**Mathematik für Ingenieure**
**Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik**
**Dr. Dirk Windelberg** **Universität Hannover**

Stand: 18. August 2008
http://www.iazd.uni-hannover.de/∼windelberg/teach/ing

# 28 allgemeine Lineare Gleichungssysteme

**Aufgabe 28.1 (Kegelschnitt)**
Gibt man in der $x-y$-Ebene fünf Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ und $E$ vor, von denen jeweils nicht mehr als drei auf einer Geraden liegen, so existiert genau ein Kegelschnitt durch diese Punkte. Dieser Kegelschnitt lässt sich beschreiben durch eine Gleichung der Form

$$a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x + 2 \cdot a_{23} \cdot y + a_{33} = 0$$

Bestimmen Sie eine Gleichung für den Kegelschnitt durch die folgenden Punkte:

**a)** $A = (0, 1)$ $B = (0, -3)$ $C = (1, 0)$ $D = (-3, 0)$ $E = (1, -2)$

**b)** $A = (0, 1)$ $B = (2, 0)$ $C = (2, 2)$ $D = (4, 1)$ $E = (1, 1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3})$

**c)** $A = (-1, \sqrt{3})$ $B = (0, 0)$ $C = (2, 0)$ $D = (3, \sqrt{3})$ $E = (3, -\sqrt{3})$

**Lösung von Aufgabe 28.1a)**
Setzt man die Koordinaten der fünf gegebenen Punkte in die allgemeine Kegelschnittgleichung

$$a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x + 2 \cdot a_{23} \cdot y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

ein, so erhält man ein LGS aus fünf Gleichungen mit den sechs Unbekannten $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$, $a_{13}$, $a_{23}$ und $a_{33}$:

| | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{22}$ | $a_{13}$ | $a_{23}$ | $a_{33}$ | r.S. | $\sum$ | Regie | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 4 | 1 | | | |
| (2) | 0 | 0 | 9 | 0 | -6 | 1 | 0 | 4 | | 1 | | |
| (3) | $\boxed{1}$ | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 4 | 0 | 0 | -9 | -1 |
| (4) | 9 | 0 | 0 | -6 | 0 | 1 | 0 | 4 | | | 1 | |
| (5) | 1 | -4 | 4 | 2 | -4 | 1 | 0 | 0 | 1 | | | 1 |
| (6) | | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 4 | 1 | | | |
| (7) | | 0 | 9 | 0 | -6 | 1 | 0 | 4 | | 1 | | |
| (8) | | 0 | 0 | -24 | 0 | -8 | 0 | -32 | | | $-\frac{1}{8}$ | |
| (9) | | $\boxed{-4}$ | 4 | 0 | -4 | 0 | 0 | -4 | 0 | 0 | 0 | |
| (10) | | | $\boxed{1}$ | 0 | 2 | 1 | 0 | 4 | -9 | 0 | | |
| (11) | | | 9 | 0 | -6 | 1 | 0 | 4 | 1 | | | |
| (12) | | | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 4 | | 1 | | |
| (13) | | | | 0 | -24 | -8 | 0 | -32 | $-\frac{1}{8}$ | | | |
| (14) | | | | $\boxed{3}$ | 0 | 1 | 0 | 4 | 0 | | | |
| (15) | | | | | 3 | 1 | 0 | 4 | | | | |

Aus (15) $3 \cdot a_{23} + a_{33} = 0 \implies a_{33} = -3 \cdot a_{23}$ mit $a_{23} \in \mathbb{R}$ als Parameter
Aus (14) $3 \cdot a_{13} + a_{33} = 0 \implies a_{13} = a_{23}$
Aus (10) $a_{22} + 2 \cdot a_{23} + a_{33} = 0 \implies a_{22} = a_{23}$
Aus (9) $-4 \cdot a_{12} + 4 \cdot a_{22} - 4 \cdot a_{23} = 0 \implies a_{12} = 0$
Aus (3) $a_{11} + 2 \cdot a_{13} + a_{33} = 0 \implies a_{11} = a_{23}$

