Dr. P. Merziger — Dr. D. Windelberg
http://www-ifm.math.uni-hannover.de/~windelberg/teach/bau

Niedersächsische Bauordnung

Anwendung des arithmetischen Mittels in der Praxis

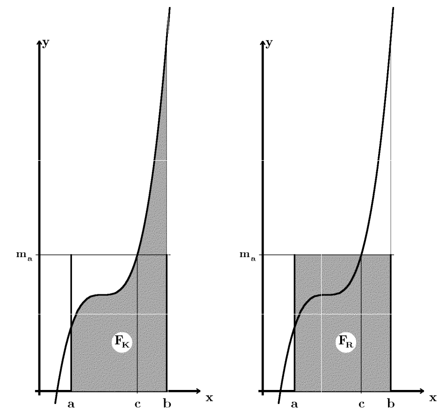
Geschosszahl nach der Niedersächsischen Bauordnung (NBauO)
§ 2 (6): *ein Vollgeschoß ist ein Geschoß, ... dessen Deckenoberkante im Mittel mehr als 1,60 m über der Geländeoberfläche liegt.*
Daher ist zu entscheiden, in welcher Höhe eine ebene Fläche (nämlich die Deckenoberkante) „über“ der Geländeoberfläche liegt.

juristisches Mittel: Ist der Grundriss eines Hauses ein Rechteck, so wird nach juristischer Sicht an den vier Eckpunkten A, B, C und D des Grundrisses jeweils die Höhe h_A, h_B, h_C bzw. h_D der Deckenoberkante über der Geländeoberfläche gemessen. $m_j := (h_A + h_B + h_C + h_D)/4$ ist dann das juristische Mittel.

arithmetisches Mittel:
Mittelwertsatz der Integralrechnung Wenn f stetig auf einem Intervall $[a, b]$ ist, so gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a)$$

Geometrische Interpretation: es gibt eine Zahl c, so daß das Rechteck F_R mit der Grundseite $[a, b]$ und der Höhe $m_a := f(c)$ (dem „arithmetische Mittel“) den gleichen Flächeninhalt hat wie die Fläche F_K über dem Intervall $[a, b]$ zwischen der Kurve $f(x)$ und der x-Achse, falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$.



Aufgabe: Bestimmen Sie die Höhe der Deckenoberkante über der Geländeoberfläche
a) durch das juristische Mittel m_j und
b) durch das arithmetische Mittel m_a
für die folgende Geometrie von Deckenoberkante und Gelände:
Eckpunkte der Deckenoberkante:
$A := (0, 5, 1)$, $B := (0, 0, 1)$, $C := (20, 0, 1)$ und $D := (20, 5, 1)$.

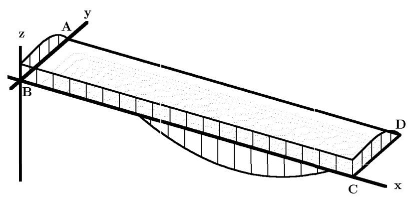
Geländehöhe an den Rändern des Grundrisses:

$\overline{AB}$ $x = 0$ und $z = 1 + \frac{2}{25} \cdot y^2 - \frac{3}{125} \cdot y^3$ für $0 \leq y \leq 5$

$\overline{AD}$ $y = 5$ und $z = \frac{1}{20} \cdot (x - 10)^2 - 5$ für $0 \leq x \leq 20$

$\overline{CD}$ $x = 20$ und $z = 1 + \frac{2}{25} \cdot y^2 - \frac{3}{125} \cdot y^3$ für $0 \leq y \leq 5$

$\overline{BC}$ $y = 0$ und $z = 1$ für $0 \leq x \leq 20$



Grundriss und Geländehöhen

(alle Angaben in m).

juristisches / arithmetisches Mittel in der NBauO

Lösung

a) juristische Lösung

Die Geländehöhen g_A, g_B, g_C und g_D an den vier Eckpunkten sind aus den vier Kurven der Geländehöhe an den Rändern zu bestimmen: Es sind $g_A = 0$, $g_B = 1$, $g_C = 1$ und $g_D = 0$. Die Höhe d der Deckenoberkante beträgt $d = 1$. Folglich ist die Höhe der Deckenoberkante über dem Gelände an den vier Eckpunkten

$h_A = d - g_A = 1$, $h_B = d - g_B = 0$, $h_C = d - g_C = 1$ und $h_D = d - g_D = 0$

