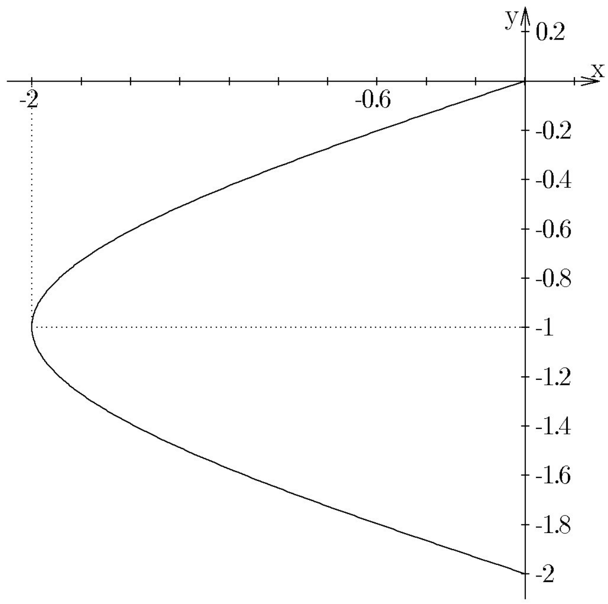
Stand: 19. August 2008
http://www.iazd.uni-hannover.de/~windelberg/teach/ing

35 Interpolation

Aufgabe 35.1:
Es wird eine aus den drei Punkten $E_0 = (0,0)$, $E_1 = (-2,-1)$, $E_2 = (0,-2)$ $(n = 2)$ gegebene Kurve mit den folgenden Eigenschaften gesucht:



Aufgabe 35.1: Natürlicher Spline zwischen den Punkten $(0,0)$, $(-2,-1)$ und $(0,-2)$

Dabei heisst S natürlicher Spline durch die Punkte E_0, E_1 und E_2 wird dabei definiert:
S setzt sich zusammen aus zwei kubischen Polynomen $\vec{x}|_{[0,1]}(t)$ und $\vec{x}|_{[1,2]}(t)$, wobei

$$\vec{x}|_{[i,i+1]}(t) = \begin{pmatrix} x|_{[i,i+1]}(t) \\ y|_{[i,i+1]}(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad i \leq t \leq i+1 \qquad i \in \{0,1\}$$

ist, und es gelten folgende Eigenschaften:

1. Für jedes i mit $i \in \{0,1\}$ ist $\vec{x}|_{[i,i+1]}(t)$ eine kubische ganzrationale Funktion.
2. Die Krümmung ist am Anfang und am Ende gleich 0,
   und in dem Verbindungspunkt E_1 ändert sich die Krümmung nicht.
   - Die Krümmung in E_0 ist gleich 0.
   - Die Krümmung ändert sich in dem Verbindungspunkt E_1 nicht.
   - Die Krümmung in E_2 ist gleich 0.
3. Die Gesamtkurve hat (zwischen E_0 und E_2) keinen Knick.
4. Für jedes $i \in \{0,1\}$ liegt $E_i = (x_i, y_i)$ auf der Kurve $\{\vec{x}|_{[0,1]}(t); 0 \leq t \leq 1\}$
5. Für jedes $i \in \{0,1\}$ liegt $E_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$ auf der Kurve $\{\vec{x}|_{[1,2]}(t); 0 \leq t \leq 1\}$.

Lösung von Aufgabe 35.1:

Alle Punkte sollen auf einem Spline mit „natürlicher“ Randbedingung liegen, d.h. es soll gelten: zu je zwei benachbarten Punkten E_i und E_{i+1} mit $i \in \{0,1\}$ werden kubische Polynome

$$x|_{[i,i+1]}(t) \quad \text{und} \quad y|_{[i,i+1]}(t)$$

gesucht, so daß die stückweise durch

$$\vec{x}|_{[i,i+1]}(t) = \begin{pmatrix} x|_{[i,i+1]}(t) \\ y|_{[i,i+1]}(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad i \leq t \leq i+1$$

beschriebene Kurve folgende Eigenschaften hat:

