Stand: 18. August 2008
http://www.iazd.uni-hannover.de/∼windelberg/teach/ing

33 Lineare Geometrie, 3-dimensional

Aufgabe 33.1:
Beschreiben Sie die folgenden Bewegungen jeweils durch eine geeignete Matrix:

a1) die Drehung $D_z := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(0,0,1),\alpha)}$ des $\mathbb{R}^3$ um die $z-$Achse mit mathematisch positivem Drehsinn um den Drehwinkel α,

a2) die Drehung $D_y := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(0,1,0),\alpha)}$ des $\mathbb{R}^3$ um die $y-$Achse mit mathematisch positivem Drehsinn um den Drehwinkel α,

a3) die Drehung $D_x := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(1,0,0),\alpha)}$ des $\mathbb{R}^3$ um die $x-$Achse mit mathematisch positivem Drehsinn um den Drehwinkel α,

b1) die Spiegelung $S_{\vec{a},0}$ des Punktes $P = (1,2,3)$ an der Ebene $E = \left\{(\vec{x} \in \mathbb{R}^3\,,\ \vec{x} \circ \vec{a} = 0\right\}$ mit $\vec{a} = (4,5,6)$ sowie an der Ebene $E_7 = \left\{(\vec{x} \in \mathbb{R}^3\,,\ \vec{x} \circ \vec{a} = 7\right\}$.

b2) die Spiegelung $S_{\vec{a},0}$ des $\mathbb{R}^3$ an der Ebene $E = \left\{(\vec{x} \in \mathbb{R}^3\,,\ \vec{x} \circ \vec{a} = 0\right\}$ mit $\vec{a} = (4,5,6)$.

b3) die Spiegelung $S_{\vec{a},0}$ des $\mathbb{R}^3$ an einer Ebene $E = \left\{(\vec{x} \in \mathbb{R}^3\,,\ \vec{x} \circ \vec{a} = 0\right\}$ (mit $|\vec{a}| = 1$).

Lösung von Aufgabe 33.1a1):
Die Drehung $D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(0,0,1),\alpha)}$ des $\mathbb{R}^3$ um die $z-$Achse mit mathematisch positivem Drehsinn um den Drehwinkel α bildet die Einheitsvektoren $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ wie folgt ab:

$$D_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daher ist $D_z = D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(0,0,1),\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung von Aufgabe 33.1a2):
Die Drehung $D_y = D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(0,1,0),\alpha)}$ des $\mathbb{R}^3$ um die $y-$Achse mit mathematisch positivem Drehsinn um den Drehwinkel α bildet die Einheitsvektoren $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ wie folgt ab:

$$D_y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix} \qquad D_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D_y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Daher ist $D_y = D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(0,1,0),\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

Lösung von Aufgabe 33.1a3):

Die Drehung $D_x = D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(1,0,0),\alpha)}$ des $\mathbb{R}^3$ um die $x-$Achse mit mathematisch positivem Drehsinn um den Drehwinkel α bildet die Einheitsvektoren $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ wie folgt ab:

$$D_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D_x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \qquad D_x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Daher ist $D_x = D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(1,0,0),\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$. **Lösung von Aufgabe 33.1b1)**:

Idee: Es wird von P das Lot auf die Ebene E (bzw. auf E_7) gefällt. Dieses Lot trifft auf die Ebene in dem Lotfußpunkt P_L. Wenn dann der Abstand zwischen P und P_L verdoppelt wird, erreichen wir den Spiegelpunkt $S_{\vec{a},0}(P)$ (bzw. $S_{\vec{a},*}(P)$).

Die Normalenrichtung $\vec{n}$ der Ebene E (bzw. E_7) ist aus der Gleichung ersichtlich: $\vec{n} = \vec{a} = (4,5,6)$. Dann hat die „Lotgerade“ L durch P die Gleichung

$$L = \{\, (x,y,z)\,;\ (1,2,3) + \lambda\cdot(4,5,6)\,\}$$

und diese Lotgerade trifft die Ebene E für $\lambda = \lambda_0$ mit

$$(1,2,3) + \lambda_0\cdot(4,5,6) \in E \quad \text{oder} \quad ((1,2,3) + \lambda_0\cdot(4,5,6)) \circ (4,5,6) = 0$$

und die Ebene E_7 für $\lambda = \lambda_7$ mit

$$(1,2,3) + \lambda_7\cdot(4,5,6) \in E_7 \quad \text{oder} \quad ((1,2,3) + \lambda_7\cdot(4,5,6)) \circ (4,5,6) = 7$$

Daraus ergibt sich für die Ebene E:

$$((1+\lambda_0\cdot 4), (2+\lambda_0\cdot 5), (3+\lambda_0\cdot 6)) \circ (4,5,6) = 0$$

oder

$$4\cdot(1+\lambda_0\cdot 4) + 5\cdot(2+\lambda_0\cdot 5) + 6\cdot(3+\lambda_0\cdot 6) = 0$$

und damit

$$32 + \lambda_0\cdot 77 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_0 = -\frac{32}{77}$$