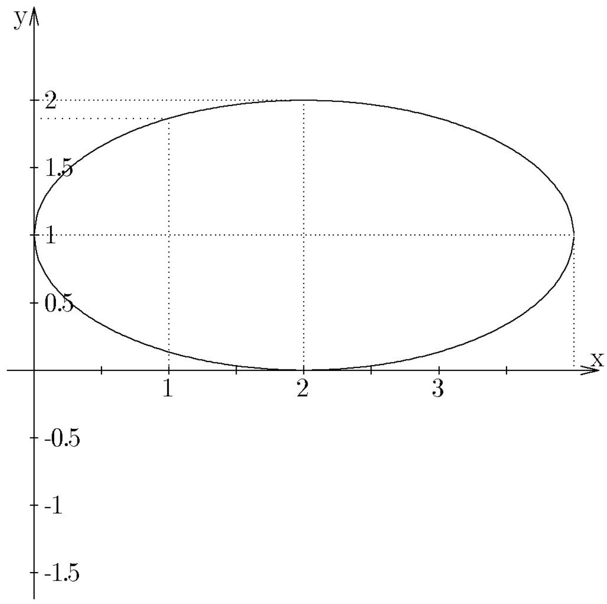
Nach (1) also

$$a_{23} \cdot x^2 + a_{23} \cdot y^2 + 2 \cdot a_{23} \cdot x + 2 \cdot a_{23} \cdot y - 3 \cdot a_{23} = 0$$

Daraus ergibt sich z.B. für $a_{23} = 1$:

$$x^2 + y^2 + 2 \cdot x + 2 \cdot y - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$$

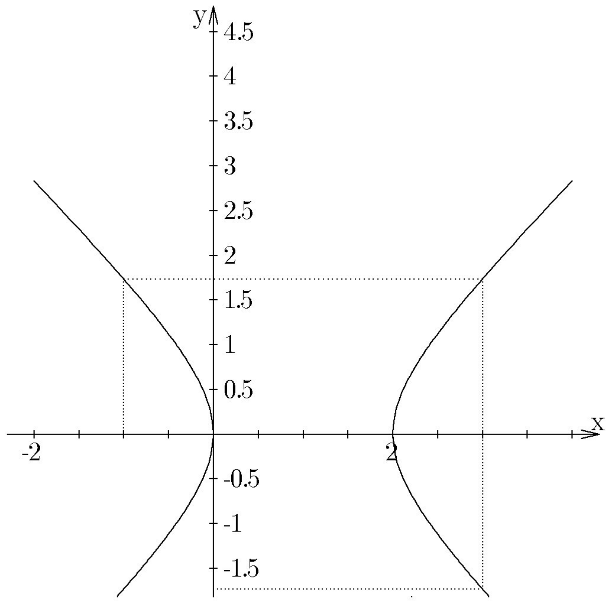
**Lösung von Aufgabe 28.1b)**




*Aufgabe 28.1b):* Kegelschnitt durch die 5 Punkte
$A = (0, 1) \quad B = (2, 0) \quad C = (2, 2) \quad D = (4, 1) \quad E = (1, 1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3})$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$$

**Lösung von Aufgabe 28.1c)**




*Aufgabe 28.1c):* Kegelschnitt durch die 5 Punkte
$A = (-1, \sqrt{3}) \quad B = (0, 0) \quad C = (2, 0) \quad D = (3, \sqrt{3}) \quad E = (3, -\sqrt{3})$

$$(x-1)^2 - y^2 = 1$$

**Aufgabe 28.2a) („Gauss mit Buchstaben“ (REP S. 253))**
Lösen Sie das folgende Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & -1 \\ 4 \cdot x & - & 3 \cdot y & + & \beta \cdot z & = & -3 \\ 2 \cdot x & - & \beta \cdot y & + & 6 \cdot z & = & 0 \end{array}$$

**Lösung von Aufgabe 28.2a)**:

| | $x$ | $y$ | $z$ | r.S. | $\sum$ | Regie | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $\boxed{1}$ | -1 | -1 | -1 | -2 | -4 | -2 |
| (2) | 4 | -3 | $\beta$ | -3 | $\beta - 2$ | 1 | |
| (3) | 2 | $-\beta$ | 6 | 0 | $-\beta + 8$ | | 1 |
| (4) | 0 | $\boxed{1}$ | $\beta + 4$ | 1 | $\beta + 6$ | $\beta - 2$ | |
| (5) | 0 | $2 - \beta$ | 8 | 2 | $-\beta + 12$ | 1 | |
| (6) | 0 | 0 | $\beta^2 + 2 \cdot \beta$ | $\beta$ | $\beta^2 + 3 \cdot \beta$ | | |