1. Für jedes $i \in \{0,1\}$ ist $\vec{x}|_{[i,i+1]}(t)$ ein kubischer Spline, d.h. es gibt Vektoren $\vec{a}_{[i,i+1]}$, $\vec{b}_{[i,i+1]}$, $\vec{c}_{[i,i+1]}$ und $\vec{d}_{[i,i+1]}$ mit

$$\vec{x}|_{[i,i+1]}(t) = \vec{a}_{[i,i+1]} + \vec{b}_{[i,i+1]} \cdot (t-i) + \vec{c}_{[i,i+1]} \cdot (t-i)^2 + \vec{d}_{[i,i+1]} \cdot (t-i)^3 \quad \text{für} \quad i \leq t \leq i+1 \tag{1}$$

2. Die Krümmung ist am Anfang und am Ende gleich 0, und in dem Verbindungspunkt E_1 ändert sich die Krümmung nicht.

   - Die Krümmung in E_0 ist gleich 0, d.h.

$$\vec{c}_{[0,1]} = \vec{0} \tag{2}$$

   - Die Krümmung ändert sich in dem Verbindungspunkt E_1 nicht, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\vec{x}|_{[0,1]}(1) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\vec{x}|_{[1,2]}(0) \\ \text{d.h.} \quad \vec{c}_{[0,1]} + 3 \cdot \vec{d}_{[0,1]} &= \vec{c}_{[1,2]} \end{aligned} \tag{3}$$

   - Die Krümmung in E_2 ist gleich 0, d.h.

$$\vec{c}_{[1,2]} + 3 \cdot \vec{d}_{[1,2]} = \vec{0} \tag{4}$$

3. Die Gesamtkurve hat keinen Knick, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{x}|_{[0,1]}(1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{x}|_{[1,2]}(0)$$

   d.h.

$$\vec{b}_{[0,1]} + 2 \cdot \vec{c}_{[0,1]} + 3 \cdot \vec{d}_{[0,1]} = \vec{b}_{[1,2]} \tag{5}$$

4. Für jedes $i \in \{0,1\}$ liegt $E_i = (x_i, y_i)$ auf diesem Spline, d.h.

$$(0,0) = E_0 = \vec{x}|_{[0,1]}(0) = \vec{a}_{[0,1]} \tag{6}$$

$$(-2,-1) = E_1 = \vec{x}|_{[1,2]}(0) = \vec{a}_{[1,2]} \tag{7}$$

5. Für jedes $i \in \{0,1\}$ liegt $E_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$ auf diesem Spline, d.h.

$$\begin{aligned} (-2,-1) = E_1 &= \vec{x}|_{[0,1]}(1) = \vec{a}_{[0,1]} + \vec{b}_{[0,1]} + \vec{c}_{[0,1]} + \vec{d}_{[0,1]} \\ (0,-2) = E_2 &= \vec{x}|_{[1,2]}(1) = \vec{a}_{[1,2]} + \vec{b}_{[1,2]} + \vec{c}_{[1,2]} + \vec{d}_{[1,2]} \end{aligned}$$

   und damit wegen (6) und (7)

$$(-2,-1) = \vec{b}_{[0,1]} + \vec{c}_{[0,1]} + \vec{d}_{[0,1]} \tag{8}$$

$$(0,-2) = (-2,-1) + \vec{b}_{[1,2]} + \vec{c}_{[1,2]} + \vec{d}_{[1,2]} \quad \text{oder} \quad (2,-1) = \vec{b}_{[1,2]} + \vec{c}_{[1,2]} + \vec{d}_{[1,2]} \tag{9}$$

Es gilt also $\vec{a}_{[0,1]} = (0,0)$ nach (6)
und $\vec{a}_{[1,2]} = (-2,-1)$ nach (7)
und $\vec{c}_{[0,1]} = (0,0)$ nach (2)
sowie das folgende lineare Gleichungssystem

Gl	$\vec{b}_{[0,1]}$	$\vec{d}_{[0,1]}$	$\vec{b}_{[1,2]}$	$\vec{c}_{[1,2]}$	$\vec{d}_{[1,2]}$	rechte Seite	Regie			
3	0	3	0	-1	0	$(0,0)$	1			
4	0	0	0	1	3	$(0,0)$		1		
5	1	3	$\boxed{-1}$	0	0	$(0,0)$	0	0	0	1
8	1	1	0	0	0	$(-2,-1)$			1	
9	0	0	1	1	1	$(2,-1)$				1

$\vec{b}_{[1,2]} = \vec{b}_{[0,1]} + 3 \cdot \vec{d}_{[0,1]}$	aus Gleichung 5

3'	0	3	0	$\boxed{-1}$	0	$(0,0)$	1	0	1
4'	0	0	0	1	3	$(0,0)$	1		
8'	1	1	0	0	0	$(-2,-1)$		1	
9'	1	3	0	1	1	$(2,-1)$			1