Damit ist der Lotfußpunkt P_L bestimmt:
$P_L = (1,2,3) + \lambda_0\cdot(4,5,6) = (1,2,3) - \dfrac{32}{77}\cdot(4,5,6) = \dfrac{1}{77}\cdot(-51,-6,39)$
und damit auch der Spiegelpunkt

$$S_{\vec{a},0}(P) = (1,2,3) + 2\cdot\lambda_0\cdot(4,5,6) = (1,2,3) - \frac{64}{77}\cdot(4,5,6) = \frac{1}{77}\cdot\begin{pmatrix} -179 \\ -166 \\ -153 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich für die Ebene E_7:

$$((1+\lambda_7\cdot 4), (2+\lambda_7\cdot 5), (3+\lambda_7\cdot 6)) \circ (4,5,6) = 7$$

oder

$$4\cdot(1+\lambda_7\cdot 4) + 5\cdot(2+\lambda_7\cdot 5) + 6\cdot(3+\lambda_7\cdot 6) = 7$$

und damit

$$32 + \lambda_7\cdot 77 = 7 \quad \text{oder} \quad \lambda_7 = -\frac{25}{77}$$

Damit ist der Lotfußpunkt P_L bezüglich der Ebene E_7 bestimmt:
$P_L = (1,2,3) + \lambda_7\cdot(4,5,6) = (1,2,3) - \dfrac{25}{77}\cdot(4,5,6) = \dfrac{1}{77}\cdot(-23,19,81)$

und damit auch der Spiegelpunkt

$$S_{\vec{a},*}(P) = (1,2,3) + 2\cdot\lambda_7\cdot(4,5,6) = (1,2,3) - \frac{50}{77}\cdot(4,5,6) = \frac{1}{77}\cdot\begin{pmatrix}-123\\-96\\-69\end{pmatrix}$$

Lösung von Aufgabe 33.1b2):
Es sind die Bilder der drei Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ und $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ zu bestimmen - wie in Aufgabe 33.1b1):

<u>Bestimmung des Bildes des ersten Einheitsvektors $\vec{e}_1$:</u>
Die Lotgerade L durch $\vec{e}_1$ hat die Gleichung

$$L = \{\,(x,y,z)\,;\ (1,0,0) + \lambda\cdot(4,5,6)\,\}$$

und diese Lotgerade trifft die Ebene E für $\lambda = \lambda_1$ mit

$$(1,0,0) + \lambda_1\cdot(4,5,6) \in E \quad \text{oder} \quad ((1,0,0) + \lambda_1\cdot(4,5,6))\circ(4,5,6) = 0$$

Daraus ergibt sich

$$4\cdot(1+\lambda_1\cdot 4) + 5\cdot\lambda_1\cdot 5 + 6\cdot\lambda_1\cdot 6 = 0$$

und damit

$$4 + \lambda_1\cdot 77 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_1 = -\frac{4}{77}$$

Damit ist der Lotfußpunkt P_L bestimmt:
$P_L = (1,0,0) + \lambda_1\cdot(4,5,6) = (1,0,0) - \frac{4}{77}\cdot(4,5,6) = \frac{1}{77}\cdot(61,-20,-24)$
und damit auch der Spiegelpunkt

$$S_{\vec{a},0}(\vec{e}_1) = (1,0,0) + 2\cdot\lambda_1\cdot(4,5,6) = (1,0,0) - \frac{8}{77}\cdot(4,5,6) = \frac{1}{77}\cdot\begin{pmatrix}45\\-40\\-48\end{pmatrix}$$

<u>Bestimmung des Bildes des zweiten Einheitsvektors $\vec{e}_2$:</u>
Die Lotgerade L durch $\vec{e}_2$ hat die Gleichung

$$L = \{\,(x,y,z)\,;\ (0,1,0) + \lambda\cdot(4,5,6)\,\}$$

und diese Lotgerade trifft die Ebene E für $\lambda = \lambda_2$ mit

$$(0,1,0) + \lambda_2\cdot(4,5,6) \in E \quad \text{oder} \quad ((0,1,0) + \lambda_2\cdot(4,5,6))\circ(4,5,6) = 0$$

Daraus ergibt sich

$$4\cdot\lambda_2\cdot 4 + 5\cdot(1+\lambda_2\cdot 5) + 6\cdot\lambda_2\cdot 6 = 0$$

und damit

$$5 + \lambda_2\cdot 77 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_2 = -\frac{5}{77}$$

Damit ist der Lotfußpunkt P_L bestimmt:
$P_L = (0,1,0) + \lambda_2\cdot(4,5,6) = (0,1,0) - \frac{5}{77}\cdot(4,5,6) = \frac{1}{77}\cdot(-20,52,-30)$
und damit auch der Spiegelpunkt

$$S_{\vec{a},0}(\vec{e}_2) = (0,1,0) + 2\cdot\lambda_2\cdot(4,5,6) = (0,1,0) - \frac{10}{77}\cdot(4,5,6) = \frac{1}{77}\cdot\begin{pmatrix}-40\\27\\-60\end{pmatrix}$$

Bestimmung des Bildes des dritten Einheitsvektors $\vec{e}_3$:
Die Lotgerade L durch $\vec{e}_3$ hat die Gleichung

$$L = \{ (x,y,z)\,;\,(0,0,1) + \lambda \cdot (4,5,6) \}$$

und diese Lotgerade trifft die Ebene E für $\lambda = \lambda_3$ mit

$$(0,0,1) + \lambda_3 \cdot (4,5,6) \in E \quad \text{oder} \quad ((0,0,1) + \lambda_3 \cdot (4,5,6)) \circ (4,5,6) = 0$$

Daraus ergibt sich

$$4 \cdot \lambda_3 \cdot 4 + 5 \cdot \lambda_3 \cdot 5 + 6 \cdot (1 + \lambda_3 \cdot 6) = 0$$

und damit

$$6 + \lambda_3 \cdot 77 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_3 = -\frac{6}{77}$$

