Dr. Dirk Windelberg
windelberg@math.uni-hannover.de

AG QUALITÄT
Leibniz Universität Hannover
Mathematik

Stand: 21. Juli 2016
kugel.tex

1 Problem

Es sei ein „schmaler“ Spalt zwischen zwei Materialien durch ein Lötmittel zu füllen. Dazu eignet sich ein Werkstoff, der (z.B. in flüssigem Zustand) zwischen diese beiden Materialien gegossen werden kann und der dann beim Erwärmen diese verbindet.
Der Werkstoff soll als Mischung aus drei Werkstoffen W_1, W_2 und W_3 bestehen, um eine möglichst „dichte“ Masse zu bilden. Die drei Werkstoffe W_i sollen jeweils aus kugelförmigen Teilchen mit dem Radius r_i (für $i \in \{1, 2, 3\}$) besteht und $r_1 > r_2 > r_3$ ist.
Für die Modellierung genügt es, nur zwei Werkstoffe W_1 und W_2 zu betrachten. Dazu stellen wir uns vor, dass ein Raum gefüllt ist mit Kugeln aus dem Werkstoff W_1. Die Dichte ist dann bekannt: $\dfrac{\pi}{3 \cdot \sqrt{2}} \approx 74\%$. Der Werkstoff wird hier modelliert als Mischung aus drei Werkstoffen W_1, W_2 und W_3, wobei der Werkstoff W_i aus kugelförmigen Teilchen mit dem Radius r_i (für $i \in \{1, 2, 3\}$) besteht und $r_1 > r_2 > r_3$ ist.

2 2-D-Modellierung

Wir betrachten zuächst ein zweidimesionales Modell, in dem 3 Kreise, jeweils mit einem Radius r_1, den Querschnitt von 3 Kugeln repräsentieren.
Je zwei dieser Kreise berühren sich (siehe *Bild 2.1*).

Die Kreismittelpunkte sind durch
M_b für den blauen,
M_r für den roten
und M_g für den grünen Kreis
bezeichnet.
Der Radius jedes dieser 3 Kreise sei r_1;
Die Seitenlänge jeder der 3 Dreiecksseiten beträgt daher $2 \cdot r_1$.

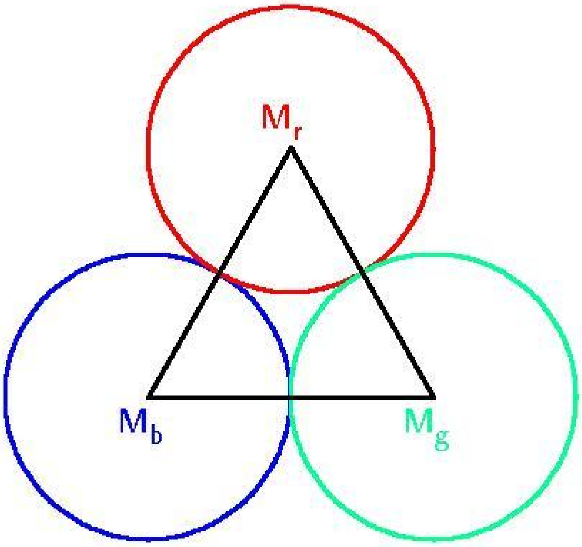


Bild 2.1

Bild 2.1 zeigt die „Grundfläche“ der 3 Kugeln eines Tetraeders aus 4 Kugeln mit Radius r_1, die zu einer dichtesten Kugelpackung des Raumes mit Kugeln dieses Radius r_1 entstammen.
Ein beliebig vorgegebener Raum lässt sich durch ein System von Kugeln füllen.

Wir möchten nun wissen, wie „dicht“ das Innere des Dreiecks durch die drei Kreisflächen bedeckt wird.
Das Innere des Dreiecks hat die Fläche F mit „F = Grundlinie · Höhe / 2“.
Wir nehmen an, jeder der Kreise habe den Radiuns r_1. Dann hat jede Dreiecksseite (und damit auch die Grundlinie) die Länge $2 \cdot r_1$, und die Höhe h ist nach Pythagoras

$$r_1^2 + h^2 = (2 \cdot r_1)^2, \qquad \text{also} \qquad h = \sqrt{4-1} \cdot r_1 = \sqrt{3} \cdot r_1$$

Daher ist

$$\boxed{F \;=\; \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe} \,/\, 2 \;=\; 2 \cdot r_1 \cdot \sqrt{3} \cdot r_1 \,/\, 2 \;=\; \sqrt{3} \cdot r_1^2}$$

2.1 Dichte der Packung durch gleichgrosse Kreisflächen

Von jedem der drei Kreise ist jeweils ein Kreissektor von 60^O innerhalb des Dreiecks mit der Fläche F, also insgesamt ein Kreissektor von $3 \cdot 60^O = 180^O$.