$\vec{c}_{[1,2]} = 3 \cdot \vec{d}_{[0,1]}$	aus Gleichung 3'

4"	0	3	0	0	$\boxed{3}$	$(0,0)$	0	-1
8"	1	1	0	0	0	$(-2,-1)$	1	
9"	1	6	0	0	1	$(2,-1)$		3

$\vec{d}_{[1,2]} = -\vec{d}_{[0,1]}$	aus Gleichung 4"

8"'	$\boxed{1}$	1	0	0	0	$(-2,-1)$	-3
9"'	3	15	0	0	0	$(6,-3)$	1

$\vec{b}_{[0,1]} = (-2,-1) - \vec{d}_{[0,1]}$	aus Gleichung 8"'

9""	0	$\boxed{12}$	0	0	0	$(12,0)$	

$\vec{d}_{[0,1]} = (1,0)$	aus Gleichung 9""

also $\vec{d}_{[0,1]} = (1,0)$ und damit $\vec{b}_{[0,1]} = (-2,-1) - (1,0) = (-3,-1)$
und damit $\vec{d}_{[1,2]} = -(1,0) = (-1,0)$
und damit $\vec{c}_{[1,2]} = 3 \cdot (1,0) = (3,0)$
und damit $\vec{b}_{[1,2]} = (-3,-1) + 3 \cdot (1,0) = (0,-1)$

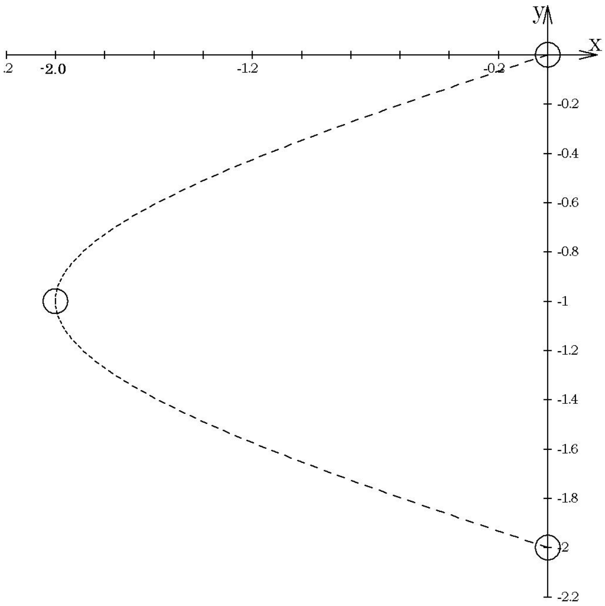
Nach (1) ist dann

$$\begin{aligned}
\vec{x}|_{[0,1]}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t^3 \quad 0 \le t \le 1 \\
\vec{x}|_{[1,2]}(t) &= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (t-1) + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (t-1)^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (t-1)^3 \quad 1 \le t \le 2
\end{aligned}$$

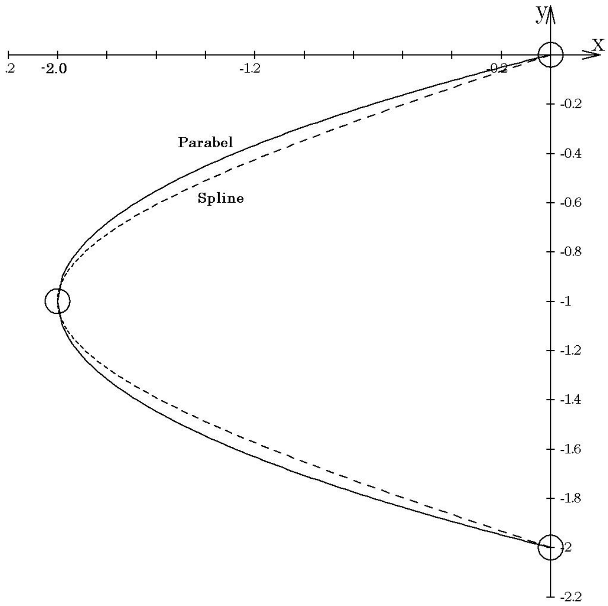
Wir erhielten als Ergebnis für einen natürlichen Spline durch die Punkte
$E_0 = (0,0)$, $E_1 = (-2,-1)$ und $E_2 = (0,-2)$

$$\vec{x}|_{[0,1]}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t^3 \quad \text{für} \quad 0 \le t \le 1$$

$$\vec{x}|_{[1,2]}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (t-1) + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (t-1)^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (t-1)^3 \quad \text{für} \quad 1 \le t \le 2$$



Natürlicher Spline
durch die Punkte
$(0,0)$, $(-2,-1)$ und $(0,-2)$



Parabel und natürlicher Spline
durch die Punkte
$(0,0)$, $(-2,-1)$ und $(0,-2)$

Aufgabe 35.2: Ist diese Kurve eine Parabel?

