x_2 & - & 2\cdot x_3 & - & 9\cdot x_4 & = & -35 \\ 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & 2\cdot x_3 & - & 15\cdot x_4 & = & -50 \\ -3\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & x_3 & + & 4\cdot x_4 & = & 20 \end{array}$$

Lösung der Aufgabe 26.3c):

	x_1	x_2	x_3	x_4	r.S.	$\sum$	Regie	
(1)	$\boxed{1}$	3	-2	-9	-35	-42	-2	3
(2)	2	1	2	-15	-50	-60	1	
(3)	-3	2	1	4	20	24		1
(4)		$\boxed{-5}$	6	3	20	24	11	
(5)		11	-5	-23	-85	-102	5	
(6)			41	-82	-205	-246		

Es gibt **eine einfach (oder mehrfach) unendliche Lösungsschar**,
denn es gibt weniger Gleichungen als Variable.

Wir wählen dann eine der Variablen, in deren Spalte kein $\boxed{}$ auftritt, als **Parameter**, hier also z.B. x_4. (Oft wird der Parameter durch λ beschrieben, also hier $\boxed{\lambda := x_4}$.)
Nach Gleichung (6) ist $41 \cdot x_3 - 82 \cdot \lambda = -205$, also $\boxed{x_3 = -5 + 2 \cdot \lambda}$.
Nach Gleichung (4) ist $-5 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 3 \cdot \lambda = 20$, also $-5 \cdot x_2 + 6 \cdot (-5 + 2 \cdot \lambda) + 3 \cdot \lambda = 20$,
damit ist $\boxed{x_2 = -10 + 3 \cdot \lambda}$.
Nach Gleichung (1) ist $x_1 + 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 - 9 \cdot \lambda = -35$,
also $x_1 + 3 \cdot (-10 + 3 \cdot \lambda) - 2 \cdot (-5 + 2 \cdot \lambda) - 9 \cdot \lambda = -35$
und damit $\boxed{x_1 = -15 + 4 \cdot \lambda}$.

Die Lösung dieses LGS kann daher beschrieben werden in der Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 + 4 \cdot \lambda \\ -10 + 3 \cdot \lambda \\ -5 + 2 \cdot \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

An dieser Schreibweise ist erkennbar, dass die Lösung als Gerade dargestellt werden kann: Jeder Punkt dieser Geraden ist eine Lösung des LGS.

Aufgabe 26.3d: Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3 \cdot x_3 & & & = & 6 \\ 2 \cdot x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ -x_1 & + & 2 \cdot x_2 & - & 2 \cdot x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ 3 \cdot x_1 & + & x_2 & - & 4 \cdot x_3 & - & x_4 & = & 13 \end{array}$$

Lösung der Aufgabe 26.3d):

	x_1	x_2	x_3	x_4	r.S.	$\sum$	Regie			
(1)	$\boxed{1}$	-1	0	1	3	4	-1	-2	1	-3
(2)	1	1	-3	0	6	5	1			
(3)	2	-1	1	-1	5	6		1		
(4)	-1	2	-2	-1	-1	-3			1	
(5)	3	1	-4	-1	13	12				1
(6)		2	-3	$\boxed{-1}$	3	1	-3	0	-4	
(7)		1	1	-3	-1	-2	1			
(8)		1	-2	0	2	1		1		
(9)		4	-4	-4	4	0			1	
(10)		-5	10	0	-10	-5	1			
(11)		$\boxed{1}$	-2	0	2	1	5	4		
(12)		-4	8	0	-8	-4		1		
(13)		0	0	0	0	0				
(14)		0	0	0	0	0				
(15)		0	0	0	0	0				

Es gibt **eine einfach (oder mehrfach) unendliche Lösungsschar**,
denn auf der linken Seite der letzten Gleichung (15) steht 0,
und auf der rechten Seite steht ebenfalls 0.

Wir wählen dann eine Variable, in deren Spalte kein $\boxed{}$ auftritt, als **Parameter**, hier also x_3.
(Oft wird der Parameter durch λ beschrieben, also hier $\lambda := x_3$.)
Nach Gleichung (11) ist $x_2 - 2 \cdot x_3 = 2$, also $x_2 = 2 + 2 \cdot \lambda$.
Nach Gleichung (6) ist $2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 - x_4 = 3$, also $2 \cdot (2 + 2 \cdot \lambda) - 3 \cdot \lambda - x_4 = 3$
und damit $x_4 = 1 + \lambda$.
Nach Gleichung (1) ist $x_1 - x_2 + x_4 = 3$, also $x_1 - (2 + 2 \cdot \lambda) + 1 + \lambda = 3$
und damit $x_1 = 4 + \lambda$.
Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems kann daher beschrieben werden in der Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \lambda \\ 2 + 2 \cdot \lambda \\ \lambda \\ 1 + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$