Peterson / Windelberg
Kuppel-Verschalung

7. Januar 2008

Aufgabenstellung:

Es sollte untersucht werden, ob es möglich ist, auf den Rippen einer Kuppel eine Diagonal-Verschalung durch Holzlatten annzubringen.

Inhaltsverzeichnis

1 Modell einer Kuppel

In dieser Arbeit wird eine Kuppel aus n_R „Rippen“ $R(\varphi)$ mit

$$\varphi = i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n_R}, i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, (n_R - 1)\}$$

konstruiert. Eine Rippe hat dabei in (geographischen) Kugelkoordinaten r, φ, ϑ den Mittelpunkt

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} -r_{unten} \cdot \cos(\varphi) \\ -r_{unten} \cdot \sin(\varphi) \\ z_{mittelp} \end{pmatrix},$$

wobei der Winkel φ den - im Uhrzeigersinn drehenden - Winkel in der x, y-Ebene und der Winkel ϑ die geographische Breite beschreibt. hat eine Rippe $R(\varphi)$ die Form

$$R(\varphi) := \left\{ \begin{pmatrix} -r_{unten} \cdot \cos(\varphi) \\ -r_{unten} \cdot \sin(\varphi) \\ z_{mittelp} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}, \vartheta_{anf} \leq \vartheta \leq \vartheta_{end} \right\} \quad (1)$$

wobei folgende Bezeichnungen gewählt wurden:

r	der Radius einer Rippe $R(\varphi)$ ist (r ist unabhängig von φ)
$z_{mittelp}$	die z-Komponente der Mittelpunkte der Rippen-Kreisbögen $R(\varphi)$
$r_{mittelp}$	der Radius der kreisförmigen Platte der Mittelpunkte der Rippen-Kreisbögen $R(\varphi)$
z_{anf}	die z-Komponente der Anfangspunkte der Rippen-Kreisbögen $R(\varphi)$
r_{anf}	der Abstand der Füsse der Rippen $R(\varphi)$ von der z-Achse
	= der Radius der kreisförmigen Fußplatte (in der Höhe z_{anf}
z_{end}	die z-Komponente der Endpunkte der Rippen-Kreisbögen $R(\varphi)$
ϑ_{anf}	die geographische Breite der Anfangspunkte der Rippen-Kreisbögen $R(\varphi)$
ϑ_{end}	die geographische Breite der Endpunkte der Rippen-Kreisbögen $R(\varphi)$
r_{end}	der Radius der kreisförmigen Kopfplatte (in der Höhe z_{end})

Dann bestehen folgende Zusammenhänge zwischen ϑ_{anf}, ϑ_{end} und r_{end}:

$$\vartheta_{anf} = \arcsin\left(\frac{z_{anf} - z_{mittelp}}{r}\right) \quad \text{und} \quad \vartheta_{end} = \arcsin\left(\frac{z_{end} - z_{mittelp}}{r}\right)$$

und

$$(r_{mittelp} + r_{end}^2 + (z_{end} - z_{mittelp})^2 = r^2$$

Über diese Rippen sollen Latten genagelt werden, um einerseits die Rippen untereinander fest zu verbinden und andererseits die Lücken zwischen den Rippen möglichst weitgehend zu schliessen. Dazu sollen die Latten jeweils 3 Rippen miteinander verbinden: jeweils vom Fußpunkt einer Rippe zum Kopfende der dritten Rippen. Die Latten sollen so gesägt werden, dass sie sich nach oben gemäß den hier berechneten Vorgaben verjüngen. Die minimale Lattenbreite wird vorgegeben.

2 Rippen einer einer Kuppel

Hier haben wir auf Grund vorgegebener Messdaten gewählt

$$\boxed{\text{Anzahl der Rippen: } n_R = 24}$$

sowie

$$\boxed{r = 4.59,\ r_{mittelp} = 0.38 \text{ und } z_{mittelp} = -1.02.}$$

Die Rippe beginnt auf der Bodenplatte (rot) in der Höhe

$$\boxed{z_{anf} = 0}$$

mit dem Radius $r_{anf} = 4.095$
und endet an der kreisförmigen Kopfplatte (gelb) in der Höhe

$$\boxed{z_{end} = 3.34}$$

mit dem Radius r_{end}.