Lösung zu Aufgabe 35.2: Eine Parabel durch diese drei Punkte hat als Hauptachse eine Parallele zur y-Achse, also lautet die Normalform

$$(y - y_p)^2 = 2 \cdot p \cdot (x - x_p)$$

Es werden also der Scheitelpunkt $S = (x_p, y_p)$ und die Öffnung p gesucht, so dass $E_0 = (0,0)$, $E_1 = (-2,-1)$ und $E_2 = (0,-2)$ auf dieser Kurve liegen.

Es ist $S = (x_p, y_p) = (-2, -1)$.
Wenn das nicht direkt „gesehen“ wird, kann auch gerechnet werden:

$$\begin{array}{c|l|l} (1) & E_0 \text{ liegt auf der Kurve} & y_p^2 = -2 \cdot p \cdot x_p \\ (2) & E_1 \text{ liegt auf der Kurve} & (-1 - y_p)^2 = 2 \cdot p \cdot (-2 - x_p) \\ (3) & E_2 \text{ liegt auf der Kurve} & (-2 - y_p)^2 = -2 \cdot p \cdot x_p \end{array}$$

aus (1) und (3) also $y_p^2 = (-2 - y_p)^2$, also $y_p^2 = 4 + 4 \cdot y_p + y_p^2$ und damit $\boxed{y_p = -1}$.

eingesetzt in (2) also $0 = 2 \cdot p \cdot (-2 - x_p)$ und damit $0 = -2 - x_p$ oder $\boxed{x_p = -2}$.

Werden diese Werte in (1) eingesetzt, gilt $1 = 2 \cdot p \cdot 2$ und damit $\boxed{p = \frac{1}{4}}$

Also lautet die Gleichung der Parabel

$$\boxed{(y + 1)^2 = \frac{1}{2} \cdot (x + 2)}$$

Aufgabe 35.3: Kann eine Ellipse durch eine Bézier-Kurve approximiert werden?
Die Ellipse

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1.29^2} = 1 \tag{10}$$

soll durch eine Bézier-Kurve dargestellt werden.

Bézier-Kurve:
Zu vier *Kontroll*-Punkten P_0, P_1, P_2 und P_3 mit den Ortsvektoren $\vec{x_0}$, $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$ bzw. $\vec{x_3}$ wird die *Bézier-Kurve mit den Kontrollpunkten* P_0, ... P_3 dargestellt durch

$$\vec{b(v)} = \vec{x_0} \cdot (1 - v)^3 + \vec{x_1} \cdot 3 \cdot (1 - v)^2 \cdot v + \vec{x_2} \cdot 3 \cdot (1 - v) \cdot v^2 + \vec{x_3} \cdot v^3 \qquad \text{mit} \quad 0 \le v \le 1 \tag{11}$$

Dann gilt für eine solche Kurve

- Die Bézier-Kurve geht durch die Punkte P_0 und P_3
- Die Bézier-Kurve hat in P_0 die Steigung $\overline{P_0, P_1}$
- Die Bézier-Kurve hat in P_3 die Steigung $\overline{P_2, P_3}$

Lösung der Aufgabe 35.3
oberer Teil der Ellipse
Es seien

$$P_0 = (1, 0, 0) \qquad P_1 = (1, \frac{4}{3} \cdot 1.29, 0) \qquad P_2 = (-1, \frac{4}{3} \cdot 1.29, 0) \qquad P_3 = (-1, 0, 0)$$