Damit ist der Lotfußpunkt P_L bestimmt:
$P_L = (0,0,1) + \lambda_3 \cdot (4,5,6) = (0,0,1) - \dfrac{6}{77} \cdot (4,5,6) = \dfrac{1}{77} \cdot (-24,-30,41)$
und damit auch der Spiegelpunkt
$S_{\vec{a},0}(\vec{e}_3) = (0,0,1) + 2 \cdot \lambda_3 \cdot (4,5,6) = (0,0,1) - \dfrac{12}{77} \cdot (4,5,6) = \dfrac{1}{77} \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ 5 \end{pmatrix}$

Test:
Die zugehörige Matrix lautet also

$$M = \frac{1}{77} \cdot \begin{pmatrix} 45 & -40 & -48 \\ -40 & 27 & -60 \\ -48 & -60 & 5 \end{pmatrix}$$

und diese hat folgende Eigenschaften:

a) Für $\vec{x} = (1,2,3)$ gilt $M \cdot \vec{x} = S_{\vec{a},0}(P) = \frac{1}{77} \cdot \begin{pmatrix} -179 \\ -166 \\ -153 \end{pmatrix}$ aus Aufgabe 33.1b2).

b) M hat zwei Eigenwerte: $\lambda_1 = -1$ für die Normale der Ebene E und $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (als doppeltem Eigenwert) für die Ebene E

Zu a)

Es ist $DM \cdot \vec{x} = \frac{1}{77} \cdot \begin{pmatrix} 45 & -40 & -48 \\ -40 & 27 & -60 \\ -48 & -60 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{77} \cdot \begin{pmatrix} -179 \\ -166 \\ -153 \end{pmatrix}$

Zu b)

Eigenwert	Eigenvektor
-1	$(4,5,6)$
1	$(-3,0,2)$
1	$(-5,4,0)$

denn es ist

$$|M-\lambda\cdot E| = \frac{1}{77^3}\cdot\begin{vmatrix} 45-77\cdot\lambda & -40 & -48 \\ -40 & 27-77\cdot\lambda & -60 \\ -48 & -60 & 5-77\cdot\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$$

Also ist $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert (geraten!).
Dann ergeben sich die anderen Eigenwerte (wenn es welche gibt) durch Summendivision:

$$\begin{array}{rrrrl} (-\lambda^3 & +\lambda^2 & +\lambda & -1) & :(\lambda-1) = -\lambda^2+1 \\ -\lambda^3 & +\lambda^2 & & & \\ \hline & 0 & +\lambda & -1 & \\ & & +\lambda & -1 & \\ \hline & & 0 & & \end{array}$$

also muss für die weiteren Eigenwerte λ_2 und λ_3 gelten $\lambda_{2,3}^2 = 1$, d.h. $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$.

Die zugehörigen Eigenvektoren werden wie folgt bestimmt:

Eigenvektor $\vec{x}_3$ zum Eigenwert $\lambda_3 = -1$:

	x_3	y_3	z_3	r.S.	$\sum$	Regie			
1	$\frac{45}{77}-\lambda_3$	$-\frac{40}{77}$	$-\frac{48}{77}$	0		77			
2	$-\frac{40}{77}$	$\frac{27}{77}-\lambda_3$	$-\frac{60}{77}$	0			77		
3	$-\frac{48}{77}$	$-\frac{60}{77}$	$\frac{5}{77}-\lambda_3$	0				77	
4	122	-40	$\boxed{-48}$	0	34	-5	41		$48\cdot z_3 = 122\cdot x_3 - 40\cdot y_3$
5	-40	104	-60	0	4	4			
6	-48	-60	82	0	-26			24	
7	-770	$\boxed{616}$	0	0	-154	3080			$616\cdot y_3 = 770\cdot x_3$
8	3850	-3080	0	0	770	616			
0	0		0	770	616				

Dann ist nach Zeile 7: $y_3 = \dfrac{770}{616}\cdot x_3 = \dfrac{5}{4}\cdot x_3$

und damit nach Zeile 4: $z_3 = \dfrac{122}{48}\cdot x_3 - \dfrac{40}{48}\cdot y_3 = \left(\dfrac{61}{24} - \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{5}{4}\right)\cdot x_3 = \dfrac{61-25}{24}\cdot x_3 = \dfrac{3}{2}\cdot x_3$

Es wird zunächst x_3 als Parameter gewählt: Dann ist $\vec{x}_3 = x_3\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Für $x_3 = 4$ wird daraus der Eigenvektor $\vec{x}_3 = (4,5,6)$. Das ist auch die Normalenrichtung der Ebene E.