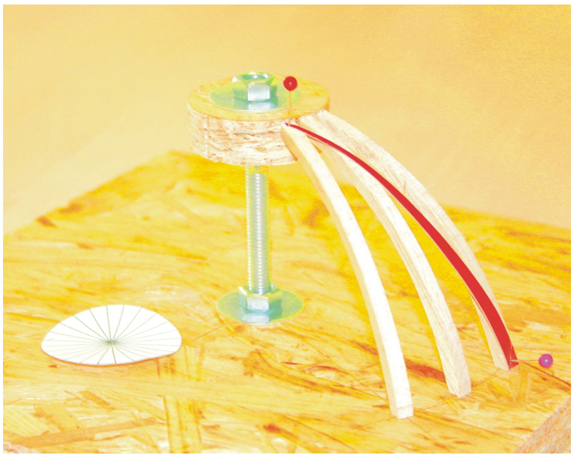

Abbildung 1: Modell

Foto: 60404z.jpg

Damit ergeben sich hier

$$\boxed{\vartheta_{anf} = 0.224 = 12.840^\circ \quad \text{und} \quad \vartheta_{end} = 1.253 = 71.785^\circ}$$

und

$$\boxed{r_{end} = 1.055}$$

Damit ist

$$R(\varphi) = \left\{ P(\varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot [-0.38 + 4.59 \cdot \cos(\vartheta)] \\ \sin(\varphi) \cdot [-0.38 + 4.59 \cdot \cos(\vartheta)] \\ -1.02 + 4.59 \cdot \sin(\vartheta) \end{pmatrix},\ 0.224 \le \vartheta \le 1.253 \right\} \tag{2}$$

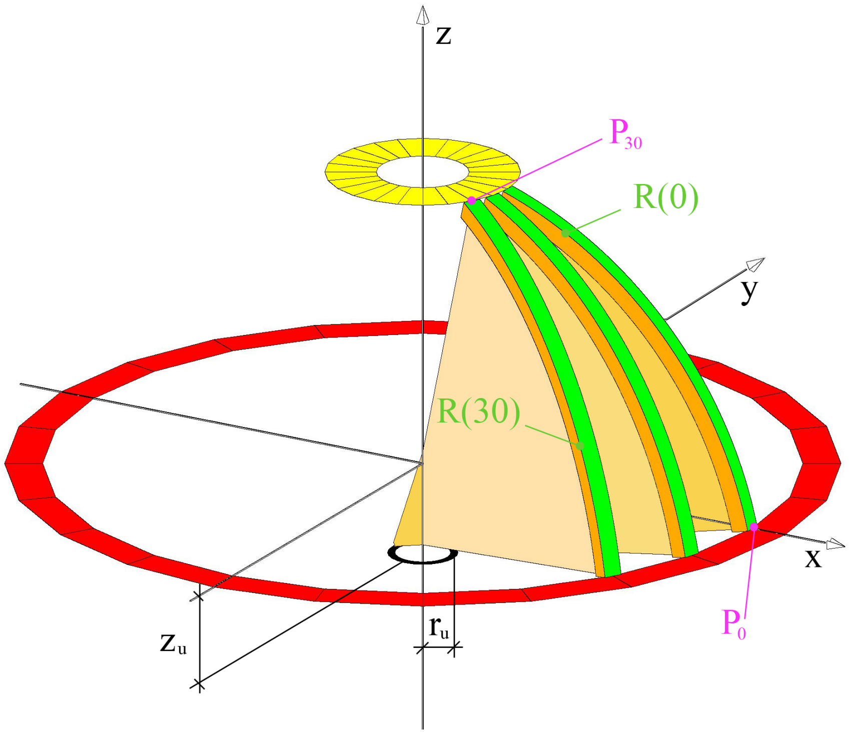

Abbildung 2: Rippe (braun) mit Bodenplatte (rot) und Kopfplatte (gelb)

97 = (93 [3 Kreisscheiben] + 3 · 96 [Rippe]) / 60404.jpg

3 Einschalung der Rippen

Gesucht ist die Gleichung für eine Latte, die (zur Verschalung der Kuppel) auf diese 3 Rippen aufgenagelt wird:

- beginnend unten an der Bodenplatte auf der Rippe $R(0)$, also für $\varphi = 0$, am Punkt

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.095 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- in der Mitte an einem „geeigneten" Punkt P_{15} auf der Rippe $R(15°)$