Kontroll-Punkte einer Bézier-Kurve. Die zugehörige Kurve hat dann nach (2) die Gleichung:

$$\begin{aligned} \vec{b(v)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 - v)^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \cdot 1.29 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 3 \cdot (1 - v)^2 \cdot v \\ &\quad + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{4}{3} \cdot 1.29 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 3 \cdot (1 - v) \cdot v^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot v^3 \\ &\quad \text{also} \\ x(v) &= (1 - v)^3 + 3 \cdot (1 - v)^2 \cdot v - 3 \cdot (1 - v) \cdot v^2 - v^3 = 4 \cdot v^3 - 6 \cdot v^2 + 1 \\ y(v) &= 4 \cdot 1.29 \cdot (1 - v)^2 \cdot v + 4 \cdot 1.29 \cdot (1 - v) \cdot v^2 = 4 \cdot 1.29 \cdot v \cdot (1 - v) \end{aligned}$$

Diese Kurve ist in Bild 1 für $0 \leq v \leq 1$ dargestellt.

Die Kurve in Bild 1 erinnert an die Form einer Ellipse. Es soll daher geprüft werden, ob diese Gleichung bereits die Ellipse (10) gut approximiert. Abbildung **??** zeigt den Vergleich beider Kurven: Die gestrichelte Linie ist die Bézier-Kurve zu den o.g. Kontollpunkten; sie berührt die Ellipse tangential in den Punkten P_0, P_3 sowie in $(1, 0, 0)$.

Zur Verbesserung der Approximation zwischen Bézier-Kurve und Ellipse könnte die Ellipse in mehrere kleinere Abschnitte zerlegt werden.

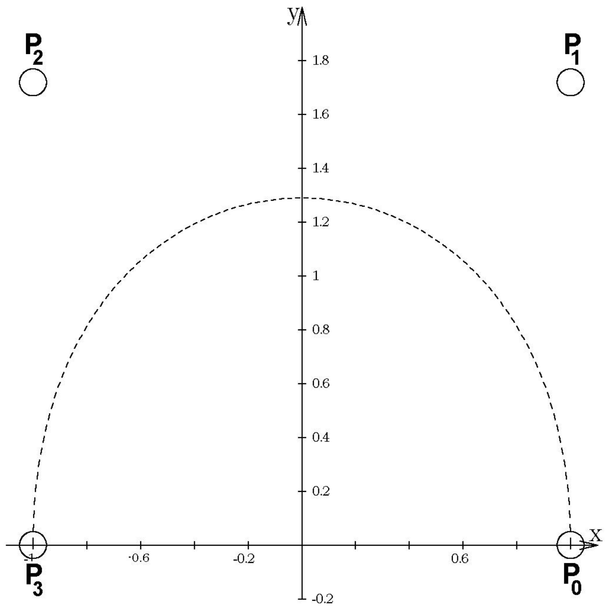


Bild 1: *Bézier-Kurve zu den Kontrollpunkten aus Beispiel 1*

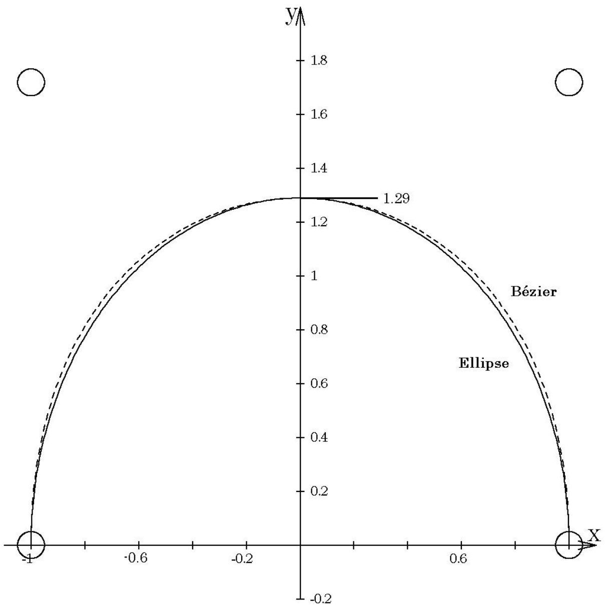


Bild 2: *Vergleich zwischen Bézier-Kurve aus Beispiel 1 und Ellipsenbogen*

Aufgabe 35.3a): Bestimmen Sie die reelle Zahl v_m mit $0 \leq v_m \leq 1$, für die diese Bézier-Kurve durch den Punkt $(0, 1.29)$ geht.

(Lösung: $v_m = \frac{1}{2}$, denn es ist $\vec{b}(v_m) = (0, 1.29)$).

Aufgabe 35.3b): Berechnen sie $\vec{b}(\frac{1}{4})$ und bestimmen Sie die „Abweichung" dieses Punktes von dem „nächstgelegenen" Punkt auf der Ellipse.