Die letzte Zeile (bei 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten) lautet also

$$\beta \cdot (\beta + 2) \cdot z = \beta$$

Aus dieser letzten Zeile lesen wir ab:

| | | |
|---|---|---|
| $\underline{\beta = 0}$: | $0 \cdot z = 0$ | wähle $z$ als Parameter; es gibt mehrfache Lösungen |
| $\underline{\beta = -2}$: | $0 \cdot z = -2$ | es gibt keine Lösung |
| $\underline{\beta \notin \{0, -2\}}$: | $(\beta + 2) \cdot z = 1$ | es gibt genau eine Lösung |

<u>Fall $\beta = 0$:</u>

Aus (4) $y = 1 - (\beta + 4) \cdot z \quad y = 1 - 4 \cdot z$

Aus (1) $x = -1 + y + z \quad x = -1 + (1 - 4 \cdot z) + z \quad x = -3 \cdot z$

$$\text{Also } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Fall $\beta \notin \{0, -2\}$:</u>

Aus (6) $z = \dfrac{1}{\beta + 2}$

Aus (4) $y = 1 - (\beta + 4) \cdot z \quad y = 1 - \dfrac{\beta + 4}{\beta + 2} = \dfrac{-2}{\beta + 2}$

Aus (1) $x = -1 + y + z \quad x = -1 + \dfrac{-2}{\beta + 2} + \dfrac{1}{\beta + 2} = \dfrac{-3 - \beta}{\beta + 2}$

$$\text{Also } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta + 2} \cdot \begin{pmatrix} -3 - \beta \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 28.2b) („Gauss mit Buchstaben“ (REP S. 253))**
Lösen Sie das folgende Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2\cdot x & + & 3\cdot y & + & (\beta+3)\cdot z & = & 3 \\ 3\cdot x & + & (5-\beta)\cdot y & + & (5-\beta)\cdot z & = & 5 \end{array}$$

**Lösung von Aufgabe 28.2b)**:

| | $x$ | $y$ | $z$ | r.S. | $\sum$ | Regie | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $\boxed{1}$ | 1 | 1 | 1 | 4 | -2 | -3 |
| (2) | 2 | 3 | $\beta+3$ | 3 | $\beta+11$ | 1 | |
| (3) | 3 | $5-\beta$ | $5-\beta$ | 5 | $18-2\cdot\beta$ | | 1 |
| (4) | 0 | $\boxed{1}$ | $\beta+1$ | 1 | $\beta+3$ | $\beta-2$ | |
| (5) | 0 | $2-\beta$ | $2-\beta$ | 2 | $6-2\cdot\beta$ | 1 | |
| (6) | 0 | 0 | $\beta^2-2\cdot\beta$ | $\beta$ | $\beta^2-\beta$ | | |

Die letzte Zeile (bei 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten) lautet also

$$\beta\cdot(\beta-2)\cdot z \quad = \beta$$

Aus dieser letzten Zeile lesen wir ab:

| | | |
|---|---|---|
| $\underline{\beta = 0}$: | $0\cdot z = 0$ | wähle $z$ als Parameter; es gibt mehrfache Lösungen |
| $\underline{\beta = 2}$: | $0\cdot z = 2$ | es gibt keine Lösung |
| $\underline{\beta \notin \{0,2\}}$: | $(\beta-2)\cdot z = 1$ | es gibt genau eine Lösung |

Fall $\beta = 0$:

Aus (4) $\quad y = 1-(\beta+1)\cdot z \quad y = 1-z$

Aus (1) $\quad x = 1-y-z \quad x = 1-(1-z)-z \quad x = 0$

$$\text{Also } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fall $\beta \notin \{0,-2\}$:

Aus (6) $\quad z = \dfrac{1}{\beta-2}$

Aus (4) $\quad y = 1-(\beta+1)\cdot z \quad y = 1-\dfrac{\beta+1}{\beta-2} = \dfrac{-3}{\beta-2}$