Da ein Vollkreis mit 360^0 und Radius r_1 eine Fläche von $\pi \cdot r_1^2$ bedeckt, füllen hier die drei Kreissektoren eine Fläche von $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot {r_1}^2$.

Dreiecksfläche F, gefüllt mit 3 Kreissektoren von jeweils $60°$. „Dichte" innerhalb der Dreiecks nach *Bild 2.1*
$D(2.1) \;=\; \dfrac{\text{Fläche der 3 Kreissektoren}}{\text{Fläche } F \text{ des Dreiecks}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot {r_1}^2}{\sqrt{3} \cdot r_1^2} = \dfrac{\pi}{2 \cdot \sqrt{3}} \approx 0.9069$

2.2 Verfeinerung 1

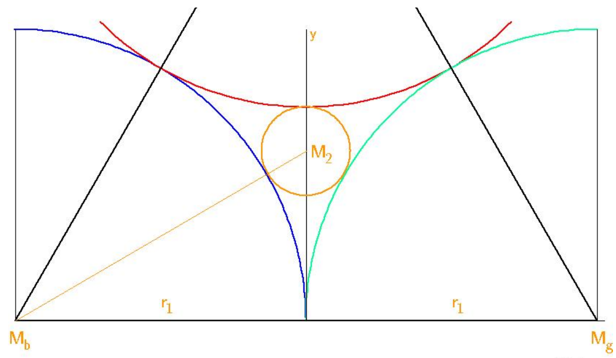


Bild 2.2:
Kreis um M_4
innerhalb des Dreiecks (M_b, M_r, Mg)

Wir betrachten ein Koordinatensystem: Der Mittelpunkt des blauen Kreises sei $\boxed{M_b = (-r_1, 0)}$, der Mittelpunkt des grünen Kreises sei $\boxed{M_g = (r_1, 0)}$.
Der Mittelpunkt M_r des roten Kreises ist dann $\boxed{M_r = (0, r_1 \cdot \sqrt{3})}$.
Nun soll die Fläche zwischen den 3 Kreisen durch einen Kreis K_4 mit einem Radius r_4 mit $r_4 < r_1$ möglichst dicht gefüllt werden.

Wir suchen daher den Radius r_4 (und einen Mittelpunkt $M_4 = (0, y_4)$) für einen Kreis K_4, der zwischen den drei Kreisen

$$K_b := \left\{(x,y); (x+r_1)^2 + y^2 = {r_1}^2\right\} \text{ (blau)},$$
$$K_g := \left\{(x,y); (x-r_1)^2 + y^2 = {r_1}^2\right\} \text{ (grün) und}$$
$$K_r = \left\{(x,y); x^2 + (y - r_1 \cdot \sqrt{3})^2 = {r_1}^2\right\} \text{ (rot)}$$

liegt und diese berührt (siehe *Bild 2*).

Für den Mittelpunkt M_2 des Kreises gilt (unter Verwendung des Punktes M_r):

$$M_2 = (x_2, y_2) \quad \text{mit} \quad x_2 = 0 \text{ und } y_2 = r_1 \cdot \sqrt{3} - r_1 - r_2$$

Daher kann r_2 bestimmt werden:

$$r_2 = r_1 \cdot \sqrt{3} - r_1 - y_2 = r_1 \cdot (\sqrt{3} - 1) - y_2$$

Nach Pythagoras gilt für das rechtwinklige Dreieck $(M_b, M_2, (0,0))$:

$${r_1}^2 + {y_2}^2 = (r_1 + r_2)^2$$

also wegen $y_2 = r_1 \cdot (\sqrt{3} - 1) - r_2$:

$$r_1{}^2 + \Big(r_1 \cdot (\sqrt{3} - 1) - r_2 \Big)^2 = (r_1 + r_2)^2$$

und daher

$$\boxed{r_2 = \frac{r_1 \cdot (2 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{3} \approx 0.1547 \cdot r_1} \quad \text{und} \quad \boxed{F_2 = \pi \cdot r_2^2 \approx 0.0752 \cdot r_1^2}$$

2.2.1 Verdichtung der Packung durch Verfeinerung 1

Wir können nun daher die Dreiecksfläche aus *Bild 2.1* verdichten, indem wir zwischen die drei Kreissegmente noch einen Kreis K_2 legen (wie in *Bild 2.2*). Dadurch erhöht sich der Flächeninhalt der Packung um den Flächeninhalt F_2.