(Lösung: Es ist $\boxed{\vec{b}(0.25) = (0.6875, 0.9675)}$.

Auf der Ellipse $y = y(x) = 1.29 \cdot \sqrt{1 - x^2}$ ergibt sich $y(0.6875) = 0.9368$ und damit $\boxed{\Delta\, y = 0.031}$.

Auf der Ellipse $x = x(y) = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{1.29}\right)^2}$ ergibt sich $x(0.9675) = 0.6614$ und damit $\boxed{\Delta\, x = 0.026}$.)

rechter Teil der Ellipse
Es seien

$$P_0 = (0, -1.29, 0) \qquad P_1 = (\frac{4}{3}, -1.29, 0) \qquad P_2 = (\frac{4}{3}, 1.29, 0) \qquad P_3 = (0, 1.29, 0)$$

Kontroll-Punkte einer Bézier-Kurve. Die zugehörige Kurve hat dann die Gleichung:

$$\begin{aligned}
b(\vec{v}) &= (x(v), y(v), 0) \quad \text{mit} \\
x(v) &= 4 \cdot \cdot (1-v)^2 \cdot v + 4 \cdot (1-v) \cdot v^2 \\
&= 4 \cdot v \cdot (1-v) \\
y(v) &= -1.29 \cdot (1-v)^3 - 1.29 \cdot 3 \cdot (1-v)^2 \cdot v + 1.29 \cdot 3 \cdot (1-v) \cdot v^2 + 1.29 \cdot v^3 \\
&= 1.29 \cdot \big(-4 \cdot v^3 + 6 \cdot v^2 - 1\big)
\end{aligned}$$

Diese Kurve ist in Bild 3 für $0 \leq v \leq 1$ dargestellt.

Auch diese Kurve erinnert an die Form einer Ellipse. Es soll daher geprüft werden, ob diese Gleichung bereits die Ellipse (10) gut approximiert. Bild 4 zeigt den Vergleich beider Kurven: Die gestrichelte Linie ist die Bézier-Kurve zu den o.g. Kontollpunkten; sie berührt die Ellipse tangential in den Punkten P_0, P_3 sowie in $(1, 0, 0)$.

Auch hier wäre zur Verbesserung der Approximation zwischen Bézier-Kurve und Ellipse die Ellipse in kleinere Abschnitte zu zerlegen.