Aus (1) $\quad x = 1-y-z \quad x = 1-\dfrac{-3}{\beta-2}-\dfrac{1}{\beta-2} = \dfrac{\beta}{\beta-2}$

$$\text{Also } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta-2}\cdot\begin{pmatrix} \beta \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 28.2c) („Gauss mit Buchstaben“ (REP S. 253))**
Lösen Sie das folgende Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & \beta \cdot y & - & 2 \cdot z & = & 2 \\ \beta \cdot x & + & 2 \cdot y & + & z & = & 1 \end{array}$$

**Lösung von Aufgabe 28.2c)**

| | $x$ | $y$ | $z$ | r.S. | $\sum$ | Regie |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $\boxed{1}$ | $-\beta$ | -2 | 2 | $1-\beta$ | $-\beta$ |
| (2) | $\beta$ | 2 | 1 | 1 | $4+\beta$ | 1 |
| (3) | 0 | $2+\beta^2$ | $1+2\cdot\beta$ | $1-2\cdot\beta$ | $4+\beta^2$ | |

Die letzte Zeile (bei 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten) lautet also

$$(2+\beta^2)\cdot y + (1+2\cdot\beta)\cdot z \quad = 1 - 2\cdot\beta \;\|$$

wähle $z$ als Parameter.

Da $2+\beta^2$ im Reellen stets $>0$ ist, folgt

aus (3) $y = \dfrac{1}{2+\beta^2}\cdot((1-2\cdot\beta)-(1+2\cdot\beta)\cdot z)$

aus (1)
$$\begin{aligned} x &= 2+\beta\cdot y+2\cdot z = 2+\frac{\beta}{2+\beta^2}\cdot[(1-2\cdot\beta)-(1+2\cdot\beta)\cdot z]+2\cdot z \\ &= \frac{1}{2+\beta^2}\cdot\left\{2\cdot(2+\beta^2)+\beta\cdot[(1-2\cdot\beta)-(1+2\cdot\beta)\cdot z]+2\cdot z\cdot(2+\beta^2)\right\} \\ &= \frac{1}{2+\beta^2}\cdot\left\{4+2\cdot\beta^2+\beta-2\cdot\beta^2+z\cdot\left[-\beta-2\cdot\beta^2+2\cdot(2+\beta^2)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2+\beta^2}\cdot\{(4+\beta)+(4-\beta)\cdot z\} \end{aligned}$$

Also $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2+\beta^2}\cdot\begin{pmatrix} 4+\beta \\ 1-2\cdot\beta \\ 0 \end{pmatrix} + z\cdot\dfrac{1}{2+\beta^2}\cdot\begin{pmatrix} 4-\beta \\ -1-2\cdot\beta \\ 2+\beta^2 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 28.3 („Gauss mit Buchstaben")**
Für welche $a \in \mathbb{R}$ läßt sich der Vektor $(a^2, 22 \cdot a, 11)$ als Linearkombination der Vektoren $(1, -2, 3)$ und $(2, -1, 7)$ darstellen, und wie lauten die möglichen Linearkombinationen?

**Lösung von Aufgabe 28.3**
**Idee:** Wenn sich der Vektor $(a^2, 22 \cdot a, 11)$ als Linearkombination der beiden Vektoren $(1, -2, 3)$ und $(2, -1, 7)$ beschreiben läßt, dann gibt es reelle Zahlen $a$, $x$ und $y$ mit

$$\begin{pmatrix} a^2 \\ 22 \cdot a \\ 11 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Also muss ein LGS gelöst werden.