Die beiden anderen Eigenvektoren (also $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$) stehen senkrecht auf dem Eigenvektor $\vec{x}_3$. Also können wir raten (mit Hilfe des Schmidt'schen Orthonormierungsverfahrens) oder weiterrechnen:

Eigenvektor $\vec{x}_1$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$:

	x_1	y_1	z_1	r.S.	$\sum$	Regie			
1	$\frac{45}{77} - \lambda_1$	$-\frac{40}{77}$	$-\frac{48}{77}$	0		77			
2	$-\frac{40}{77}$	$\frac{27}{77} - \lambda_1$	$-\frac{60}{77}$	0			77		
3	$-\frac{48}{77}$	$-\frac{60}{77}$	$\frac{5}{77} - \lambda_1$	0				77	
4	-32	-40	-48	0		$:(-8)$			
5	-40	-50	-60	0			$:(-10)$		
6	-48	-60	-72	0				$:(-12)$	
7	$\boxed{4}$	5	6	0	15				$4 \cdot x_1 = -5 \cdot y_1 - 6 \cdot z_1$
8	4	5	6	0	15				
9	4	5	6	0	15				

Dann ist nach Zeile 7: $x_1 = -\dfrac{5}{4} \cdot y_1 - \dfrac{3}{2} \cdot z_1$

Es werden zunächst y_1 und z_1 als Parameter gewählt: Für $y_1 = 0$ und $z_1 = 2$ wird daraus der Eigenvektor $\vec{x}_1 = (-3, 0, 2)$.

Für $z_1 = 0$ und $y_1 = 4$ wird daraus der Eigenvektor $\vec{x}_2 = (-5, 4, 0)$.

Diese beiden Vektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ stehen auch senkrecht auf $\vec{x}_3$:
Es ist nämlich $\vec{x}_1 \circ \vec{x}_3 = (-3, 0, 2) \circ (4, 5, 6) = -3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 0$
und $\vec{x}_2 \circ \vec{x}_3 = (-5, 4, 0) \circ (4, 5, 6) = -5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 0 \cdot 6 = 0$

($\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ stehen nicht senkrecht aufeinander:
Es ist $\vec{x}_1 \circ \vec{x}_2 = (-3, 0, 2) \circ (-5, 4, 0) = -3 \cdot (-5) + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 15$.)

Lösung von Aufgabe 33.1b3):

Spiegelung an einer Ebene
Aus REP, Seite 153:
Ebenengleichung für Ebene mit Normalenvektor $\vec{n}$ und d als Abstand vom Nullpunkt:
$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, , \, \vec{n} \circ \vec{x} = d \right\}$
Es sei $\vec{x}_0$ der Fußpunkt des Lotes von $\vec{p}$ auf die Ebene E ist. Dann ist nach REP Seite 152

$$\boxed{\vec{x}_0 = \vec{p} + \frac{d - \vec{n} \circ \vec{p}}{\vec{n}^2} \cdot \vec{n}.}$$

Mit Hilfe des Fußpunktes $\vec{x}_0$ des Lotes von $\vec{p}$ auf die Ebene E läßt sich dann der Spiegelpunkt $S_{\vec{n}}(\vec{p})$ eines Punktes $\vec{p}$ bei Spiegelung an der Ebene E bestimmen:

$$\boxed{S_{\vec{n}}(\vec{p}) = 2 \cdot \vec{x}_0 - \vec{p}.}$$

Insgesamt also

$$\boxed{S_{\vec{n}}(\vec{p}) = \vec{p} + 2 \cdot \frac{d - \vec{n} \circ \vec{p}}{\vec{n}^2} \cdot \vec{n}.}$$

Daher läßt sich die Spiegelung $S_{\vec{a},0}$ des $\mathbb{R}^3$ an einer Ebene $E = \left\{ (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, , \, \vec{x} \circ \vec{a} = 0 \right\}$ (mit $\vec{n} := \vec{a}$ und $d := 0$) wie folgt beschreiben:
Ein Punkt $P = \vec{p}$ wird durch $S_{\vec{a},0}$ abgebildet auf $P' = \vec{p}\,' = 2 \cdot \vec{x}_0 - \vec{p}$, wobei $\vec{x}_0 = \vec{p} + t_0 \cdot \vec{a}$ mit $t_0 = \dfrac{0 - \vec{a} \cdot \vec{p}}{\vec{a}^2}$ und daher - wegen $|\vec{a}| = 1$ - auch $t_0 = -\vec{a} \cdot \vec{p}$, also insgesamt

$$P' = 2 \cdot (\vec{p} - (\vec{a} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{a}) - \vec{p} = \vec{p} - 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{a}$$

Es sei $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Dann bildet $S_{\vec{a},0}$ die Einheitsvektoren $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ wie folgt ab:

$$S_{\vec{a},0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot a_1 \cdot \vec{a} \qquad S_{\vec{a},0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot a_2 \cdot \vec{a}$$

$$S_{\vec{a},0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot a_3 \cdot \vec{a}$$

Daher ist $S_{\vec{a},0} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot a_1^2 & -2 \cdot a_2 \cdot a_1 & -2 \cdot a_3 \cdot a_1 \\ -2 \cdot a_1 \cdot a_2 & 1 - 2 \cdot a_2^2 & -2 \cdot a_3 \cdot a_2 \\ -2 \cdot a_1 \cdot a_3 & -2 \cdot a_2 \cdot a_3 & 1 - 2 \cdot a_3^2 \end{pmatrix}$.

Bemerkung: Nach REP Seite 203 ist $S_{\vec{a},0} = M(\sigma_S) = E - 2 \cdot \vec{n} \cdot \vec{n}^\top$, wobei $\vec{n} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ als Spaltenvektor und $\vec{n}^\top$ als Zeilenvektor zu schreiben ist.