- oben an der Kopfplatte auf der Rippe $R_(30°)$, also am Punkt

$$P_{30} = \begin{pmatrix} x_{30} \\ y_{30} \\ z_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.913 \\ -0.527 \\ 3.340 \end{pmatrix}$$

Um einen „geeigneten Punkt" P_{15} auf der Rippe $R(15)$ zu finden, wird eine Ebene durch die Punkte P_0 und P_{30} gesucht, auf deren Schnittkurve mit der Kuppel die Latte liegt. Es werden nur solche Ebenen E betrachtet, die durch P_0 und P_{30} gehen und die zusätzlich die z-Achse in einem Punkt P_z schneiden.
Der Schnittpunkt dieser Schnittkurve mit der Rippe $R(15)$ ist dann der „geeignete Punkt" P_{15}, an dem die Latte befestigt werden soll[1]).

[1]) Natürlich könnte ein Versuch eine eindeutige Lösung liefern: Eine Latte, die auf der Rippe $R(0)$ im Punkt P_0 so befestigt wird, dass sie den Punkt P_{30} erreicht, bestimmt den Punkt P_{15} eindeutig.

4 Diagonal-Verlattung der Rippen

Eine Ebene E_z durch $P_0 = (4.095, 0, 0)$, $P_{30} = (0.913, -0.527, 3.340)$ und $P_z = (0, 0, z_{15})$ für ein „geeignetes" z_{15} hat folgende Koordinatendarstellung:
In der Ebene E_z liegen die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{P_0 - P_z}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{P_{30} - P_z}$, deren Kreuzprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$ die Normalenrichtung $\vec{n}_z$ erzeugt:

$$\vec{n}_z = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 4.095 \\ 0 \\ -z_{15} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.913 \\ -0.527 \\ 3.340 - z_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.527 \cdot z_{15} \\ -13.6773 + 3.182 \cdot z_{15} \\ -2.1581 \end{pmatrix}$$

Da der Punkt P_0 in E_z liegen soll, muss gelten[2])

$$E_z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,,\ \begin{pmatrix} -0.527 \cdot z_{15} \\ -13.6773 + 3.182 \cdot z_{15} \\ -2.1581 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2.158065 \cdot z_{15} \right\} \tag{3}$$

Diese Ebene schneidet jede Rippe $R(\varphi)$ in einem Punkt $P_{\varphi, z_{15}}$[3]).

Für ein gegebenes φ mit $0 \leq \varphi \leq 30°$ soll nun - in Abhängigkeit von z_{15} - der Winkel ϑ berechnet werden, unter dem die Ebene E_z die Rippe $R(\varphi)$ schneidet.
In Gleichung (2) für eine Rippe $R(\varphi)$ ist

$$\begin{aligned} x &= \cos(\varphi) \cdot [-0.38 + 4.59 \cdot \cos(\vartheta)] \\ y &= \sin(\varphi) \cdot [-0.38 + 4.59 \cdot \cos(\vartheta)] \\ z &= -1.02 + 4.59 \cdot \sin(\vartheta) \end{aligned} \tag{4}$$

Setzen wir diese Koordinaten wir in die Gleichung (3) ein, so erhalten wir die „Lattengleichung":
Auf einer Rippe $R(\varphi)$ befindet sich (für $0 \leq \varphi \leq 30°$) der Schnittpunkt mit der Latte von $R(0)$ zu $R(30)$, wenn zwischen den drei Parametern φ, ϑ und z_{15} die Gleichung

$$\boxed{l(\varphi, \vartheta, z_{15}) = 0}$$

mit

$$\begin{aligned} l(\varphi, \vartheta, z_{15}) = & -0.527 \cdot z_{15} \cdot \cos(\varphi) \cdot [-0.38 + 4.59 \cdot \cos(\vartheta)] \\ & + (-13.6773 + 3.182 \cdot z_{15}) \cdot \sin(\varphi) \cdot [-0.38 + 4.59 \cdot \cos(\vartheta)] \\ & -2.1581 \cdot (-1.02 + 4.59 \cdot \sin(\vartheta)) + 2.158065 \cdot z_{15} \end{aligned} \tag{5}$$

erfüllt ist.

[2]) Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren beschreiben wir hier in der Form

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} := a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w$$

[3]) Die Lage des Punktes P hängt von dem Winkel φ und der Wahl des Punktes P_z ab.