Es gilt in *Bild 2.1* für den Flächeninhalt des Dreiecks $F = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot r_1) \cdot r_1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot r_1{}^2$.
Daher ist die Dichte $D_{2.2}$ bei der Verfeinerung 1:

Dreiecksfläche F, gefüllt mit 3 Kreissektoren von jeweils 60° und 1 Kreis K_2 Kreisfächen-Dichte innerhalb des schwarzen Dreiecks
$D(2.2) = \frac{\text{Fläche der 3 Kreissektoren+Kreis } K_2}{\text{Fläche } F \text{ des Dreiecks}} = \frac{\pi \cdot r_1{}^2 + 2 \cdot \pi \cdot r_2^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot r_1^2}$

Wegen $r_2{}^2 = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{3} \cdot r_1{}^2$ ist daher

$$\boxed{D(2.2) = \pi \cdot \frac{r_1{}^2 + 2 \cdot r_2^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot r_1^2} = \pi \cdot \frac{r_1{}^2 + 2 \cdot \frac{(2-\sqrt{3})^2}{3} \cdot r_1{}^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot r_1^2} = \pi \cdot \frac{\frac{3 + 2 \cdot (2-\sqrt{3})^2}{3}}{2 \cdot \sqrt{3}} = \pi \cdot \frac{3 + 2 \cdot (2-\sqrt{3})^2}{6 \cdot \sqrt{3}} \approx 0.9503}$$

2.3 Verfeinerung 2

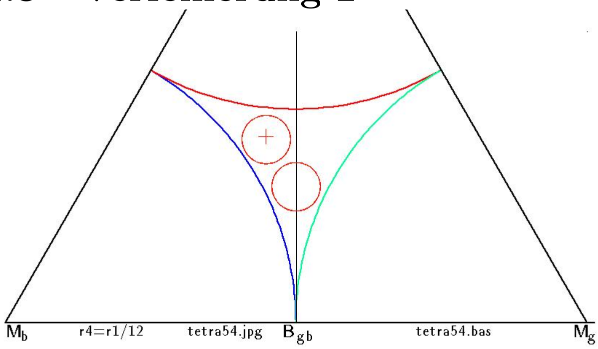


Bild 2.3: Zwei Kreise in der Fläche zwischen den 3 Kreisbögen

Hier bestimmen wir **drei** Kreise, jeweils mit einem Radius $r_{<} r_1$, wobei r_4 so gewählt werden soll, dass die Fläche zwischen den drei Kreisbögen „möglichst gut“ ausgefüllt ist. In *Bild 2.3* sind zunächst nur 2 Kreise eingezeichnet.

Im Ergebnis sollte gelten:
Es gibt einen Radius r_5, so dass die Fläche zwischen den 3 Kreisbögen durch 3 Kreise mit Radius r_5 optimal (d.h. ohne Überschneidungen) dicht gefüllt ist.

Der Radius r_4 der beiden Kreise in *Bild 2.3* ist willkürlich gewählt.

2.3.1 optimale Positionierung eines Kreises mit Radius r_4

In Abhängigkeit von einem Radius r_4 suchen wir den Mittelpunkt $S = (x_{(4,gb)}, y_{(4,gb)})$ eines Kreises $K_{(4,gb)}$ mit dem Radius r_4, für den gelten soll:

Der Kreis $K_{(4,gb)}$ mit dem Mittelpunkt S liegt zwischen dem blauen, grünen und roten Kreisbogen und berührt den blauen und den grünen Kreis

Daher muss gelten:

(a) S liegt auf einem (dünnen, blauen) Kreis um M_b mit Radius $r_1 + r_4$
$(x_S + r_1)^2 + {y_S}^2 = (r_1 + r_4)^2$

(b) S liegt auf einem (dünnen, grünen) Kreis um M_g mit Radius $r_1 + r_4$
$(x_S - r_1)^2 + {y_S}^2 = (r_1 + r_4)^2$

(siehe *Bild 2.4*).