Aufgabe 33.2
Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $S_{\vec{a},0}$ für die Spiegelung des $\mathbb{R}^3$

a) an der x-y-Ebene (also $\vec{a} = (0,0,1)$)

b) an der Ebene $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,,\, 2 \cdot x + y - 2 \cdot z = 0\right\}$

Berechnen Sie jeweils die Quadrate der Abbildungsmatrizen: Interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung von Aufgabe 33.2a):
Es ist $\vec{a} = (0,0,1)$ ein Normalenvektor der x-y-Ebene.
Daher lautet die Matrix dieser Spiegelung (nach Aufgabe 33.1b))

$$S_{\vec{a},0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und es ist

$$S^2_{\vec{a},0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die **Identität**, d.h. jeder Punkt bleibt fest.

Lösung von Aufgabe 33.2b):
Es ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ eine Ebenen-Normale, $|\vec{n}| = 3$ die Länge von $\vec{n}$ und $d = 0$ der Abstand d vom Nullpunkt. Also wählen wir hier $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Dann ist

$$S_{\vec{a},0} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot a_1^2 & -2 \cdot a_2 \cdot a_1 & -2 \cdot a_3 \cdot a_1 \\ -2 \cdot a_1 \cdot a_2 & 1 - 2 \cdot a_2^2 & -2 \cdot a_3 \cdot a_2 \\ -2 \cdot a_1 \cdot a_3 & -2 \cdot a_2 \cdot a_3 & 1 - 2 \cdot a_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot \frac{4}{9} & -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} & 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \\ -2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} & 1 - 2 \cdot \frac{1}{9} & 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} & 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} & 1 - 2 \cdot \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

und es ist

$$S^2_{\vec{a},0} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die **Identität**, d.h. jeder Punkt bleibt fest.

Anderer Weg:
Wenn die Formel aus REP Seite 153

$$\boxed{S_{\vec{n}}(\vec{p}) = \vec{p} - \frac{2}{9} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \vec{p}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

direkt (d.h. ohne Normierung der Normalen) angewandt wird, müssen die Bilder der Einheitsvektoren berechnet werden:

$$S_{\vec{n}}(\vec{e}_1) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{9} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$S_{\vec{n}}(\vec{e}_2) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{9} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$S_{\vec{n}}(\vec{e}_3) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{9} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix $M = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 33.3:
Berechnen Sie die Hintereinanderausführung der beiden Spiegelungen aus Aufgabe 33.2: Zuerst wird an der x-y-Ebene gespiegelt,
und dann an der Ebene $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 2 \cdot x + y - 2 \cdot z = 0\right\}$.
Bestimmen Sie das Produkt $S_{(2,1,-2),0} \circ S_{(0,0,1),0}$ der beiden zugehörigen Matrizen.

Lösung von Aufgabe 33.3:
Es ist nach Aufgabe 33.2

$$D := S_{(2,1,-2),0} \circ S_{(0,0,1),0} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ -8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$
$$=$$

Nun soll untersucht werden, von welcher Art diese Abbildung ist.
Zunächst ist bekannt, wie die Bilder der Einheitsvektoren aussehen:
Es ist

$$D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix} \qquad D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad D\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Jeder dieser drei Bildpunkte hat vom Nullpunkt den Abstand 1, denn es gilt:

$$\left|D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{matrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \end{matrix}\right| = \frac{1}{9} \cdot \sqrt{1 + 16 + 64} = 1.$$

$$\left|D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{matrix} -\frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{matrix}\right| = \frac{1}{9} \cdot \sqrt{16 + 49 + 16} = 1.$$

$$\left|D\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{matrix} -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{matrix}\right| = \frac{1}{9} \cdot \sqrt{64 + 16 + 1} = 1.$$

Gibt es Punkte, die bei dieser Abbildung fest bleiben?

Wenn angenommen wird, dass **alle Punkte fest** bleiben, dann ist A die Einheitsmatrix E_3. - Das ist hier aber nicht der Fall.
Wenn angenommen wird, dass eine Matrix A eine **Drehung** beschreibt, dann bleibt die Drehachse fest.
Wenn angenommen wird, dass eine Matrix A eine **Spiegelung** beschreibt, dann bleibt die Spiegelungsebene fest.

Also wird untersucht, welche Punkte fest bleiben (der Nullvektor $\vec{0}$ bleibt bei allen durch eine Matrix beschriebene Bewegungen fest).

Fr eine Drehung gilt nach REP, Seite 205:

Drehung des Raumes und Drehmatrizen
Ist D die Drehung des Raumes um den Winkel α mit $-\pi < \alpha \leq \pi$ bezüglich der Drehachse $\{(0,0,0) + \nu \cdot \vec{a},\ \nu \in \mathbb{R}\}$ mit $|\vec{a}| = 1$,
und wird diese Drehung durch eine Matrix A beschrieben, dann besteht zwischen der Matrix A, der Drehachse $\vec{a}$ und dem Drehwinkel α folgender Zusammenhang:

- die **Drehachse** $\vec{a}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix A.
- für den zu $\vec{a}$ gehörigen **Drehwinkel** α gilt: $1 + 2 \cdot \cos(\alpha) = \mathrm{spur}\,(A)$,
  also $\boxed{\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{spur}(A) - 1)}$.