5 Lattengleichung

Mit Hilfe der Lattengleichung (5) können für verschiedene Werte von z_{15} sowohl die Lattenlänge als auch die Koordinaten der Schnittpunkte zwischen der Mitte der Latte und der Rippe $R(15)$ bestimmt werden:

Genauigkeit: $\pm 0.06\,m$ auf dem Rippenbogen

$z_{z,15}$	Lattenlänge von P_0 bis P_{15} in m	Punkt P_{15} auf der Rippe $R(15)$ x	y	z	Lattenlänge von P_0 bis P_{30} in m
3.0	3.032195	2.549638	-0.683173	2.436912	4.920477
2.0	3.663137	2.022403	-0.541901	2.846353	4.880132
1.0	3.859066	1.848948	-0.495424	2.955534	4.872835
0.0	3.948277	1.769056	-0.474017	3.002131	4.871452
-1.0	3.998791	1.723738	-0.461874	3.027573	4.871171
-2.0	4.030713	1.695119	-0.454206	3.043278	4.871341
-3.0	4.053290	1.674899	-0.448788	3.054209	4.872034
-3.5	4.062342	1.666795	-0.446616	3.058551	4.872196
-4.0	4.070049	1.659901	-0.444769	3.062228	4.872354
-5.0	4.082320	1.648938	-0.441832	3.068042	4.872660
-6.0	4.092331	1.639993	-0.439435	3.072756	4.872937

Tabelle 1: Zusammenstellung der Abhängigkeiten zwischen
- dem Punkt $P_z = (0, 0, z_{15}$ auf der z-Achse,
- den Koordinaten des Schnittpunktes zwischen der Latte und der Rippe $R(15)$
- der Lattenlänge zwischen von P_0 und P_{15} sowie zwischen von P_0 und P_{30}

Programm: kuppel6.mws - Ausgabe: kuppel6.txt

Die Lattenlänge variiert mit der Rechengenauigkeit:
Hier wurde für verschiedene Punkte $P_z = (0, 0, z_{15})$ zunächst die Ebene E_z bestimmt, auf der die drei Punkte P_0, P_{30} und P_z liegen.
Dann wurden zu 31 Rippen $R(\varphi)$ mit $\varphi \in \{0°, 1°, 2°, \ldots, 30°\}$ jeweils die Schnittpunkte mit dieser Ebene berechnet. Die Summe der Abstände zwischen diesen Punkten ergibt dann die „Lattenlänge“.

Es erweist sich als wenig sinnvoll, einen Punkt P_z im Intervall zwischen $3 \geq z_{15} \geq -6$ genau so bestimmen zu wollen, dass bei dieser Wahl die Lattenlänge minimal wird.

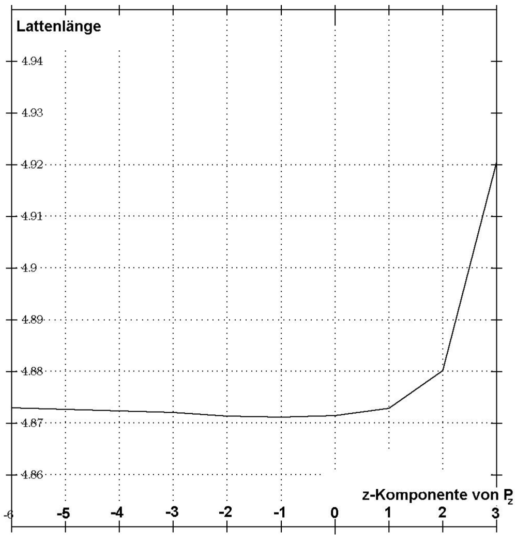

Abbildung 3.-1:
Suche nach einem Minimum

60404r2.jpg

Wir wählen daher willkürlich

$$\boxed{P_{15} = (1.66, -0.45, 3.06) \text{ und } z_{15} = -3.50}$$

Dann ergibt sich als Lattenlänge: $4.87\,m$

6 Latte in einer Ebene

Die „geeignete Ebene“ $E_{-3.5}$ soll durch die drei Punkte

$$P_0 = \begin{pmatrix} 4.095 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_{30} = \begin{pmatrix} 0.913 \\ -0.527 \\ 3.340 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{z,15} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.50 \end{pmatrix}$$