Ergebnis:

| | $x$ | $y$ | r.S. | $\sum$ | Regie | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $\boxed{1}$ | 2 | $a^2$ | $3 + a^2$ | 2 | -3 |
| (2) | -2 | -1 | $22 \cdot a$ | $-3 + 22 \cdot a$ | 1 | |
| (3) | 3 | 7 | 11 | 21 | | 1 |
| (4) | | 3 | $2 \cdot a^2 + 22 \cdot a$ | $3 + 22 \cdot a + 2 \cdot a^2$ | 1 | |
| (5) | | $\boxed{1}$ | $-3 \cdot a^2 + 11$ | $12 - 3 \cdot a^2$ | -3 | |
| (6) | | 0 | $11 \cdot a^2 + 22 \cdot a - 33$ | $11 \cdot a^2 + 22 \cdot a - 33$ | | |

Wegen $11 \cdot a^2 + 22 \cdot a - 33 = 11 \cdot (a - 1) \cdot (a + 3)$ ergibt sich:
Wenn die Gleichung (6) lösbar sein soll, muss $11 \cdot a^2 + 22 \cdot a - 33 = 0$ und damit $a = 1$ oder $a = -3$ sein. Daher verfolgen wir für diese beiden Fälle unser LGS:

| | $a = 1$ | $a = -3$ |
|---|---|---|
| Aus Gleichung (5) | $y = 8$ | $y = -16$ |
| Aus Gleichung (1) | $x = -15$ | $x = 41$ |

Für <u>a=1</u> ergibt sich die (einzige) Linearkombination

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 11 \end{pmatrix} = -15 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Für <u>a=-3</u> ergibt sich die (einzige) Linearkombination

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -66 \\ 11 \end{pmatrix} = 41 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 16 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 28.4**:
Bestimmen Sie die Schnittmenge der folgenden drei Ebenen in Abhängigkeit von dem Parameter $\beta \in \mathrm{I\!R}$:
$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathrm{I\!R}^3 \,,\; x+y+z=1\right\}$
$E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathrm{I\!R}^3 \,,\; 2\cdot x+3\cdot y+\beta\cdot z=3\right\}$
$E_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathrm{I\!R}^3 \,,\; 3\cdot x+(4-\beta)\cdot y+z=1\right\}$

**Lösung von Aufgabe 28.4 (Schnittmenge dreier Ebenen)**
**Idee:** Wir lösen ein lineares Gleichungssystem.

| | $x$ | $y$ | $z$ | r.S. | $\sum$ | Regie | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $\boxed{1}$ | 1 | 1 | 1 | 4 | -2 | -3 |
| (2) | 2 | 3 | $\beta$ | 3 | $8+\beta$ | 1 | |
| (3) | 3 | $4-\beta$ | 1 | 1 | $9-\beta$ | | 1 |
| (4) | | $\boxed{1}$ | $\beta-2$ | 1 | $\beta$ | $\beta-1$ | |
| (5) | | $1-\beta$ | -2 | -2 | $-3-\beta$ | 1 | |
| (6) | | | $-2+(\beta-1)\cdot(\beta-2)$ | $\beta-3$ | | | |

In Gleichung (6) steht dann: $(-2+(\beta-1)\cdot(\beta-2))\cdot z=\beta-3$
oder $(-2+\beta^2-3\cdot\beta+2))\cdot z=\beta-3$ oder $\beta\cdot(\beta-3)\cdot z=\beta-3$

Auswertung der letzten Zeile:
für $\beta=0$: Dann lautet die letzte Zeile
$0\cdot z=-3$, d.h. es gibt keine gemeinsamen Punkte der drei Ebenen

für $\beta=3$: Dann lautet die letzte Zeile
$0\cdot z=0$, d.h. wir können $z$ als Parameter wählen:
Nach Gleichung (4) ist dann $y=1-z$ und nach Gleichung (1) ist $x=1-y-z=0$
also lautet die Gesamtlösung:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1-z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

d.h. die drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

für $\beta\notin\{0,3\}$: Dann lautet die letzte Zeile nach Division mit $\beta-3$
$\beta\cdot z=1$, d.h. wir können $z$ berechnen: $z=\dfrac{1}{\beta}$.
Nach Gleichung (4) ist dann $y=1-(\beta-2)\cdot z=1-\dfrac{\beta-2}{\beta}=\dfrac{2}{\beta}$
und nach Gleichung (1) ist $x=1-y-z=1-\dfrac{2}{\beta}-\dfrac{1}{\beta}=1-\dfrac{3}{\beta}$
also lautet die Gesamtlösung:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\beta}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$$

d.h. die drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt.