Da (a) und (b) gleichzeitig gelten, folgt $x_S = 0$.
Dann ist also ${r_1}^2 + {y_S}^2 = (r_1 + r_4)^2$
und damit $y_S = \sqrt{2 \cdot r_1 \cdot r_4 + {r_4}^2}$.
$S = (0, y_S)$ ist dann der Mittelpunkt eines Kreises K_S mit dem Radius r_4, der den blauen und den grünen Kreisbogen berührt.
Bei der Wahl von r_4 für dieses Bild gilt zusätzlich, dass der Kreis die eingezeichnete Mittelsenkrechte zu M_b und M_r berührt.

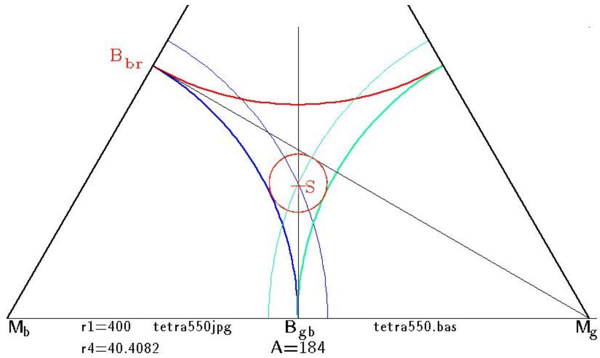


Bild 2.4: Der Kreis-Mittelpunkt S ist Schnittpunkt der beiden dünnen Kreisbögen (jeweils mit Radius $r_1 + r_4$). .
(in der Zeichnung ist $r_1 = 400$ und $r_4 = 40.4082$)

Der Kreis K_S um den Punkt S mit dem Radius r_4 hat die Gleichung

$$K_S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + (y - y_S)^2 = {r_4}^2\right\}$$

Die in *Bild 2.4* eingezeichnete Mittelsenkrechte zu M_b und M_r bezeichnen wir mit M_{br}; sie ist definiert durch die beiden auf ihr liegenden Punkte

$$M_g = (r_1, 0) \quad \text{und} \quad B_{br} = (-\tfrac{1}{2} \cdot r_1 \, , \, \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot r_1).$$

$$M_{br} = \left\{(x,y) \, ; \, y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - r_1)\right\} = \left\{(r_1, 0) + t \cdot (-3, \sqrt{3}) \, , \, 0 \le t \le \frac{1}{2} \cdot r_1\right\}$$

a) $(r_1, 0)$ liegt auf $M_{br} = \left\{(x,y) \, ; \, y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - r_1)\right\}$, denn $x = r_1$ liefert $y = 0$

b) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}) \cdot r_1$ liegt auf $M_{br} = \left\{(x,y) \, ; \, y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - r_1)\right\}$, denn $x = -\frac{1}{2} \cdot r_1$ liefert $y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot r_1$

c) $(r_1, 0)$ liegt auf $M_{br} = \left\{(r_1, 0) + t \cdot (-3, \sqrt{3}), 0 \le t \le \frac{1}{2} \cdot r_1\right\}$, denn $t = 0$ liefert $(r_1, 0)$

d) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}) \cdot r_1$ liegt auf $M_{br} = \left\{(r_1, 0) + t \cdot (-3, \sqrt{3}), 0 \le t \le \frac{1}{2} \cdot r_1\right\}$, denn $t = \frac{1}{2} \cdot r_1$ liefert $(r_1, 0) + \dfrac{1}{2} \cdot r_1 \cdot (-3, \sqrt{3}\,) = (-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}) \cdot r_1$

Wir suchen den Abstand d_{br} zwischen S und dem dem Fußpunkt des Lotes von S auf die Mittelsenkrechte M_{br}, denn dieser Abstand ist der Radius für den roten Kreis um S, wenn dieser die beiden weiten Kreise um T und um U berühren, aber nicht schneiden soll.

Dazu bestimmen wir den Fusspunkt F_L der Lotes von S auf M_{br}.