gehen. Daher lautet die zugehörige Ebenengleichung in Koordinatendarstellung

$$E_{-3.5} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,,\ 0.073850 \cdot x - 0.993519 \cdot y - 0.086405 \cdot z = 0.302417\right\} \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

mit der (normierten) Normalenrichtung

$$\vec{n}_{-3.5} = (0.073850, -0.993519, -0.086405) \tag{8}$$

In der folgenden Abbildung 4 ist diese Ebene in blau eingezeichnet

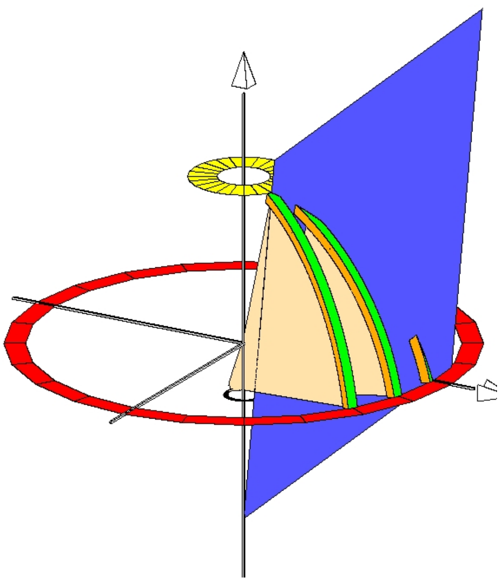

Abbildung 4:
97 + 98 [blaue Fläche]/ 60404a.jpg

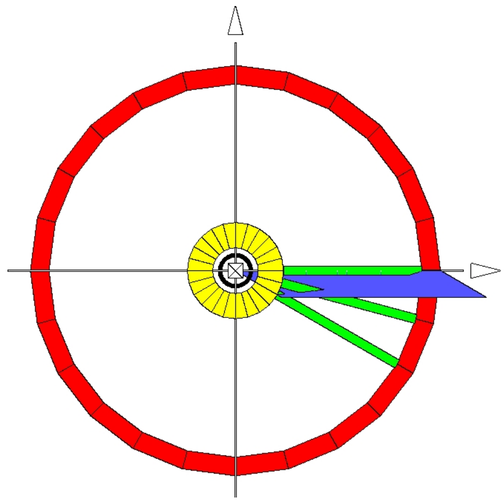

Abbildung 5:
97 + 98 [blaue Fläche]/ 60404aa.jpg

Rippe (braun) mit Bodenplatte (rot) und Kopfplatte (gelb)
Ebene (blau) durch die 3 Punkte P_0, P_{30} und $P_{z,15}$

Für diese Wahl von P_z werden nun verschiedene Genauigkeitstufen betrachtet, nach denen die Lattenlänge (neu) bestimmt wird:

Es wird der Schnittpunkt zwischen der Ebene

$$E_{-3.50} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,,\; 0.073850 \cdot x - 0.993519 \cdot y - 0.086405 \cdot z = 0.302417 \right\}$$

und der Rippe $R(15)$ mit der Genauigkeit von $\pm 0.0006\,m$ auf dem Rippenbogen berechnet. Die Summe der Abstände zwischen diesen Punkten ergibt dann die „Lattenlänge“.

φ	Punkt P_φ auf der Rippe $R(\varphi)$			Lattenlänge von P_0 bis P_φ in m
	x	y	z	
0	4.095222	0.000000	0.000044	0.000000
15	1.666795	-0.446616	3.058551	3.930800
30	0.913012	-0.527128	3.340162	4.739487

Tabelle 1a): Berechnung der Lattenlänge bei 3 Rippen
Programm: kuppel6.mws - Ausgabe: kuppel6.txt

Jetzt werden die Schnittpunkte zwischen der Ebene $E_{-3.50}$ und jeder von 31 teilweise imaginären Rippen $R(\varphi)$ mit der Genauigkeit von $\pm 0.006\,m$ (Tabelle 1b)) [bzw. mit der Genauigkeit von $\pm 0.0006\,m$ (Tabelle 1c))] auf dem Rippenbogen berechnet. Die Summe der Abstände zwischen diesen Punkten ergibt dann die „Lattenlänge“.