**Aufgabe 28.5**:
Das Bundesministerium für Verkehr, Bau- und Wohnungswesen (BMVBW) möchte eine Priorisierungskennnziffer (PKZ) einführen.
Diese Zahl soll Strecken-Abschnitte im Schienennetz der Bahn bezüglich ihrer Störwirkung infolge der Lärmbelastung durch während der Nacht vorbeifahrende Güterzüge beschreiben: Je grösser die Störwirkung ist, desto grösser soll die PKZ sein.

Nun wird ein Anwohner nach Meinung des BMVBW an einer Bahnstrecke erst dann gestört, wenn der (über 8 Nachtstunden gemittelte) Schallpegel draussen vor dem Fenster des Schlafzimmers einen Grenzwert $L_0 = 60\,dB(A)$ überschreitet.

Daher werden nur Anwohner berücksichtigt, vor deren Schlafzimmer-Fenster dieser Grenzwert um mehr als $5\,dB(A)$ überschritten wird.

Also werden die Bahnkilometer gezählt, an denen Häuser stehen, bei denen der Nacht-Mittelungspegel $L_F$ an einem Schlafzimmerfenster höher ist als $65\,dB(A)$.

| | |
|---|---|
| $65\,dB(A) < L_F \leq 70\,dB(A)$ | 1 000 Bahn-Kilometer in 900 Sanierungs-Bereichen |
| $70\,dB(A) < L_F \leq 75\,dB(A)$ | 1 500 Bahn-Kilometer in 1500 Sanierungs-Bereichen |
| $75\,dB(A) < L_F$ | 500 Bahn-Kilometer in 600 Sanierungs-Bereichen |

Um zu entscheiden, an welcher Stelle in Deutschland mit der Lärmsanierung begonnen werden soll, werden mehrere Sanierungs-Bereiche $B_i$ zu Sanierungs-Abschnitten $A$ von jeweils 10 bis $15\,km$ zusammengefasst (da es vermutlich nicht lohnt, für kürzere Strecken-Abschnitte ein Sanierungsverfahren einzuleiten).
Für jeden Sanierungsabschnitt $A$ mit $n$ Sanierungsbereichen $B_1$, ..., $B_n$ werden nun folgende Zahlen ermittelt:

| | |
|---|---|
| $L_i$ | Nacht-Mittelungspegel $L_i$ im Sanierungs-Bereich $B_i$ in $dB(A)$ |
| $N_i$ | Anzahl der Anwohner im Sanierungs-Bereich $B_i$, |
| $l(B_i)$ | Länge des Sanierungs-Bereiches $B_i$ in $m$, |

Dami wird nach der folgenden Formel die PKZ des Sanierungs-Abschnitts $A$ berechnet:

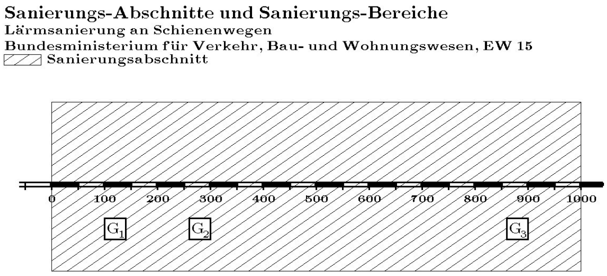
$$\text{PKZ(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[N_i \cdot (L_i - L_0)^2\right]}{360 \cdot \sum_{i=1}^{n} l(B_i)} \qquad (*)$$

**Aufgabe:** Untersuchen Sie, ob durch diese Formel für den hier angegeben Sanierungs-Abschnitt $A$ (zur Vereinfachung von einer Länge von nur $1\,km$) eine eindeutige Zuordnung zu einer $PKZ(A)$ gegeben ist. Betrachten Sie dazu folgende 3 Gebäude auf einem Sanierungs-Abschnitt von $1\,000\,m$ Länge:
Gebäude $G_1$ habe die Länge $l_1 = 40\,m$ und wird bewohnt von $N_1 = 110$ Anwohnern
Gebäude $G_2$ habe die Länge $l_2 = 40\,m$ und wird bewohnt von $N_2 = 110$ Anwohnern
Gebäude $G_3$ habe die Länge $l_3 = 40\,m$ und wird bewohnt von $N_3 = 110$ Anwohnern
Die Abstände zwischen den Gebäuden seien wie folgt gegeben:

| | |
|---|---|
| Zwischen Gebäude $G_1$ und dem westlichen Rand des Sanierungs-Abschnitts | $100\,m$ |
| Zwischen Gebäude $G_1$ und Gebäude $G_2$ | $120\,m$ |
| Zwischen Gebäude $G_2$ und Gebäude $G_3$ | $560\,m$ |
| Zwischen Gebäude $G_3$ und dem östlichen Rand des Sanierungs-Abschnitts | $100\,m$ |