Da M_{br} die Steigung $m_{br} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ besitzt, hat das Lot L die Steigung $m_L = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Da dieses Lot L durch $S = (0,)$ gehen soll, muss gelten

$$L = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ y = \sqrt{3} \cdot x + a \right\}$$

Der Schnittpunkt (x_L, y_L) dieses Lotes L mit der Mittelsenkrechten M_{br} ergibt sich aus

$$\sqrt{3} \cdot x_L + a = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x_L - r_1)$$

und damit

$$F_L = (x_L, y_L) = \frac{1}{4} \cdot \left(r_1 - \sqrt{3} \cdot a \quad , \quad \sqrt{3} \cdot r_1 + a \right)$$

Der Abstand zwischen $S = (x_S, y_S) = (0, a)$ und F_L soll dann als Radius r_5 des optimalen Kreises festgelegt werden:

$$\begin{aligned}
d^2(F_L, S) &= (x_L - x_S)^2 + (y_L - y_S)^2 \\
&= \left(\frac{1}{4} \cdot (r_1 - \sqrt{3} \cdot a) - 0 \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{3} \cdot r_1 + a) - a \right)^2 \\
&= \frac{1}{16} \cdot \left([r_1 - \sqrt{3} \cdot a]^2 + [\sqrt{3} \cdot r_1 + a]^2 \right) - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{3} \cdot r_1 + a) \cdot a + a^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left({r_1}^2 + a^2 \right) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot r_1 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a^2
\end{aligned}$$

Mit $a = \sqrt{2 \cdot r_1 \cdot r_4 + {r_4}^2}$ suchen wir ein b mit

$$\boxed{r_4 = \frac{r_1}{b}}$$

und erhalten die folgende Gleichung:

$$\frac{1}{4} \cdot b^2 + \frac{3}{4} \cdot (2 \cdot b + 1) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot b + 1} - 1 = 0$$

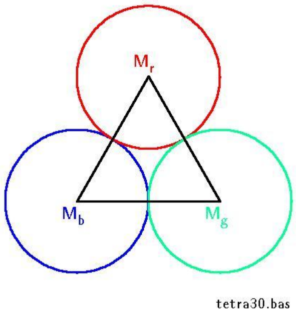
Diese sollte nach b aufgelöst werden, um den Kreisradius $r4$ mit Hilfe der Bedingung $r_4 = \frac{r_1}{b}$ zu bestimmen.

Dabei ergibt sich:

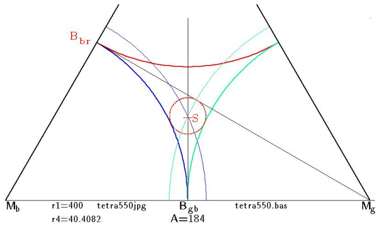
$$\boxed{b = 9.898899, \text{ also } r_4 = \frac{r_1}{9.898899}}$$

3 Ergebnis

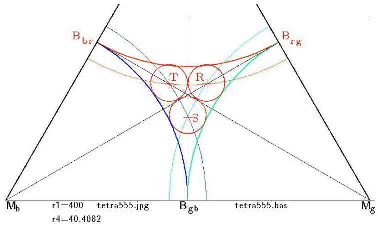
3.1 2-dimensionale Lösung



Kreisradius r_1



Kreisradius r_4: 1 Kreis



Kreisradius r_4: 3 Kreise

in den Zeichnungen ist $r_1 = 400$ und $r_4 = 40.4082$) Im 2-dimensionalen wäre es sinnvoll,

1. Kreise vom Radius $r_1 = 100$ zu nehmen
2. weitere Kreise vom Radius $r_2 = 10$ und
3. Kreise vom Radius $r_3 = 1$ zu wählen.

Zu jeweils 3 Kreisen vom Radius $r1$ gehören dann 3 Kreise vom Radius r_2

3.2 Versuch einer Lösung in 3 Dimensionen

Im 3-dimensionalen betrachten wir zunächst einen Tetraeder. Die Seitenlänge sei $2 \cdot r_1$. An seinen 4 Ecken befindet sich jeweils eine Kugel vom Radius r_1. Das Tetraeder hat 4 „Seiten“, von denen jede durch 3 Kugeln mit Radius r_1 begrenzt ist. Jede dieser Seiten ist wie eine Ebene zu betrachten, d.h. jede Seite ist auch eine Seite eines weiteren Tetraeders.

Das „erste“ Tetraeder habe die Ecken

$$A,\ B,\ C \text{ und } D$$

mit den 4 Dreiecks-Flächen

$$ABC,\ ABD,\ BCD,\ CAD$$

Zunächst wird zu der Fläche CAD ein ausserhalb des Tetraeders liegender Punkt E konstruiert:

Anzahl Tetraeder	Punkte (zusätzlich)	grosse Kugel	kleine Kugel	(zusätzliche) Fläche
1	ABCD	4	9	ABC, ABD, BCD, CAD
2	E	5		

(Fortsetzung wird bearbeitet)