Dabei ist die **Spur** $\mathrm{spur}\,(A)$ **einer (quadratischen) Matrix** A nach REP (Seite 172) definiert als Summe der Diagonalelemente, also ist für $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$
definiert: $\mathrm{spur}\,(A) = a_{1,1} + aa_{2,2} + a_{3,3}$.
Ein **Eigenwert** λ von A ist nach REP (Seite 209) eine Nullstelle des **charakteristischen Polynoms** $p_A(\lambda)$ von A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - \lambda \end{vmatrix}$$

Also gilt $p_A(\lambda) = 0$ für einen Eigenwert λ.
Ein **Eigenvektor** $\vec{x}$ zu einem Eigenwert λ von A ist dann ein Vektor, für den gilt

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Also wird hier zunächst nach Eigenwerten der Matrix D gesucht:
Es ist
$$p_D(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{9} - \lambda & -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} - \lambda & -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{7}{9} \cdot \lambda^2 - \frac{7}{9} \cdot \lambda + 1,$$
und $\lambda = 1$ ist eine Nullstelle dieses Polynoms $p_D(\lambda)$.

Wenn dann D eine Drehung beschreibt, dann ist die Drehachse ein Eigenvektor zu $\lambda = 1$.
Also wird ein Eigenvektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ zu dem Eigenwert $\lambda = 1$ bestimmt:
Dazu ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9}-1 & -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9}-1 & -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9}-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{10}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen.
Nach dem Gaußschen Eliminierungsverfahren (und Multiplikation jeweils mit 9) also

	x_1	x_2	x_3	r.S.	$\sum$	Regie		
1	-8	-4	-8	0	-4	1		
2	-4	$\boxed{-2}$	-4	0	-2	-2	2	$x_2 = -2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3$
3	8	4	-10	0	2		1	
4	0		0	0	0			
5	0		-18	0	-2			

Wir wählen x_1 als Parameter und erhalten aus Gleichung (5)
$x_3 = 0$
und aus Gleichung (2)
$x_2 = -2 \cdot x_1$
und damit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2 \cdot x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Also bleibt bei der Hintereinanderausführung D der beiden Ebenenspiegelungen aus Aufgabe 33.2 genau die Gerade

$$g := \{(x, -2 \cdot x, 0)\,,\ x \in \mathrm{I\!R}\}$$

punktweise fest, d.h. D ist eine Drehung um diese Achse.

Der Drehwinkel α wird dann aus
$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{spur}\,(D) - 1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot (1 + 7 - 1) - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{1}{9}$
bestimmt: Es ist

$$\alpha = 96.4°$$

Bemerkung: Die Schnittgerade der beiden Spiegelungsebenen ist die Gerade g, und der Schnittwinkel zwischen den beiden Spiegelungsebenen beträgt $\frac{\alpha}{2} = 48.2°$.

Aufgabe 33.4:
Bestimmen Sie graphisch und rechnerisch (mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 33.1))

a) die Hintereinanderausführung der Drehung $D_1 := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(0,0,1),45°)}$ und (anschliessend) der Spiegelung $S_1 := S_{(1,1,0),0}$.

b) die Hintereinanderausführung der Spiegelung $S_1 := S_{(1,1,0),0}$ und (anschliessend) der Drehung $D_1 := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(0,0,1),45°)}$.

c) die Hintereinanderausführung der Drehungen $D_1 := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(0,0,1),45°)}$ und (anschliessend) $D_2 := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(1,0,0),30°)}$.

d) die Hintereinanderausführung der Spiegelungen $S_1 := S_{((0,0,1),0)}$, dann $S_2 := S_{((1,1,1),0)}$ und (anschliessend) $S_3 := S_{((1,1,0),0)}$.

Vergleichen Sie die Ergebnisse von Aufgabe a) und Aufgabe b).

Lösung von Aufgabe 33.4c):
Es ist

$$D_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

und folglich

$$M := D_2 \cdot D_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{4}\cdot\sqrt{6} & \frac{1}{4}\cdot\sqrt{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2} & \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2} & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Dann gilt $|M| = 1$ und es ist

$$|M - \lambda\cdot E| = -\lambda^3 + +\lambda^2 \cdot \frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{3}\right) - \lambda\cdot\left(2\cdot\sqrt{12}+2\cdot\sqrt{6}+4\cdot\sqrt{2}\right) + 1$$

oder

$$|M - \lambda\cdot E| = -\lambda^3 + 2.186\cdot\lambda^2 - 2.186\cdot\lambda + 1$$

Man erkennt sofort, dass $\lambda_1 = 1$ eine Nullstelle von $|M - \lambda\cdot E|$ ist.
Gibt es noch weitere reelle Nullstellen? Nein.
Also beschreibt die Matrix M eine Drehung.
Die Richtung der Drehachse ist der Eigenvektor $(x_1, y_1, z_1)\cdot t$ von M zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.
Nach Definition muss daher gelten:

	x_1	y_1	z_1	r.S.	Regie	
(1)	$\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$	$-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	0	0	1	
(2)	$\frac{\sqrt{6}}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{6} - 1$	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	0	0	$\sqrt{3} - 2$
(3)	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$		1	
(4)	$\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$	$-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	0	0	$\sqrt{2}$	
(5)	$\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{3} + 2$	0	0		1
(6)	$1 - \sqrt{2}$	-1		0	$\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{3} + 2$	
(7)	$\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{3} + 2$	0	0	1	
(8)	$2 + \frac{7\cdot\sqrt{2}}{2} - 4\cdot\sqrt{3} - 2\cdot\sqrt{6}$	0		0		

also nach (8) $\quad (2 + \frac{7}{2}\cdot\sqrt{2} - 4\cdot\sqrt{3} - 2\cdot\sqrt{6})\cdot x_1 = 0 \quad$ also x_1 beliebig
und nach (4) $\quad y_1 = (1 - \sqrt{2})\cdot x_1$
und nach (2) $\quad z_1 = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot x_1 + (\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6} - 2)\cdot y_1$