Alle Schlafzimmerfenster seien von den Schienen gleich weit entfernt, d.h. für alle gilt jeweils der Nachtmittelungspegel $L_i = 75$, und es gilt generell $L_0 = 60$.

**Lösung von Aufgabe 28.5 (Priorisierungskennziffer)**




*Aufgabe 28.5:* Sanierungs-Abschnitt $A$ mit 3 Gebäuden $G_1$, $G_2$ und $G_3$

## a) Zuordnung der Sanierungs-Bereiche

<u>a1. $n = 1$</u>, d.h. der gesamt Sanierungs-Abschnitt ist der (einzige) Sanierungs-Bereich.
Dann ist

$$\text{PKZ(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[N_i \cdot (L_i - L_0)^2\right]}{360 \cdot \sum_{i=1}^{n} l(B_i)} = \frac{3 \cdot 110 \cdot (75-60)^2}{360 \cdot 1000} = \frac{330 \cdot 15^2}{360\,000} \approx 0.2$$

<u>a2. $n = 2$</u>: Es werden $G_1$ und $G_2$ zu einem Sanierungs-Bereich $B_1$ zusammengeschlossen und das Gebäude $G_3$ zu einem zweiten $B_2$.
Dann ist

$$\text{PKZ(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[N_i \cdot (L_i - L_0)^2\right]}{360 \cdot \sum_{i=1}^{n} l(B_i)} = \frac{3 \cdot 110 \cdot (75-60)^2}{360 \cdot (200+40)} = \frac{330 \cdot 15^2}{360 \cdot 240} \approx 0.9$$

<u>a3. $n = 3$</u>: Es werden $G_1$ zu Sanierungs-Bereich $B_1$, $G_2$ zu Sanierungs-Bereich $B_2$ und das Gebäude $G_3$ zu einem dritten Sanierungs-Bereich $B_3$ erklärt.
Dann ist

$$\text{PKZ(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[N_i \cdot (L_i - L_0)^2\right]}{360 \cdot \sum_{i=1}^{n} l(B_i)} = \frac{3 \cdot 110 \cdot (75-60)^2}{360 \cdot (40+40+40)} = \frac{330 \cdot 15^2}{360 \cdot 120} \approx 1.7$$

Für einen festen Sanierungs-Abschnitt $A$ ist die Zahl $PKZ(A)$ von der Wahl der Sanierungs-Bereiche abhängig!
Die Zahl $PKZ(A)$ sollte so definiert werden, dass sie eindeutig bestimmbar ist.
Hier wird daher nach einem „gewichten Mittel“ gesucht, und dafür bietet sich als Lösung an:

$$\text{PKZ(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l(B_i) \cdot [N_i \cdot P_i]}{\sum_{i=1}^{n} l(B_i)}$$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} l(B_i) = l(A) \quad \text{und} \quad P_i := \begin{cases} (L_i - L_0)^2 & \text{falls} \quad L_i \geq 65 \\ 0 & \text{falls} \quad L_i < 65 \end{cases}$$

d.h. der gesamte Sanierungs-Abschnitt $A$ wird in $n$ (zusammenhängende) Sanierungs-Bereiche eingeteilt. (Die Zahl $N_i$ kann auch 0 sein.)
Es kann noch diskutiert werden, ob im Nenner nur solche Längen $l(B_i)$ zu berücksichtigen sind, zu deren $i$ das Produkt $N_i \cdot P_i \neq 0$ ist.