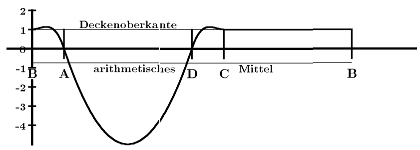
und folglich

$$\boldsymbol{m_j = 0.5}$$

d.h. **bei der juristischen Betrachtung ist das Geschoss <u>kein</u> Vollgeschoss im Sinne der NBauO.**

b) mathematische Lösung: arithmetisches Mittel

Beginnend im Punkt B entsteht folgende Abwicklung der Geländehöhen:



Geländehöhe längs des Grundrisses
(Abwicklung)

$B \to A$: $f_{B,A}(x) = 1 + \frac{2}{25} \cdot x^2 - \frac{3}{125} \cdot x^3$ für $0 \le x \le 5$

$A \to D$: $f_{A,D}(x) = \frac{1}{20} \cdot (x-15)^2 - 5$ für $5 \le x \le 25$

$D \to C$: $f_{D,C}(x) = f_{B,A}(30-x) = 1 + \frac{2}{25} \cdot (30-x)^2 - \frac{3}{125} \cdot (30-x)^3$ für $25 \le x \le 30$

$C \to A$: $f_{C,B}(x) = 1$ für $30 \le x \le 50$

Zur Bestimmung des arithmetischen Mittels g der Geländehöhen wird hier stückweise integriert:

$$\begin{aligned}
g &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \overset{hier}{=} \frac{1}{50-0} \cdot \int_0^{50} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{50} \cdot \left(\int_0^5 f_{B,A}(x)\,dx + \int_5^{25} f_{A,D}(x)\,dx + \int_{25}^{30} f_{D,C}(x)\,dx + \int_{30}^{50} f_{C,B}(x)\,dx \right)
\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
g = \frac{1}{50} \quad & \cdot(\left[x + \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{3}{125} \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 \right]_{x=0}^{x=5} \\
+ \quad & \left[\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{3} \cdot (x-15)^3 - 5 \cdot x \right]_{x=5}^{x=25} \\
+ \quad & \left[x - \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{3} \cdot (30-x)^3 + \frac{3}{125} \cdot \frac{1}{4} \cdot (30-x)^4 \right]_{x=25}^{x=30} \\
+ \quad & [x]_{x=30}^{x=50} \quad)
\end{aligned}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
g = \frac{1}{50} \cdot (\quad & \left(\left[5 + \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5^3 - \frac{3}{125} \cdot \frac{1}{4} \cdot 5^4\right] - \left[0 + \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{3}{125} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0^4\right]\right) \\
+ \quad & \left(\left[\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{3} \cdot (25-15)^3 - 5 \cdot 25\right] - \left[\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{3} \cdot (5-15)^3 - 5 \cdot 5\right]\right) \\
+ \quad & \left[30 - \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{3} \cdot (30-30)^3 + \frac{3}{125} \cdot \frac{1}{4} \cdot (30-30)^4\right] \\
& \quad - \left[25 - \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{3} \cdot (30-25)^3 + \frac{3}{125} \cdot \frac{1}{4} \cdot (30-25)^4\right] \\
+ \quad & ([50] - [30]) \\
) \quad & \\
g = \frac{1}{50} \cdot (\quad & \left[5 + \frac{10}{3} - \frac{15}{4}\right] \\
+ \quad & \left[\frac{2}{60} \cdot 1000 - 100\right] \\
+ \quad & \left[5 + \frac{10}{3} - \frac{15}{4}\right] \\
+ \quad & 20 \\
) \quad & \\
g = \frac{1}{50} \cdot \quad & \left[5 - 100 + 5 + 20 + \frac{10}{3} - \frac{15}{4} + 1000 \cdot \frac{2}{60} + \frac{10}{3} - \frac{15}{4}\right]
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
g = \frac{1}{50} \cdot \left[-70 + \frac{20}{3} - \frac{30}{4} + \frac{100}{3}\right] = \frac{1}{50} \cdot \left[-70 + 40 - \frac{15}{2} -\right] = \frac{-75}{100} = -0.75
$$

Folglich ist

$$
\boldsymbol{m_a = d - g = 1.75}
$$

d.h. **bei der Berechnung der Geländehöhe mit Hilfe des arithmetischen Mittels ist das Geschoss ein Vollgeschoss im Sinne der NBauO.**