In Fließkomma-Darstellung ergibt sich entsprechend:

	x_1	y_1	z_1	r.S.	$\sum$	Regie	
(1)	-0.2929	-0.7071	0	0	-1	1	
(2)	0.6124	-0.3876	$\boxed{\text{-0.5000}}$	0	-0.2752	0	-0.2680
(3)	0.3536	0.3536	-0.1340	0	0.5732		
(4)	-0.2929	$\boxed{\text{-0.7071}}$	0	0	0.6470	0.6470	
(5)	0.1895	0.4575	0	0			
(6)	0	0	0	0			

also ist x_1 beliebig, und es ergibt sich

und nach (4) $y_1 = -0.4142 \cdot x_1$
und nach (2) $z_1 = 1.2248 \cdot x_1 + -0.7752 \cdot y_1 = 1.5459 \cdot x_1$

Die Drehachse hat also die Richtung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -0.4142 \cdot x_1 \\ 1.5459 \cdot x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.4142 \\ 1.5459 \end{pmatrix} \cdot x_1$$

oder - auf die Länge 1 normiert -:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5299 \\ -0.2195 \\ 0.8192 \end{pmatrix}$$

Der Drehwinkel α ist dann bestimmt durch

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{spur}(M) - 1) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{6} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - 1) = \frac{1}{2} \cdot 1.1855 \approx 0.5928$$

also $\alpha = 53.6°$.

Lösung von Aufgabe 33.4d):
Es ist

$$M := S_3 \cdot S_2 \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

und diese Matrix M hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$.
Zu dem Eigenwert $\lambda_3 = -1$ gehört der Eigenvektor $\vec{x}_3 = (1, 1, 2) \cdot t$, also beschreibt die Matrix M eine Spiegelung an der Ebene $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x + y + 2 \cdot z = 0 \right\}$

Aufgabe 33.5:
Es seien $D_x := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(1,0,0),45°)}$, $D_y := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(0,1,0),30°)}$ und $D_z := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(0,0,1),60°)}$.
Bestimmen Sie die Abbildung, die sich graphisch und rechnerisch ergibt bei

a) Hintereinanderausführung A der Drehungen D_x, D_y und (anschliessend) D_z (in dieser Reihenfolge, also $A = D_z \circ D_y \circ D_x$).

b) Hintereinanderausführung B der Drehungen D_y, D_z und (anschliessend) D_x.

c) Hintereinanderausführung C der Drehungen D_z, D_x und (anschliessend) D_y.

Um welche Art von Abbildungen handelt es sich bei A, B bzw. C?
Welche Punkte bleiben bei der Abbildung A fest - und welche bei B bzw. bei C?

Lösung von Aufgabe 33.5:
Nach Aufgabe 33.1 lauten die Matrizen der drei Abbildungen wie folgt:

$$D_x := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(1,0,0),45°)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45°) & -\sin(45°) \\ 0 & \sin(45°) & \cos(45°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$D_y := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(0,1,0),30°)} = \begin{pmatrix} \cos(30°) & 0 & \sin(30°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(30°) & 0 & \cos(30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$D_z := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(0,0,1),60°)} = \begin{pmatrix} \cos(60°) & -\sin(60°) & 0 \\ \sin(60°) & \cos(60°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung von Aufgabe 33.5a):
Es ist

$$A = D_z \circ D_y \circ D_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3} & \frac{1}{8}\cdot\sqrt{2} - \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} & \frac{1}{8}\cdot\sqrt{2} + \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{8}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} + \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2} & \frac{1}{8}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} - \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} & \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.433 & -0.436 & 0.789 \\ 0.750 & 0.660 & -0.047 \\ -0.500 & 0.612 & 0.612 \end{pmatrix}$$

Nun soll untersucht werden, von welcher Art diese Abbildung ist.
Zunächst ist bekannt, wie die Bilder der Einheitsvektoren aussehen:
Es ist

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.433 \\ 0.750 \\ -0.500 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.436 \\ 0.660 \\ 0.612 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.789 \\ -0.047 \\ 0.612 \end{pmatrix}$$

Jeder dieser drei Bildpunkte hat vom Nullpunkt den Abstand 1, denn es gilt:

$$\left| A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 0.433 \\ 0.750 \\ -0.500 \end{vmatrix} = 1, \left| A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -0.435 \\ 0.660 \\ 0.612 \end{vmatrix} = 1 \text{ und } \left| A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 0.789 \\ -0.047 \\ 0.612 \end{vmatrix} = 1.$$

Gibt es Punkte, die bei dieser Abbildung fest bleiben?

Dazu wird hier zunächst nach Eigenwerten der Matrix A gesucht:
Es ist

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0.433-\lambda & -0.436 & 0.789 \\ 0.750 & 0.660-\lambda & -0.047 \\ 0.500 & 0.612 & 0.612-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1.705\cdot\lambda^2 - 1.705\cdot\lambda + 1,$$

und $\lambda = 1$ ist eine Nullstelle dieses Polynoms $p_A(\lambda)$.

Wenn dann A eine Drehung beschreibt, dann ist die Drehachse ein Eigenvektor zu $\lambda = 1$.
Also wird ein Eigenvektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ zu dem Eigenwert $\lambda = 1$ bestimmt:
Dazu ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0.433-1 & -0.436 & 0.789 \\ 0.750 & 0.660-1 & -0.047 \\ -0.500 & 0.612 & 0.612-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.567 & -0.436 & 0.789 \\ 0.750 & -0.340 & -0.047 \\ -0.500 & 0.612 & -0.388 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen.