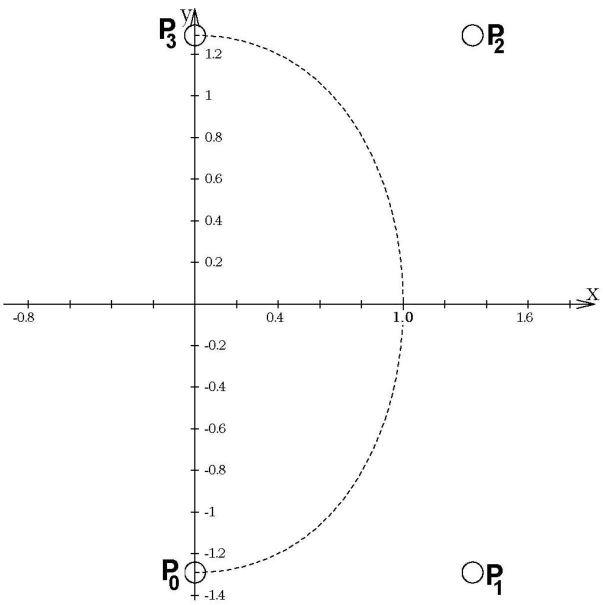


Bild 3: *Bézier-Kurve zu den Kontrollpunkten aus Beispiel 2*

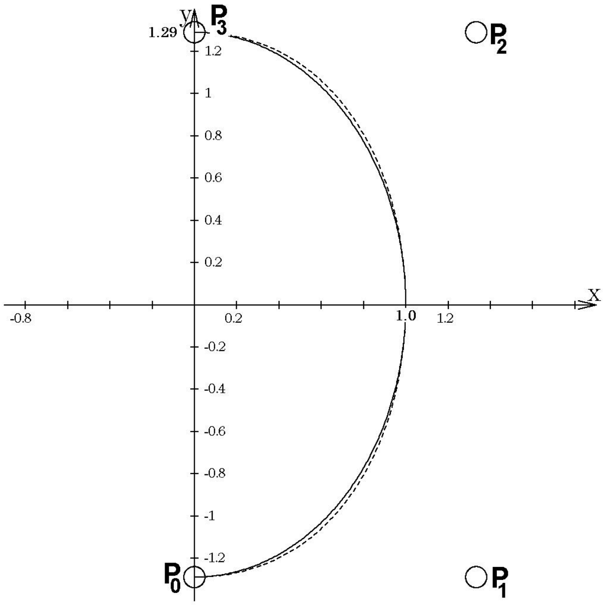


Bild 4: *Vergleich zwischen Bézier-Kurve aus Beispiel 2 und Ellipsenbogen*

Didaktische Überlegungen zur Ellipse und ihrer Approximation

- Wieso stimmen die Bézier-Kurven so gut mit der Ellipse überein?
- Woher kommen die Kontrollpunkte?
- Wurden die Kontrollpunkte berechnet? Wenn ja: aus welchen Daten?
- Wann stimmen Kurven *gut* überein?
- Wie oft sollte die Ellipse unterteilt werden, um eine *gute* Übereinstimmung zu erreichen?

Lösung für die gesamte Ellipse

Die Ellipsengleichung (10) in Parameterform lautet

$$\vec{x(v)} = (\cos(v)\,,\ 1.29 \cdot \sin(v)\,,\ 0) \qquad \text{mit} \qquad 0 \leq v \leq 2 \cdot \pi \tag{12}$$

Für ein v_0 mit $0 \leq v_0 \leq 2 \cdot \pi$ ist dann die Steigung einer Tangente an die Ellipse in $\vec{x(v_0)}$ gegeben durch

$$\vec{x(v_0)}' = (-\sin(v_0)\,,\ 1.29 \cdot \cos(v_0)\,,\ 0) \tag{13}$$

Die Ellipse werde in vier Bereiche geteilt:

A: $-60° \leq v \leq +60°$ B: $+60° \leq v \leq +120°$

C: $+120° \leq v \leq +240°$ D: $+240° \leq v \leq +300°$

Ungelöste zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 35.4:
Wählen Sie „geeignete“ Punkte auf dem Buchstaben „S“ und erzeugen Sie zwischen aufeinanderfolgenden Punkten jeweils einen Spline. Vergleichen Sie anschliessend den Buchstaben mit Ihrer Kurve, die sich aus den einzelnen Splines zusammensetzt.

Aufgabe 35.5 (Lästigkeitskurve):
Aufgrund einer Befragung ergibt sich:

- nach einer (geeigneten oder ungeeigneten Mittelung) fühlen sich 100 Personen durch einen Nacht-Mittelungspegel[1]) von $60\,dB(A)$ „nicht gestört“.
- nach dem gleichen Mittelungsverfahren fühlen sich 100 Personen durch einen Nacht-Mittelungspegel von $80\,dB(A)$ „erheblich gestört“.

Wir suchen nach einer Lästigkeitskurve:

- auf der $y-$Achse tragen wir die „Lästigkeitsstufen“ von 1 (=„nicht gestört“) bis 5 (=„erheblich gestört“) ein
- auf der $x-$Achse tragen wir die Nacht-Mittelungspegel von $60\,dB(A)$ bis $80\,dB(A)$ ein
- die Lästigkeitskurve soll durch die Punkte $(60, 1.5)$ und $(80, 4.5)$ verlaufen
- der maximale Wert der Lästigkeitskurve über der gesamten $x-$Achse mit $-\infty < x < \infty$ soll $y = 5$ sein
- der minimale Wert der Lästigkeitskurve über der gesamten $x-$Achse mit $-\infty < x < \infty$ soll $y = 1$ sein
- die Lästigkeitskurve soll von der Form „arctan“ sein

Geben Sie eine Gleichung dieser Lästigkeitskurve an.

Aufgabe 35.6: Kurvenquietschen-Kurve in Abhängikeit vom Kurvenradius
Aufgabe 35.7: was bedeutet Abweichung? in linearer Regression oder für Parabeln?

[1])der Nacht-Mittelungspegel wird ermittelt wie die „mittlere“ Temperatur, die ein Mensch erlebt, der seine linke Hand in $100°\,C$ heisses Wasser und seine rechte Hand in $0°\,C$ kaltes Wasser hält: die mittlere Temperatur sind $50°\,C$ - also ist dieser Zustand „erträglich“