φ	Punkt P_φ auf der Rippe $R(\varphi)$			Lattenlänge von P_0 bis P_φ in m
	x	y	z	
0	4.095327	0.000000	-.000417	0.000000
5	2.996397	-.262151	2.076872	2.390502
10	2.177147	-.383890	2.768958	3.472277
15	1.665579	-.446291	3.059200	4.064158
20	1.331186	-.484512	3.203774	4.430571
25	1.092909	-.509632	3.287325	4.684392
30	0.913012	-.527128	3.340162	4.872742

Tabelle 1b): Berechnung der Lattenlänge bei 31 Rippen Programm: kuppel6.mws - Ausgabe: kuppel6.txt

φ	Punkt P_φ auf der Rippe $R(\varphi)$			Lattenlänge von P_0 bis P_φ in m
	x	y	z	
0	4.095222	0.000000	.000044	0.000000
5	2.997350	-.262234	2.075826	2.388636
10	2.175995	-.383687	2.769758	3.473175
15	1.666795	-.446616	3.058551	4.062342
20	1.330777	-.484363	3.203958	4.430515
25	1.092105	-.509257	3.287651	4.684694
30	0.913012	-.527128	3.340162	4.872196

Tabelle 1c): Berechnung der Lattenlänge bei 31 Rippen Programm: kuppel6.mws - Ausgabe: kuppel6.txt

Nun werden die Schnittpunkte zwischen der Ebene $E_{-3.50}$ und jeder von 301 teilweise imaginären Rippen $R(\varphi)$ mit der Genauigkeit von $\pm 0.0006\,m$ auf dem Rippenbogen berechnet. Die Summe der Abstände zwischen diesen Punkten ergibt dann die „Lattenlänge“.

φ	Punkt P_φ auf der Rippe $R(\varphi)$			Lattenlänge von P_0 bis P_φ in m
	x	y	z	
0	4.095222	0.000000	0.000044	0.000000
5	2.997350	-0.262234	2.075826	2.389903
10	2.175995	-0.383687	2.769758	3.474557
15	1.666795	-0.446616	3.058551	4.063750
20	1.330777	-0.484363	3.203958	4.431945
25	1.092105	-0.509257	3.287651	4.686158
30	0.913012	-0.527128	3.340162	4.873731

Tabelle 1d): Berechnung der Lattenlänge bei 301 Rippen Programm: kuppel6.mws - Ausgabe: kuppel6.txt

Ein Vergleich dieser vier Berechnungen der Lattenlänge zeigt, dass auch bei der Lage der Latte in einer vorgegebenen Ebene die genaue Lattenlänge nicht bestimmt werden kann: Wir erhalten Längen zwischen 4.739 und 4.874.
Wenn jedoch angenommen wird, dass zur Vermeidung eines Knickes in der Mitte „imaginäre Rippen“ mitgerechnet werden können, dann reduziert sich die Schwankung auf Längen zwischen 4.872 und 4.874.

Wir wollen nun das Koordiantensystem so drehen, dass die Lattenkurve in einer parallel zur $x-y$-Ebene liegenden Ebene verläuft.

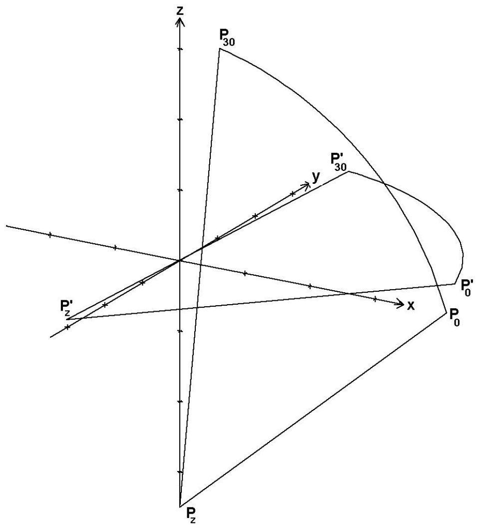

Abbildung 6:
Drehung des Koordinatensystems,
um die Lattenkrümmung zu erkennen
60404r4.jpg