Nach dem Gaußschen Eliminierungsverfahren also

	x_1	x_2	x_3	r.S.	$\sum$	Regie		
1	-0.567	-0.436	0.789	0	-0.214	1		
2	0.750	-0.340	-0.047	0	0.363		1	
3	-0.500	0.612	-0.388	0	-0.276			2
4	-0.567	-0.436	0.789	0	-0.214	1		
5	0.750	-0.340	-0.047	0	0.363		1	
6	$\boxed{-1}$	1.224	-0.776	0	-0.552	-0.567	0.750	
7		-1.130	1.229	0	0.099	1		
8		0.578	-0.629	0	-0.051		1.730	
9		-1.130	1.229	0	-0.552			
10		$\boxed{1}$	-1.088	0	-0.088			

Wir wählen x_3 als Parameter und erhalten aus Gleichung (10)
$x_2 = 1.088 \cdot x_3$
und aus Gleichung (6)
$x_1 = 1.224 \cdot x_2 - 0.776 \cdot x_3$
also
$x_1 = 1.224 \cdot (1.088 \cdot x_3) - 0.776 \cdot x_3 = 0.556 \cdot x_3$
und damit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.556\cdot x_3 \\ 1.088\cdot x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0.556 \\ 1.088 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also hat die durch die Matrix A beschriebene Drehung die Drehachse

$$g = \{\lambda \cdot (\,0.556\,,\,1.088\,,\,1)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Es ist $\text{spur}(A) = 0.433 + 0.660 + 0.612 = 1.705$ und daher gilt für den Drehwinkel α die Gleichung
$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\text{spur}\,(A) - 1) = \frac{1}{2} \cdot 1.705 = 0.8525.$
Daher ist

$$\alpha = 31.5^\circ$$

Lösung von Aufgabe 33.5b):

Es ist $B = D_x \circ D_z \circ D_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8}\cdot\sqrt{2} & \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2} & -\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} \\ \frac{1}{8}\cdot\sqrt{2} & \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2} & \frac{3}{8}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.433 & -0.866 & 0.250 \\ 0.884 & 0.354 & -0.306 \\ 0.178 & 0.354 & 0.919 \end{pmatrix}$

mit der Drehachse $g = \{\lambda \cdot (\,1.000\,,\,0.111\,,\,0.919)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Lösung von Aufgabe 33.5c):

Es ist

$$C = D_y \circ D_x \circ D_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} & -\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2} & \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} & \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\cdot\sqrt{2} & \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} & \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.739 & -0.573 & 0.354 \\ 0.612 & 0.354 & -0.707 \\ 0.280 & 0.739 & 0.612 \end{pmatrix}$$

mit der Drehachse $g = \{\lambda \cdot (\,1.000\,,\,0.506\,,\,0.820)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

Nach Lösung der Aufgaben 33.5b) und 33.5c) ergibt sich: Sowohl B als auch C beschreiben eine Drehung, aber die Drehungen sind verschieden.

Interessant ist nun auch die umgekehrte Fragestellung:

Gegeben ist eine Drehung D um eine Achse g und um einen Winkel φ. Wie sind die Winkel α_x, α_y und α_z zu wählen, so dass $D = D_x \cdot D_y \cdot D_z$ gilt mit $D_x := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(1,0,0),\alpha_x)}$, $D_y := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(0,1,0),\alpha_y)}$ und $D_z := D_{((0,0,0)+\lambda\cdot(0,0,1),\alpha_z)}$?

Dreispiegelungssatz 2-dimensional
Die Hintereinanderausführung von 2 Geradenspiegelungen ist
- entweder eine Translation - wenn die beiden Geraden parallel sind
- oder eine Drehung - wenn die beiden Geraden einen „Drehpunkt“ gemein haben.

Was geschieht bei der Hintereinanderausführung von 3 Geradenspiegelungen?

Wenn die 3 Geraden jeweils zueinander parallel sind, dann gibt es eine Geradenspiegelung, die gleich der Hintereinanderausführung der 3 Geradenspiegelungen ist.
Wenn die 3 Geraden einen Punkt S gemeinsam haben, dann gibt es eine Geradenspiegelung $\tilde{g}$ an einer Geraden g, die gleich der Hintereinanderausführung der 3 Geradenspiegelungen ist, und g geht durch S.

Dreispiegelungssatz 3-dimensional
Die Hintereinanderausführung von 2 Ebenenspiegelungen ist
- entweder eine Translation - wenn die beiden Ebenen parallel sind
- oder eine Drehung - wenn die beiden Ebenen eine „Drehachse“ gemein haben.

Was geschieht bei der Hintereinanderausführung von 3 Ebenenspiegelungen?

Wenn die 3 Ebenen jeweils zueinander parallel sind, dann gibt es eine Ebenenspiegelung, die gleich der Hintereinanderausführung der 3 Ebenenspiegelungen ist.
Wenn die 3 Ebenen eine „Achse“ gemeinsam haben, dann gibt es eine Ebenenspiegelung, die gleich der Hintereinanderausführung der 3 Ebenenspiegelungen ist.

Als Anwendung der Hintereinanderausführung von Spiegelungen eignen sich Hauptachsentransformationen (Kapitel 34)