**b) Zuordnung der Anzahl der betroffenen Anwohner zu der Höhe der Überschreitung**

Die $PKZ(A)$ ist bei zwei gleich langen Sanierungs-Bereichen

1. für $N_1 = 100$ Anwohner bei $L_1 = 65\,dB(A)$ bestimmt durch PKZ(A) $= \dfrac{N_1 \cdot (L_1 - L_0)^2}{360 \cdot l(B_1)} = \dfrac{100 \cdot 5^2}{360 \cdot l(B_1)}$

2. für $N_2 = x$ Anwohner bei $L_2 = 75\,dB(A)$ bestimmt durch PKZ(A) $= \dfrac{N_2 \cdot (L_2 - L_0)^2}{360 \cdot l(B_1)} = \dfrac{x \cdot 15^2}{360 \cdot l(B_1)}$

also kann $x$ bestimmt werden:
$x = \dfrac{100 \cdot 5^2}{15^2} \approx 11.$

Die Dringlichkeit für eine Lärmsanierung ist daher gleich hoch,

- wenn 100 Menschen nachts eine Überschreitung von $5\,dB(A)$ haben,

als

- wenn 11 Menschen nachts eine Überschreitung von $15\,dB(A)$ haben.

Ist dieser Effekt beabsichtigt?

Es gibt noch weitere Probleme: Wie ist zu verfahren, wenn die Pegel im Sanierungs-Bereich nicht überall gleich sind (z.B. weil nicht alle Schlafzimmerfenster den gleichen Abstand vom Gleis haben)? Es müsste für jeden einzelnen Anlieger jeweils der Pegel am Fenster ermittelt werden.

Die Gleichung (*) läßt sich besser mathematisch/physikalische Beschreibungen für das hier vorliegende Problem Formel Problem als die Gleichung (*).

**Aufgabe 28.6**:
In der Aufgabe 25.5 wurde angenommen, dass die $PKZ(A)$ von der Differenz $(L_i - L_0)$ quadratisch abhängt.
Im Originaltext der vorgesehenen Verordnung findet sich jedoch ein anderer Zusammenhang: Dort wird die Zahl $P_i$ definiert durch

$$P_i = (L_i - L_0) \cdot K_{L,i}$$

mit

| $(L_i - L_0)$ | $K_{L,i}$ | $(L_i - L_0)$ | $K_{L,i}$ |
|---|---|---|---|
| $5 \leq (L_i - L_0) < 6$ | 1.16 | $13 \leq (L_i - L_0) < 14$ | 1.57 |
| $6 \leq (L_i - L_0) < 7$ | 1.20 | $14 \leq (L_i - L_0) < 15$ | 1.63 |
| $7 \leq (L_i - L_0) < 8$ | 1.24 | $15 \leq (L_i - L_0) < 16$ | 1.70 |
| $8 \leq (L_i - L_0) < 9$ | 1.29 | $16 \leq (L_i - L_0) < 17$ | 1.77 |
| $9 \leq (L_i - L_0) < 10$ | 1.34 | $17 \leq (L_i - L_0) < 18$ | 1.85 |
| $10 \leq (L_i - L_0) < 11$ | 1.40 | $18 \leq (L_i - L_0) < 19$ | 1.92 |
| $11 \leq (L_i - L_0) < 12$ | 1.45 | $19 \leq (L_i - L_0) < 20$ | 2.01 |
| $12 \leq (L_i - L_0) < 13$ | 1.51 | | |

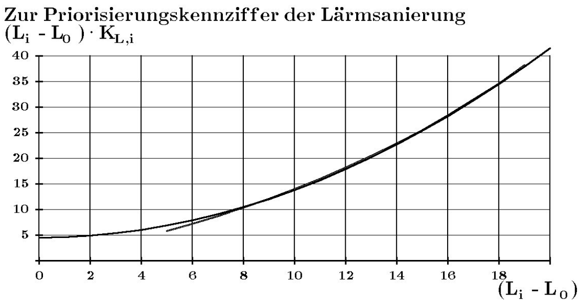
Beschreiben Sie diese Kurve durch eine Gleichung.

**Lösung zu Aufgabe 28.6**:

Aus dem Ansatz

$$y = a + b \cdot x^2$$

ergeben sich die Koeffizienten
$a = 4.5$ und $b = 0.0925$




*Aufgabe 28.6:* Approximation der punktweise gegebenen Kurve durch eine Parabel