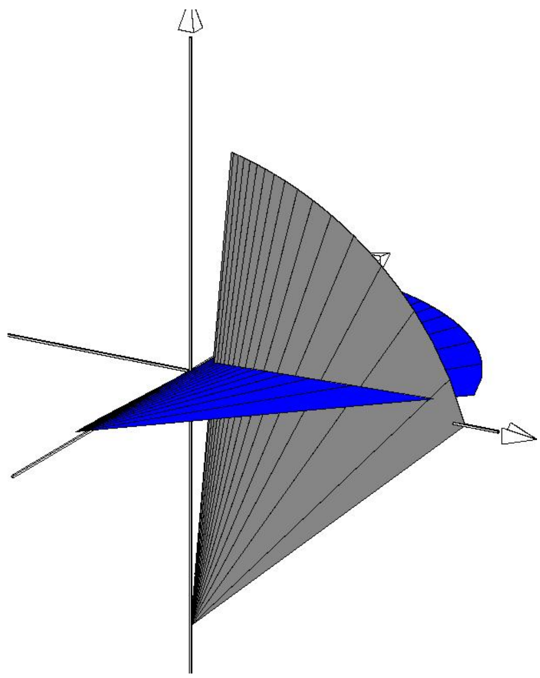

Abbildung 7:
Drehung des Koordinatensystems,
um die Lattenkrümmung zu erkennen
60404r3.jpg

7 Normalen und Binormalen

Es ergeben sich in den Punkten P_0, $P_{15} = (1.666, -0.447, 3.059)$ und P_{30} folgende Tangential- und Normalen- und Binormalenrichtungen[4]):

Punkt	Tangentenrichtung normiert $\vec{t}(P_i)$			Normalenrichtung normiert $\vec{n}(P_i)$			Bi-Normalenrichtung normiert $\vec{b}(P_i)$		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
P_0	-0.290	-0.104	0.951	0.975	0.000	0.222	-0.023	0.992	0.102
P_{15}	-0.891	-0.105	0.442	0.443	-0.119	0.889	-0.041	0.987	0.152
P_{30}	-0.960	-0.094	0.262	0.271	-0.156	0.950	-0.049	0.983	0.176

Tabelle 2b: Tangential-, Normalen und Binormalenrichtungen der Latte

Programm: kuppel1.bas - Ausgabe: kuppel.txt

Damit kann die Krümmung berechnet werden.

8 Krümmung einer Latte

Dazu wird jeweils der Cosinus des Winkels zwischen zwei Normalenrichtungen berechnet

- $\cos(\angle(\vec{n}(P_0), \vec{n}(P_{15}))) = 0.629$,
- $\cos(\angle(\vec{n}(P_{15}), \vec{n}(P_{30}))) = 0.983$ bzw.
- $\cos(\angle(\vec{n}(P_0), \vec{n}(P_{30}))) = 0.475$

und daraus die entsprechende Krümmung berechnet:

Krümmung
Krümmung $\kappa(P_0, P_{15}) = 51°$, bezogen auf die Länge 4.06 m
Krümmung $\kappa(P_{15}, P_{30}) = 11°$, bezogen auf die Länge 0.81 m
Krümmung $\kappa(P_0, P_{30}) = 62°$, bezogen auf die Länge 4.87 m

[4]) Für jeden Punkt einer räumlichen Kurve kann

- der Tangentialvektor $\vec{t}$ in Richtung des nächsten Punktes
- der Normalenvektor $\vec{n}$ (hier als Vektor senkrecht auf der Rippe an der Stelle, an der die Latte auf der Rippe aufliegen würde)
- der Binormalenvektor $\vec{b}$ als Vektor, der senkrecht auf $\vec{t}$ und $\vec{n}$ steht ($\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$)

9 Torsion einer Latte

Entsprechend kann auch die Torsion berechnet werden: Dazu wird jeweils der Cosinus des Winkels zwischen zwei Binormalenrichtungen berechnet

- $\cos(\angle(\vec{b}(P_0), \vec{n}(P_{15}))) = 0.9986$,
- $\cos(\angle(\vec{b}(P_{15}), \vec{n}(P_{30}))) = 0.9997$ bzw.
- $\cos(\angle(\vec{b}(P_0), \vec{n}(P_{30}))) = 0.9969$

und daraus die entsprechende Torsion berechnet:

Torsion
Torsion $\tau(P_0, P_{15}) = 3°$, bezogen auf die Länge 4.06 m
Torsion $\tau(P_{15}, P_{30}) = 1°$, bezogen auf die Länge 0.81 m
Torsion $\tau(P_0, P_{30}) = 5°$, bezogen auf die Länge 4.87 m

10 Ergebnis

Für jede Latte einer Diagonal-Verschalung der betrachteten Rippen einer Kuppel konnte sowohl die Krümmung als auch die Torsion angegeben werden.